B. YAVORSKI

AIDE-MÉMOIRE DE PHYSIQUE

B. YAVORSKI
A. DETLAF

AIDE-MÉMOIRE DE PHYSIQUE

Table des matières

PREMIÈRE PARTIE

ÉLÉMENTS PHYSIQUES DE MÉCANIQUE CLASSIQUE

DEUXIÈME PARTIE

ÉLÉMENTS DE THERMODYNAMIQUE
ET DE PHYSIQUE MOLÉCULAIRE

PREMIÈRE PARTIE

Eléments physiques de mécanique classique

CHAPITRE PREMIER

Cinématique du point matériel et du solide parfait

1. Notions préliminaires

1° La *mécanique* est la science qui a pour objet la forme la plus simple de mouvement de la matière, le *mouvement mécanique* consistant en la variation de la disposition réciproque des corps ou de leurs parties dans l'espace et dans le temps. On appelle *corps* les systèmes macroscopiques formés d'un grand nombre de molécules ou d'atomes dont les dimensions sont beaucoup plus grandes que les distances intermoléculaires. On considère en *mécanique classique newtonienne* les mouvements des corps qui ont lieu à des vitesses bien inférieures à la vitesse de la lumière dans le vide. L'étude des mouvements des corps dont les vitesses sont comparables à celle de la lumière est l'objet de la mécanique relativiste, fondée sur la théorie de la relativité (p. 551). Les particularités du mouvement des microparticules sont considérées en *mécanique quantique* ou *mécanique ondulatoire* (p. 742). On appelle *microparticules* les particules dont les masses de repos (p. 551) sont comparables ou bien plus petites que les masses de repos des atomes.

2° Les questions se rapportant à la structure interne des corps, à la nature et aux lois d'interaction de ces corps sortent du cadre de la mécanique et constituent l'objet d'autres parties de la physique. Suivant les propriétés des corps et la position du problème on emploie en mécanique classique différents modèles approchés des corps réels: point matériel, solide parfait, etc.

3° On appelle *point matériel* tout corps dont les dimensions et la forme n'ont pas d'importance dans le problème considéré. Lors de l'étude du mouvement des planètes autour du Soleil, par exemple, on peut admettre que celles-ci sont des points matériels, puisque

les dimensions des planètes sont beaucoup plus petites que leur distance jusqu'au Soleil. On appelle ***système de points matériels*** ou de corps (système mécanique) un ensemble isolé par la pensée de points matériels ou de corps qui, dans le cas général, sont en interaction aussi bien entre eux qu'avec les corps qui n'entrent pas dans ce système.

4° On appelle ***solide parfait*** un corps tel que la distance de deux quelconques de ses points soit constante. En d'autres termes, les dimensions et la forme du solide parfait ne changent pas au cours de son mouvement. Chaque solide peut être divisé par la pensée en un nombre suffisamment grand de parties élémentaires telles que les dimensions de chacune d'elles soient beaucoup plus petites que les dimensions de tout le corps. C'est pourquoi on considère souvent le solide parfait comme un système de points matériels rigidement liés les uns aux autres.

5° La mécanique classique englobe trois parties principales: la statique, la cinématique et la dynamique. La ***statique*** est l'étude des lois de composition des forces et des conditions d'équilibre des solides, des liquides et des gaz. La ***cinématique*** est l'étude du mouvement mécanique des corps en dehors de l'influence de l'interaction entre les corps qui le détermine. La ***dynamique*** est l'étude de l'influence de l'interaction entre les corps sur leur mouvement mécanique.

6° On appelle ***système de référence (repère*** ou ***référentiel)*** un solide parfait réel ou conventionnel par rapport auquel on considère le mouvement du corps à étudier. Au repère est lié rigidement un système de coordonnées quelconque tel que la position de chaque point du corps en mouvement puisse être univoquement déterminée par rapport au repère avec trois coordonnées de ce point. En outre, le système de référence doit être chronométrisé, c'est-à-dire muni de montres à l'aide desquelles on détermine de façon univoque (à un terme constant arbitraire près dépendant du choix de l'origine du temps) les instants correspondant aux différentes positions d'un corps mobile dans l'espace.

En mécanique, on utilise en général les systèmes de coordonnées suivants: système cartésien rectangulaire dextrogyre (fig. I. 1.1, *a*), système cylindrique (fig. I.1.1, *b*) et système sphérique (fig. I. 1.1, *c*). Les formules de passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées cylindriques et inversement:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad x = \rho \cos \varphi,$$

$$\varphi = \text{arc tg} \frac{y}{x}, \qquad y = \rho \sin \varphi,$$

$$z = z, \qquad z = z,$$

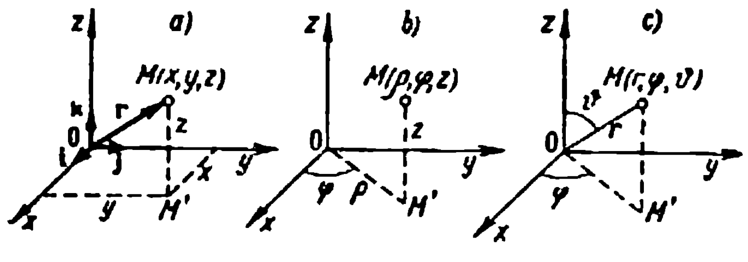


FIG. I.1.1.

celles des coordonnées cartésiennes aux coordonnées sphériques et inversement:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad x = r \sin \vartheta \cos \varphi,$$

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}, \qquad y = r \sin \vartheta \sin \varphi,$$

$$\vartheta = \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}, \qquad z = r \cos \vartheta.$$

7° Le mouvement d'un point matériel est entièrement donné si l'on indique la loi univoque de la variation dans le temps de ses coordonnées spatiales q_1, q_2 et q_3 (cartésiennes, cylindriques ou autres quelconques):

$$q_1 = q_1(t), \quad q_2 = q_2(t), \quad q_3 = q_3(t).$$

Ces équations sont équivalentes à l'équation vectorielle

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t),$$

où $\mathbf{r}$ est le rayon vecteur qui réunit l'origine des coordonnées au point M en mouvement (q_1, q_2, q_3). Si les coordonnées cartésiennes rectangulaires du point M sont x, y, z, on a:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

où $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ sont les vecteurs unités qui coïncident respectivement avec les directions positives des axes Ox, Oy, Oz, et les vecteurs $x\mathbf{i}$, $y\mathbf{j}$ et $z\mathbf{k}$ les composantes du vecteur $\mathbf{r}$ le long de ces axes.

En mécanique, les notations des dérivées par rapport au temps du rayon vecteur $\mathbf{r}$ et des coordonnées q_1, q_2, q_3 du point en mouvement sont:

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad \ddot{\mathbf{r}} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}, \quad \text{etc.},$$

$$\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}, \quad \ddot{q}_i = \frac{d^2q_i}{dt^2}, \quad \text{etc.}$$

8° On appelle *trajectoire* la ligne décrite par un point mobile dans l'espace. Les équations $q_i = q_i(t)$, où $i = 1, 2, 3$, expriment l'*équation de la trajectoire sous forme paramétrique*. En les résolvant simultanément et en éliminant entre elles le paramètre t, il est possible de trouver la dépendance entre les coordonnées des points de l'espace par lesquels passe la trajectoire:

$$F_1(q_1, q_2, q_3) = 0, \qquad F_2(q_1, q_2, q_3) = 0.$$

EXEMPLE. Le mouvement d'un point satisfait aux conditions $x = a \sin \omega t$, $y = b \cos \omega t$, $z = c \sin \omega t$, où a, b, et c sont des constantes non nulles et $\omega \neq 0$. En éliminant le temps t, nous trouvons:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{et} \quad x = \frac{a}{c} z.$$

La trajectoire du point est la ligne d'intersection de ces deux plans.

9° La forme géométrique de la trajectoire dépend du choix du système de référence. Par exemple, si par rapport à un disque en rotation uniforme autour d'un axe fixe, le point matériel se déplace de façon uniforme le long de l'un de ses rayons, la trajectoire de ce point par rapport à l'axe représentera la spirale d'Archimède. Suivant la forme de la trajectoire on distingue le *mouvement rectiligne* et le *mouvement curviligne*. Le mouvement d'un point est appelé mouvement *plan* si toutes les portions de sa trajectoire se trouvent sur un même plan. C'est ce plan qu'on prend habituellement pour plan de coordonnées $z = 0$, donc le mouvement plan d'un point est entièrement déterminé si l'on donne les dépendances du temps de deux de ses coordonnées cartésiennes x et y ou bien de deux de ses coordonnées polaires ρ et φ.

10° On appelle *longueur du chemin s* la somme des longueurs de toutes les portions de trajectoires décrites par un point dans l'intervalle de temps $t_0 - t$. Si les équations du mouvement (p. 19) sont données en coordonnées cartésiennes rectangulaires, on a:

$$s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt;$$

en coordonnées cylindriques

$$s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \left(\rho \frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\dot{\rho}^2 + (\rho\dot{\varphi})^2 + \dot{z}^2}\, dt;$$

en coordonnées sphériques

$$s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + \left(r\sin\vartheta\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}\, dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t} \sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\vartheta})^2 + (r\dot{\varphi}\sin\vartheta)^2}\, dt.$$

On appelle *position initiale* la position d'un point à un instant fixe arbitraire $t = t_0$. Le choix de l'origine du temps étant arbitraire, on adopte habituellement $t_0 = 0$. La longueur du chemin parcouru par le point à partir de sa position initiale est une fonction scalaire du temps $s = s(t)$.

11° Le système mécanique est *libre* si tous les points matériels ou corps le constituant peuvent occuper des positions arbitraires dans l'espace et avoir des vitesses arbitraires. Dans le cas contraire le système est dit système *à liaison.*

On appelle *liaisons (liaisons mécaniques)* les restrictions imposées à la position ou au mouvement du système considéré dans l'espace. Les liaisons sont appelées liaisons *intérieures* si elles n'empêchent pas le système à se déplacer librement, après solidification brusque de celui-ci. Toutes les autres liaisons sont nommées liaisons *extérieures.* Les systèmes assujettis uniquement à des liaisons intérieures sont libres.

La liaison est *bilatérale* lorsque les relations entre les coordonnées et les vitesses des points du système, conditionnées par cette liaison, s'expriment analytiquement sous forme d'une équation de type

$$\Phi(\ldots, x_i, y_i, z_i, \ldots, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i, \ldots, t) = 0,$$

où t est le temps, x_i, y_i, z_i les coordonnées du i-ième point du système

$$(i = 1, 2, \ldots, n),\ \dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt},\ \dot{y}_i = \frac{dy_i}{dt} \text{ et } \dot{z}_i = \frac{dz_i}{dt}.$$

La relation indiquée est appelée *équation de liaison.* Les liaisons intérieures conditionnant l'immuabilité des distances entre les points d'un solide parfait sont un exemple de liaisons bilatérales.

La liaison est *unilatérale* si les restrictions qu'elle impose au système mécanique s'expriment analytiquement sous forme de l'inégalité

$$\Phi_1(\ldots, x_i, y_i, z_i, \ldots, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i, \ldots, t) \geqslant 0.$$

On rencontre un tel genre de liaison, par exemple, lors du mouvement d'un corps suspendu à un fil flexible inextensible, ainsi que lors du mouvement d'un corps sur un plan horizontal.

Les liaisons sont *indépendantes du temps* si les équations de liaison[1]) qui les traduisent ne contiennent pas explicitement le temps. Dans le cas contraire elles sont appelées *dépendantes du temps.*

La liaison est *géométrique* lorsqu'elle n'impose des restrictions qu'à la position des points du système dans l'espace et qu'elle s'exprime analytiquement sous la forme:

$$f(\ldots, x_i, y_i, z_i, \ldots, t) = 0.$$

Les liaisons sont *cinématiques* dans le cas où elles imposent des restrictions non seulement à la position des points du système mais aussi à leurs vitesses:

$$\varphi(\ldots, x_i, y_i, z_i, \ldots, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i, \ldots, t) = 0.$$

Les liaisons sont *holonomes* si les équations qui les traduisent ne comportent pas les dérivées des coordonnées des points du système ou peuvent être réduites à une telle forme par intégration. Dans le cas contraire les liaisons sont *non holonomes*. La vitesse nulle du point de contact d'une boule roulant sans glisser sur un plan rugueux immobile est un exemple d'une telle liaison.

Le système mécanique est appelé système mécanique *holonome* s'il n'est soumis qu'à des liaisons holonomes. Si au nombre des liaisons il y a une liaison non holonome, le système mécanique est dit *non holonome*.

2. Vitesse

1° On appelle *vitesse* (ou *vitesse instantanée*) une grandeur vectorielle **v** égale à la dérivée première par rapport au temps du rayon vecteur **r** d'un point en mouvement:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}.$$

La vitesse est orientée suivant la tangente à la trajectoire dans le sens du mouvement du point et sa valeur absolue est égale à la dérivée première du chemin parcouru par rapport au temps:

$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}.$$

---

[1]) Par la suite nous n considérerons que des liaisons bilatérales.

Les projections des vitesses v_x, v_y et v_z sur les axes de coordonnées cartésiennes rectangulaires sont égales aux dérivées premières par rapport au temps des coordonnées correspondantes du point mobile:

$$v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y}, \quad v_z = \dot{z}.$$

FIG. I.1.2.

D'où

$$\mathbf{v} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}, \quad v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}.$$

En coordonnées cylindriques $v = \sqrt{\dot{\rho}^2 + (\rho\dot{\varphi})^2 + \dot{z}^2}$; en coordonnées sphériques $v = \sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 + (r\dot{\varphi}\sin\theta)^2}$.

2° Dans le cas d'un mouvement plan donné en coordonnées polaires, la vitesse $\mathbf{v}$ d'un point M (ρ, φ) peut être décomposée en deux composantes réciproquement perpendiculaires: la *vitesse radiale* $\mathbf{v}_\rho$ et la *vitesse transversale* $\mathbf{v}_\varphi$ (fig. I.1.2.):

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_\rho + \mathbf{v}_\varphi,$$

de sorte que

$$\mathbf{v}_\rho = \frac{\dot{\rho}}{\rho}\boldsymbol{\rho}, \quad \mathbf{v}_\varphi = \dot{\varphi}\mathbf{k} \times \boldsymbol{\rho},$$

où $\boldsymbol{\rho}$ est le rayon vecteur polaire, mené à partir du pôle O au point M et $\mathbf{k}$ le vecteur unité dirigé perpendiculairement au plan dans lequel se déplace le point de telle façon que de son extrémité la rotation du rayon vecteur $\boldsymbol{\rho}$ dans le sens de croissance de l'angle φ apparaît contraire au sens des aiguilles d'une montre. Les valeurs numériques des vitesses radiale et transversale du point sont égales aux valeurs algébriques des projections de sa vitesse $\mathbf{v}$ sur les directions correspondantes du rayon vecteur $\boldsymbol{\rho}$ et de la droite menée perpendiculairement à $\boldsymbol{\rho}$ dans le sens de croissance de l'angle φ:

$$v_\rho = \dot{\rho}, \quad v_\varphi = \rho\dot{\varphi}.$$

EXEMPLE. Le mouvement d'un point est donné par les équations $x = at\cos bt$, $y = at\sin bt$ et $z = 0$, où a et b sont des coefficients constants. En coordonnées polaires les équations du mouvement du point seront: $\rho = at$ et $\varphi = bt$. Par conséquent, $\dot{\rho} = a$, $\dot{\varphi} = b$,

$$v_\rho = a, \quad v_\varphi = abt \text{ et } v = \sqrt{v_\rho^2 + v_\varphi^2} = a\sqrt{1 + b^2t^2}.$$

3° Le mouvement d'un point est *uniforme* lorsque la valeur numérique de sa vitesse ne dépend pas du temps ($v = \text{const}$). La

longueur du chemin parcouru par le point animé d'un mouvement uniforme est une fonction linéaire du temps:

$$s = v(t - t_0).$$

4° On appelle *vitesse moyenne* du point dans l'intervalle de temps compris entre t et $t + \Delta t$ une grandeur scalaire v_m, quotient de la longueur du chemin Δs, parcouru par le point dans cet intervalle, par le temps Δt:

$$v_m(t, \Delta t) = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

A la limite, quand $\Delta t \to 0$, la vitesse moyenne s'identifie avec la valeur numérique de la vitesse instantanée v du point à l'instant t:

$$\lim_{\Delta t \to 0} v_m(t, \Delta t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = v(t).$$

Dans le cas d'un mouvement uniforme $v_m = v$.

On appelle *vecteur vitesse moyenne* $\mathbf{v}_m$ du point dans l'intervalle de temps compris entre t et $t + \Delta t$ le quotient de l'accroissement $\Delta \mathbf{r}$ du rayon vecteur du point dans cet intervalle par le temps Δt:

$$\mathbf{v}_m(t, \Delta t) = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}.$$

A la limite, quand $\Delta t \to 0$, le vecteur vitesse moyenne s'identifie au vecteur vitesse instantanée du point à l'instant t:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \mathbf{v}_m(t, \Delta t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}(t).$$

Lors d'un mouvement rectiligne uniforme du point $\mathbf{v}_m = \mathbf{v}$. Le module du vecteur $\mathbf{v}_m$ coïncide avec la vitesse scalaire moyenne v_m seulement dans les cas où le mouvement du point est rectiligne avec une vitesse $\mathbf{v}$ constante en direction. Dans tous les autres cas $|\mathbf{v}_m| < v_m$.

5° On appelle *vitesse aréolaire* du point par rapport à un pôle quelconque une grandeur scalaire σ égale à la dérivée première par rapport au temps de l'aire S de la surface décrite par le rayon vecteur de ce point, passant par le pôle:

$$\sigma = \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} rv \sin(\mathbf{r}, \mathbf{v}),$$

où $\mathbf{r}$ et $\mathbf{v}$ sont le rayon vecteur et la vitesse du point et r et v les modules de ces vecteurs. Si le mouvement du point a lieu dans

le plan et si le pôle coïncide avec l'origine d'un système de coordonnées cartésiennes rectangulaires xOy pris sur ce plan, on a:

$$\sigma = \frac{1}{2}(xv_y - yv_x) = \frac{1}{2}\rho^2\dot{\varphi},$$

où ρ et φ sont les coordonnées polaires du point.

3. Accélération

1° On appelle *accélération* (ou *accélération instantanée*) une grandeur vectorielle $\mathbf{w}$ qui caractérise la variation de la vitesse d'un point mobile et est égale à la dérivée première de la vitesse par rapport au temps:

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{\mathbf{v}} \quad \text{ou} \quad \mathbf{w} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \ddot{\mathbf{r}}.$$

Le vecteur accélération est contenu dans le plan osculateur, qui passe par la normale principale et la tangente à la trajectoire, et il est dirigé dans le sens de la concavité de la trajectoire.

Les projections w_x, w_y, w_z de l'accélération sur les axes de coordonnées cartésiennes rectangulaires sont:

$$w_x = \dot{v}_x = \ddot{x}, \quad w_y = \dot{v}_y = \ddot{y}, \quad w_z = \dot{v}_z = \ddot{z}.$$

D'où

$$\mathbf{w} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k},$$

$$|\mathbf{w}| = w = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}.$$

En coordonnées cylindriques

$$w = \sqrt{(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi})^2 + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})^2 + \ddot{z}^2}.$$

En coordonnées sphériques

$$w = [(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\sin^2\vartheta - r\dot{\vartheta}^2)^2 + (2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\vartheta + r\ddot{\varphi}\sin\vartheta + $$
$$+ 2r\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\cos\vartheta)^2 + (2\dot{r}\dot{\vartheta} + r\ddot{\vartheta} - r\dot{\varphi}^2\sin\vartheta\cos\vartheta)^2]^{1/2}.$$

2° Dans le cas d'un mouvement plan donné en coordonnées polaires, l'accélération $\mathbf{w}$ d'un point M (ρ, φ) peut être décomposée en deux composantes réciproquement perpendiculaires: l'*accélération radiale* $\mathbf{w}_\rho$ et l'*accélération transversale* $\mathbf{w}_\varphi$ (fig. I.1.3.)

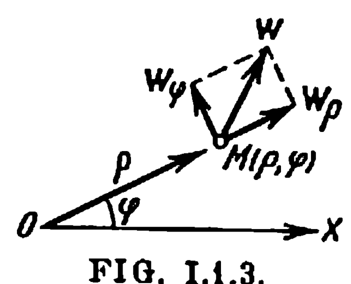


FIG. I.1.3.

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_\rho + \mathbf{w}_\varphi,$$

et dans ce cas

$$\mathbf{w}_\rho = (\ddot\rho - \rho\dot\varphi^2)\,\frac{\boldsymbol\rho}{\rho}, \quad \mathbf{w}_\varphi = (\rho\ddot\varphi + 2\dot\rho\dot\varphi)\mathbf{k} \times \frac{\boldsymbol\rho}{\rho},$$

où le sens des vecteurs $\boldsymbol\rho$ et $\mathbf{k}$ est le même que dans les formules pour $\mathbf{v}_\rho$ et $\mathbf{v}_\varphi$ (p. 23). Les valeurs numériques des accélérations radiale et transversale du point sont égales aux valeurs algébriques des projections de son accélération $\mathbf{w}$ sur les directions correspondantes du rayon vecteur polaire $\boldsymbol\rho$ et de la droite menée perpendiculairement à $\boldsymbol\rho$ dans le sens de croissance de l'angle φ:

$$w_\rho = \ddot\rho - \rho\dot\varphi^2, \quad w_\varphi = \rho\ddot\varphi + 2\dot\rho\dot\varphi.$$

EXEMPLE. Le mouvement d'un point est donné en coordonnées polaires par les équations: $\rho = a + bt$, $\varphi = ct$, où a, b et c sont des coefficients constants:

$$\dot\rho = b, \ \dot\varphi = c \ \text{ et } \ \ddot\rho = \ddot\varphi = 0.$$

Par conséquent,

$$w_\rho = -c^2(a + bt), \quad w_\varphi = 2bc$$

et

$$w = \sqrt{w_\rho^2 + w_\varphi^2} = c\sqrt{c^2(a + bt)^2 + 4b^2}.$$

3° Dans le plan osculateur passant par un point arbitraire de la trajectoire, le vecteur accélération $\mathbf{w}$ peut être décomposé en deux composantes réciproquement perpendiculaires $\mathbf{w}_n$ et $\mathbf{w}_\tau$: $\mathbf{w} = \mathbf{w}_n + \mathbf{w}_\tau$.

La composante $\mathbf{w}_n$ dirigée suivant la normale principale à la trajectoire est appelée *accélération normale* et la composante $\mathbf{w}_\tau$ dirigée suivant la tangente à la trajectoire *accélération tangentielle*. Leurs valeurs numériques respectives sont:

$$w_n = \frac{v^2}{R} \ \text{ et } \ w_\tau = \dot v,$$

de sorte que

$$w = \sqrt{w_n^2 + w_\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{v^2}{R}\right)^2 + \dot v^2},$$

où v est la valeur numérique de la vitesse et R le rayon de courbure de la trajectoire. L'accélération normale $\mathbf{w}_n$ est toujours dirigée vers le centre de courbure de la trajectoire.

4° Le mouvement d'un point est *accéléré* lorsque la valeur numérique de sa vitesse croît avec le temps, c'est-à-dire si $w_\tau > 0$.

Le mouvement d'un point est *retardé* lorsque la valeur numérique de sa vitesse décroît avec le temps, c'est-à-dire si $w_\tau < 0$. Dans le cas d'un mouvement uniforme $w_\tau = 0$. Lors d'un mouvement accéléré d'un point le vecteur $\mathbf{w}_\tau$ coïncide en direction avec le vecteur vitesse $\mathbf{v}$ du mouvement du point, tandis que lors d'un mouvement retardé il est dirigé dans le sens contraire à la direction du vecteur $\mathbf{v}$. Les grandeurs w_τ et w_n caractérisent respectivement la variation de la valeur numérique et de la direction de la vitesse du point mobile. Le mouvement dans lequel la valeur numérique de l'accélération tangentielle est constante, $w_\tau = \text{const}$, est dit mouvement *uniformément varié*.

5° On appelle *accélération moyenne* du point dans l'intervalle de temps compris entre t et $t + \Delta t$ le vecteur $\mathbf{w}_m$ égal au quotient de l'accroissement $\Delta\mathbf{v}$ de la vitesse $\mathbf{v}$ du point dans cet intervalle par le temps Δt:

$$\mathbf{w}_m(t, \Delta t) = \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t}.$$

A la limite, quand $\Delta t \to 0$, l'accélération moyenne coïncide avec l'accélération instantanée à l'instant t:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \mathbf{w}_m(t, \Delta t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{w}(t).$$

4. Mouvements de translation et de rotation du solide parfait

1° On appelle *mouvement de translation* le mouvement d'un solide parfait lors duquel chaque droite rigidement liée à celui-ci se déplace parallèlement à elle-même. Tous les points d'un solide animé d'un mouvement de translation ont les mêmes vitesses et accélérations à chaque instant et leurs trajectoires sont confondues lors d'un déplacement parallèle. C'est pourquoi l'étude cinématique du mouvement de translation du solide parfait se ramène à l'étude du mouvement d'un point quelconque de ce solide. Dans le cas le plus général, le solide en mouvement de translation possède trois degrés de liberté.

2° Si, lors du mouvement d'un solide, deux points A et B de ce corps restent fixes, ce mouvement est appelé *rotation (mouvement de rotation)* autour d'une droite fixe AB dite *axe de rotation*. Lors de la rotation d'un solide autour d'un axe fixe, tous le points de celui-ci décrivent des circonférences dont les centres sont situés sur l'axe de rotation, tandis que leurs plans lui sont perpendiculaires. Le solide en rotation autour d'un axe fixe possède un degré de

liberté: sa position est entièrement déterminée par la donnée de l'angle de rotation φ à partir d'une position initiale.

3° On appelle *vitesse angulaire de rotation* du solide le vecteur ω numériquement égal à la dérivée première de l'angle de rotation par rapport au temps,

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi},$$

et orienté suivant l'axe de rotation de façon que de son extrémité la rotation du solide apparaît contraire au sens des aiguilles d'une montre (fig. I.1.4). La direction du vecteur ω coïncide avec la direction du mouvement de translation du tire-bouchon dont la manche tourne avec le corps (fig. I.1.4).

4° La *vitesse linéaire* $\mathbf{v}$ d'un point arbitraire M du corps en rotation est déterminée par la *formule d'Euler* (fig. I.1.5):

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r},$$

où $\mathbf{r}$ est le rayon vecteur mené au point M d'un point arbitraire O de l'axe de rotation du corps. La valeur numérique de la vitesse linéaire v du point M est proportionnelle à sa distance R de l'axe de rotation:

$$v = \omega r \sin \alpha = \omega R.$$

Les projections v_x, v_y et v_z du vecteur $\mathbf{v}$ sur l'axe du système rectangulaire de coordonnées cartésiennes sont liées aux projections des vecteurs ω et $\mathbf{r}$ sur ces mêmes axes par les formules suivantes:

$$v_x = \omega_y z - \omega_z y, \quad v_y = \omega_z x - \omega_x z,$$

$$v_z = \omega_x y - \omega_y x.$$

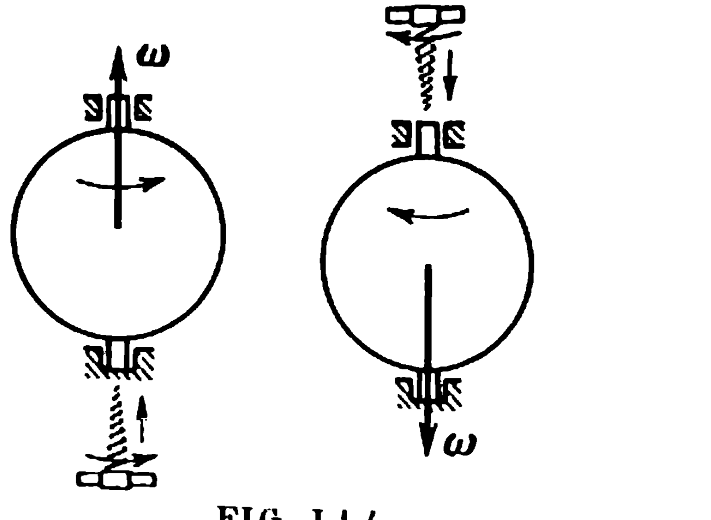


FIG. I.1.4.

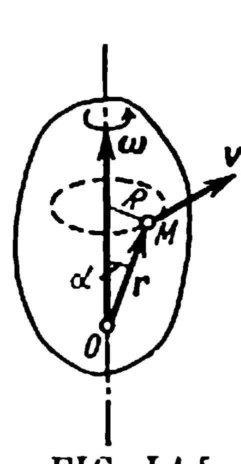


FIG. I.1.5.

5° On appelle *période de révolution* T d'un corps le temps nécessaire pour que ce corps décrive autour de l'axe fixe un angle $\varphi = 2\pi$:

$$\int_0^T \omega \, dt = 2\pi.$$

Le nombre de tours n effectué par le corps par *unité de temps* est:

$$n = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \omega \, dt.$$

6° Le mouvement d'un solide parfait au cours duquel l'un des points de ce corps reste immobile est appelé *rotation autour d'un point (centre) fixe*. Ce mouvement peut être considéré à chaque instant comme une rotation autour d'un axe instantané de rotation passant par un point fixe. La position de l'axe instantané varie continuellement par rapport au système de référence lié au solide en rotation lui-même *(système de référence mobile)*, ainsi que par rapport au *système de référence immobile* lié aux corps fixes qui l'entourent. Les équations de l'axe instantané de rotation sous forme vectorielle et scalaire sont de la forme:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = 0,$$

$$\frac{\omega_x}{x} = \frac{\omega_y}{y} = \frac{\omega_z}{z},$$

où $\boldsymbol{\omega}$ est une fonction vectorielle, ω_x, ω_y et ω_z des fonctions scalaires du temps t. En éliminant le paramètre t de la dernière équation, on obtient l'équation de l'*axoïde*, surface décrite par l'axe instantané de rotation dans l'espace.

Le solide en rotation autour d'un point fixe possède trois degrés de liberté: sa position par rapport à un système de référence immobile est entièrement déterminée par la donnée de trois coordonnées (par exemple deux cosinus directeurs d'un axe quelconque passant par un point fixe du corps et rigidement lié à celui-ci, ainsi que l'angle de rotation de ce corps autour de cet axe). En qualité de coordonnées indépendantes on choisit habituellement les trois *angles d'Euler* ψ, θ et φ (fig. I.1.6). Ox, Oy et Oz sont les axes du système immobile rectangulaire de coordonnées cartésiennes à droite; Ox', Oy' et Oz' les axes du système mobile; $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, et $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ les vecteurs unités des axes de coordonnées; O le centre fixe. La ligne ON d'intersection des plans xOy et $x'Oy'$

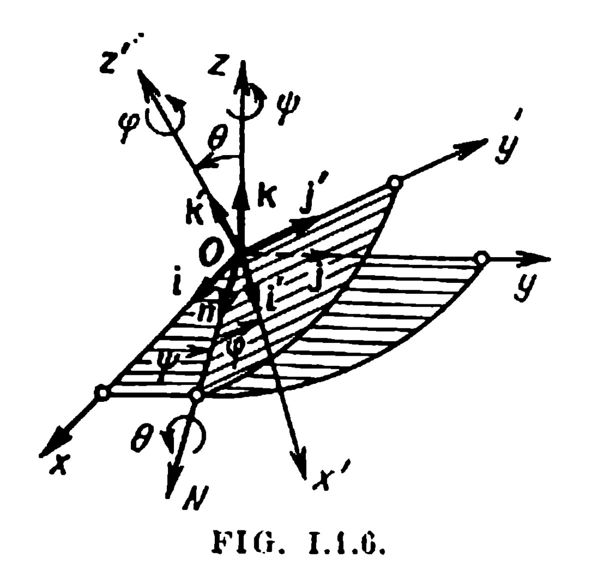


FIG. I.1.6.

est appelée *ligne des nœuds*. Elle est perpendiculaire au plan zOz' et le vecteur unité **n**, qui détermine la direction positive sur la ligne des nœuds, coïncide en direction avec le produit vectoriel $\mathbf{k} \times \mathbf{k}'$, ceci signifie que le triplet de vecteurs **k**, **k'** et **n** a la même orientation que les vecteurs unités des axes de coordonnées.

L'angle ψ entre les axes Ox et ON est l'*angle de précession*. L'angle θ entre les axes Oz et Oz' est l'*angle de nutation*. L'angle φ entre les axes ON et Ox' est l'*angle de rotation propre*. Les directions des angles ψ, θ et φ sont déterminées par la règle de la vis dextrogyre, c'est-à-dire qu'elles correspondent aux directions de rotation (fig. I.1.6) autour des axes: Oz pour l'angle ψ, ON pour l'angle θ et Oz' pour l'angle φ. Les angles d'Euler varient dans les limites suivantes:

$$0 \leqslant \psi \leqslant 2\pi,$$
$$0 \leqslant \theta \leqslant \pi,$$
$$0 \leqslant \psi \leqslant 2\pi.$$

Les projections du vecteur vitesse angulaire ω sur les axes des systèmes de coordonnées immobile (x, y, z) et mobile $(x,' y', z')$ satisfont aux *équations cinématiques d'Euler* pour le solide:

$$\omega_x = \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi,$$
$$\omega_{x'} = \dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi,$$
$$\omega_y = \dot{\theta} \sin \varphi - \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi,$$
$$\omega_{y'} = -\dot{\theta} \sin \varphi + \dot{\varphi} \sin \theta \cos \varphi,$$
$$\omega_z = \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta,$$
$$\omega_{z'} = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta.$$

7° On appelle *accélération angulaire* le vecteur ε égal à la dérivée première du vecteur vitesse angulaire par rapport au temps:

$$d = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega}.$$

L'accélération angulaire caractérise la variation dans le temps du vecteur vitesse angulaire du solide. Lors de la rotation autour d'un axe fixe, la direction du vecteur $\boldsymbol{\omega}$ est conservée et

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi},$$

de sorte que le vecteur $\boldsymbol{\varepsilon}$ coïncide en direction avec $\boldsymbol{\omega}$ dans le cas de rotation accélérée $\left(\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} > 0\right)$ et lui est contraire en direction dans le cas de rotation retardée $\left(\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} < 0\right)$.

L'*accélération linéaire* d'un point arbitraire $M(\mathbf{r})$ d'un solide en rotation est

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\,\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}).$$

8° Le vecteur $\mathbf{w}_{rot} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}$ dirigé perpendiculairement au plan formé par les vecteurs $\boldsymbol{\varepsilon}$ et $\mathbf{r}$ est appelé *accélération de rotation*. Le vecteur $\mathbf{w}_c = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ perpendiculaire à l'axe de rotation et dirigé à partir du point M vers l'axe est appelé *accélération axipète*. Dans le cas de la rotation du corps autour d'un axe fixe les vecteurs $\mathbf{w}_{rot}$ et $\mathbf{w}_c$ sont respectivement identiques aux accélérations tangentielle et normale:

$$\mathbf{w}_{rot} = \mathbf{w}_\tau = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}, \qquad \mathbf{w}_c = \mathbf{w}_n = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = (\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{r})\boldsymbol{\omega} - \omega^2\mathbf{r}.$$

5. Mouvements absolu, relatif et d'entraînement

1° Le *mouvement absolu*[1]) d'un point est son mouvement par rapport à un système de référence galiléen quelconque (p. 37), que l'on adopte conventionnellement immobile et que l'on appelle *système d'axes fixes (repère absolu)*. Le *mouvement relatif* d'un point est son mouvement par rapport à un système de référence mobile, que l'on appelle *système d'axes mobiles*. On appelle *mouvement d'entraînement* le mouvement absolu d'un point du système mobile par lequel passe le point mobile à l'instant considéré.

Le choix du système d'axes fixes et du système d'axes mobiles est conventionnel. Il dépend de la position du problème et du but principal: simplifier au possible la résolution de ce problème.

---

[1]) Les termes de «mouvement absolu» et de «repère absolu» ne sont pas judicieusement choisis étant donné qu'en vertu du principe mécanique de relativité (p. 51), tous les systèmes galiléens sont équivalents.

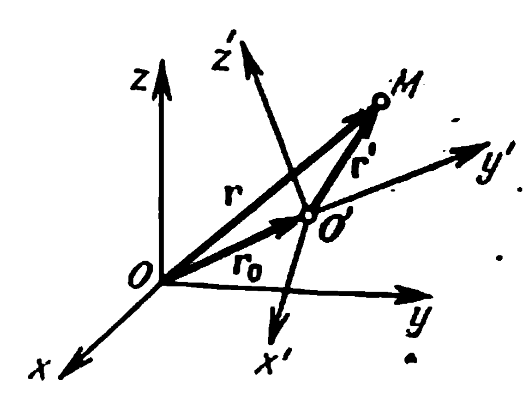


FIG. I.1.7.

2° La relation qui existe entre les rayons vecteurs $\mathbf{r}$ et $\mathbf{r}'$ d'un point mobile M menés respectivement de l'origine O du système de référence immobile (x, y, z) et de l'origine O' du système mobile (x', y', z'), est de la forme (fig. I.1.7):

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}' = \mathbf{r}_0 + (x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}'),$$

où x', y' et z' sont les projections de $\mathbf{r}'$ sur les axes du système mobile et $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$, $\mathbf{k}'$ sont les vecteurs unités de ces axes.

La *vitesse absolue* $\mathbf{v}_a$ d'un point $M(\mathbf{r})$ est:

$$\mathbf{v}_a = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} + x'\frac{d\mathbf{i}'}{dt} + y'\frac{d\mathbf{j}'}{dt} + z'\frac{d\mathbf{k}'}{dt} + \frac{dx'}{dt}\mathbf{i}' + \frac{dy'}{dt}\mathbf{j}' + \frac{dz'}{dt}\mathbf{k}'.$$

La *vitesse relative* $\mathbf{v}_r$ d'un point $M(\mathbf{r}')$ est:

$$\mathbf{v}_r = \frac{dx'}{dt}\mathbf{i}' + \frac{dy'}{dt}\mathbf{j}' + \frac{dz'}{dt}\mathbf{k}' = \frac{\tilde{d}\mathbf{r}'}{dt},$$

où $\frac{\tilde{d}\mathbf{r}'}{dt}$ est la dérivée par rapport au temps du rayon vecteur $\mathbf{r}'$, calculée en supposant constante la direction des vecteurs unités $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$ et $\mathbf{k}'$ du système de référence mobile.

La variation dans le temps des vecteurs unités $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$ et $\mathbf{k}'$ ne peut être conditionnée que par la rotation du système mobile. Si la vitesse angulaire de cette rotation est égale à ω, on a:

$$\frac{d\mathbf{i}'}{dt} = \omega \times \mathbf{i}', \quad \frac{d\mathbf{j}'}{dt} = \omega \times \mathbf{j}', \quad \frac{d\mathbf{k}'}{dt} = \omega \times \mathbf{k}'.$$

Par conséquent[1]),

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_0 + \omega \times \mathbf{r}' + \mathbf{v}_r,$$

---

[1]) Si les origines des systèmes de coordonnées mobile et immobile coïncident constamment, on a:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_0 = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\tilde{d}\mathbf{r}}{dt} + \omega \times \mathbf{r}.$$

Cette relation existant entre les dérivées absolue et relative par rapport au temps est valable non seulement pour le rayon vecteur $\mathbf{r}$, mais aussi pour tout vecteur appliqué à l'origine commune des systèmes de coordonnées mobile et immobile.

où $\mathbf{v}_0 = \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} = \dot{\mathbf{r}}_0$ est la vitesse du mouvement de translation du système mobile, et $\mathbf{v}_e = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$ la *vitesse d'entraînement* du point M.

La vitesse absolue de mouvement d'un point est la somme vectorielle de ses vitesses d'entraînement et relative *(règle de la composition des vitesses)*:

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r.$$

3° L'*accélération absolue* $\mathbf{w}_a$ d'un point $M(\mathbf{r})$ est

$$\mathbf{w}_a = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d\mathbf{v}_a}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') +$$

$$+ 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r + \frac{\widetilde{d}\mathbf{v}_r}{dt}.$$

L'*accélération relative* $\mathbf{w}_r$ d'un point $M(\mathbf{r}')$ est

$$\mathbf{w}_r = \frac{\widetilde{d}\mathbf{v}_r}{dt} = \frac{d^2x'}{dt^2}\mathbf{i}' + \frac{d^2y'}{dt^2}\mathbf{j}' + \frac{d^2z'}{dt^2}\mathbf{k}'.$$

L'*accélération d'entraînement* $\mathbf{w}_e$ d'un point M est

$$\mathbf{w}_e = \mathbf{w}_0 + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'), \text{ où } \mathbf{w}_0 = \frac{d\mathbf{v}_0}{dt}.$$

L'*accélération complémentaire* ou *de Coriolis* est

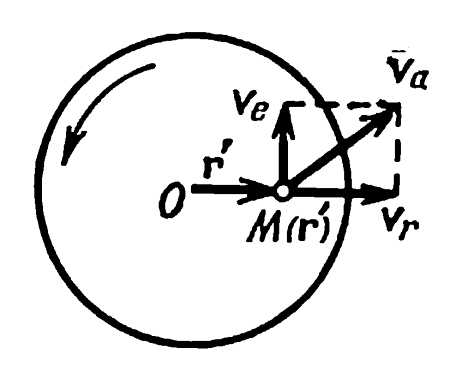
$$\mathbf{w}_C = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r.$$

L'accélération absolue d'un point est la somme vectorielle de ses accélérations d'entraînement, complémentaire et relative:

$$\mathbf{w}_a = \mathbf{w}_e + \mathbf{w}_C + \mathbf{w}_r.$$

L'accélération complémentaire est égale à 0 si: a) le système de référence mobile effectue un mouvement de translation ($\boldsymbol{\omega} = 0$), ou b) le point est au repos par rapport au système mobile ($\mathbf{v}_r = 0$), ou c) le point se déplace parallèlement à l'axe de rotation du système mobile, c'est-à-dire que les vecteurs $\mathbf{v}_r$ et $\boldsymbol{\omega}$ sont parallèles.

EXEMPLE. Un point se déplace uniformément avec une vitesse v_1 le long du rayon d'un disque plat, qui à son tour est en rotation uniforme de vitesse angulaire ω_2, autour d'un axe perpendiculaire



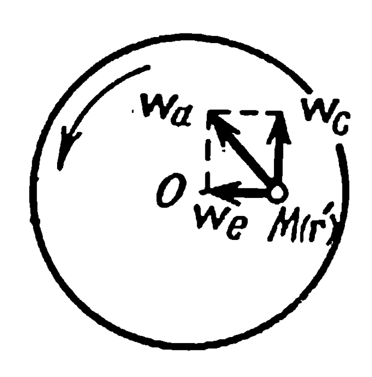


FIG. I.1.8.

à son plan. Les vitesses et les accélérations d'un point arbitraire $M(\mathbf{r}')$ du disque sont (fig. I.1.8):

$$\mathbf{v}_0 = 0, \quad \mathbf{v}_e = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}',$$

$$\mathbf{v}_r = \mathbf{v}_1, \quad \mathbf{v}_a = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}' + \mathbf{v}_1,$$

$$v_a = \sqrt{(\omega_2 r')^2 + v_1^2},$$

$$\mathbf{w}_e = \boldsymbol{\omega}_2 \times (\boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}') = -\omega_2^2 \mathbf{r}',$$

$$\mathbf{w}_C = 2\boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{v}_1, \; \mathbf{w}_r = 0,$$

$$\mathbf{w}_a = -\omega_2^2 \mathbf{r}' + 2\boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{v}_1,$$

$$w_a = \omega_2 \sqrt{(\omega_2 r')^2 + 4v_1^2}.$$

6. Quelques cas de composition des mouvements d'un solide

1° Le corps est animé simultanément de plusieurs mouvements de translation avec des vitesses $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_k$. Son mouvement résultant est aussi un mouvement de translation avec une vitesse $\mathbf{v}$ égale à la somme vectorielle des vitesses $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \ldots + \mathbf{v}_k = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{v}_i.$$

2° Le corps est animé simultanément d'un mouvement de translation de vitesse $\mathbf{v}_0$ et d'une rotation de vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$. La vitesse résultante $\mathbf{v}$ d'un point arbitraire M du corps est:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r},$$

où $\mathbf{r}$ est le rayon vecteur mené au point M d'un point quelconque de l'axe de rotation.

Si $\boldsymbol{\omega} \perp \mathbf{v}_0$, le mouvement d'un corps est dit *mouvement plan parallèle instantané:* les vitesses de tous les points du corps à l'instant considéré sont dirigées perpendiculairement au vecteur $\boldsymbol{\omega}$.

3° Le corps est animé simultanément de deux mouvements de rotation: il tourne avec une vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}_1$ autour d'un certain axe A_1B_1, qui à son tour est en rotation de vitesse angulaire

ω_2 autour d'un axe fixe A_2B_2. En considérant la première rotation comme un mouvement relatif et la seconde comme un mouvement d'entraînement (p. 31), on obtient les valeurs suivantes des vitesses d'entraînement $\mathbf{v}_e$, relative $\mathbf{v}_r$ et absolue $\mathbf{v}$ d'un point arbitraire M du corps:

$$\mathbf{v}_e = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}' = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r},$$
$$\mathbf{v}_r = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}' = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r} - \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_0,$$
$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r = (\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2) \times \mathbf{r} - \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_0,$$

où $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$ et $\mathbf{r}_0$ sont les rayons vecteurs qui ont le même sens que celui indiqué fig. I.1.7.

4° Composition des rotations autour de deux axes A_1B_1 et A_2B_2 qui se coupent. En faisant coïncider les origines des systèmes de référence mobile et immobile avec le point d'intersection des axes (fig. I.1.9), on obtient:

$$\mathbf{r}_0 = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{v} = (\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2) \times \mathbf{r}.$$

La rotation simultanée d'un corps autour de deux axes A_1B_1 et A_2B_2 qui se coupent, avec des vitesses angulaires ω_1 et ω_2, est équivalente à chaque instant à la rotation de ce corps autour d'un axe instantané AB avec une vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2$.

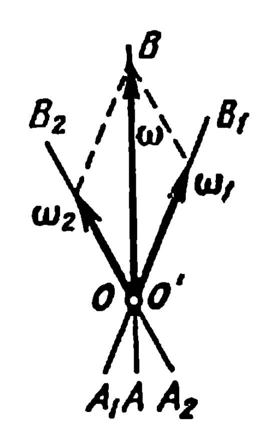


FIG. I.1.9.

5° Composition des rotations autour d'axes parallèles ($\boldsymbol{\omega}_1 \neq -\boldsymbol{\omega}_2$). Menons le vecteur $\mathbf{r}_0$ perpendiculaire aux axes de rotation (fig. I.1.10) et posons $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{d}$, où $\mathbf{d} = \dfrac{\mathbf{r}_0}{k+1}$, et dans ce cas $k = \dfrac{|\omega_2|}{|\omega_1|}$ si les vecteurs $\boldsymbol{\omega}_2$ et $\boldsymbol{\omega}_1$ sont dirigés dans le même sens, et $k = -\dfrac{|\omega_2|}{|\omega_1|}$ si les vecteurs sont dirigés dans le sens contraire. Alors $\boldsymbol{\omega}_2 = k\boldsymbol{\omega}_1$, $\boldsymbol{\omega}_2 + \boldsymbol{\omega}_1 = (k+1)\,\boldsymbol{\omega}_1$ et $\mathbf{v}\,(\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2) \times \mathbf{r}_1$. La rotation simultanée d'un corps autour de deux axes parallèles A_1B_1 et A_2B_2 avec des vitesses angulaires ω_1 et ω_2 ($\boldsymbol{\omega}_1 \neq -\boldsymbol{\omega}_2$) est équivalente à chaque instant à une rotation avec une vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2$ autour d'un axe instantané AB, qui est parallèle aux axes A_1B_1 et A_2B_2 et dont la position par rapport à ces axes est déterminée par la valeur du vecteur $\mathbf{d}$ indiquée ci-dessus.

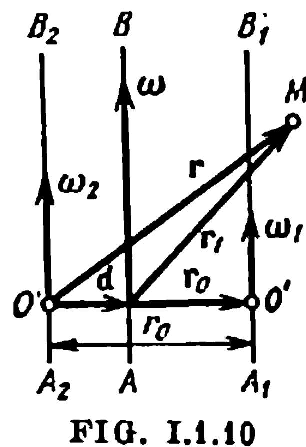


FIG. I.1.10

On appelle *couple de rotation* la rotation d'un corps autour d'axes parallèles avec des vitesses angulaires $\boldsymbol{\omega}_1$ et $\boldsymbol{\omega}_2 = -\boldsymbol{\omega}_1$. Dans ce cas la vitesse résultante de tous les points du corps est la même et elle est égale à $\mathbf{v} = -\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_0$, où $\mathbf{r}_0$ est le rayon vecteur qui réunit les points O et O' des axes (fig. I. 1.10). Le corps est animé d'un mouvement de translation avec une vitesse $\mathbf{v}$ dirigée perpendiculairement au plan dans lequel sont situés les vecteurs $\boldsymbol{\omega}_1$ et $\boldsymbol{\omega}_2$.

CHAPITRE 2

Dynamique du mouvement de translation

1. Première loi de Newton

1° *Première loi de Newton:* tout point matériel conserve son état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme tant que l'influence d'autres corps ne le fait pas sortir de cet état.

Cette loi est appelée *principe de l'inertie* et le mouvement d'un point matériel non soumis aux forces extérieures *mouvement inertiel.*

2° Chaque mouvement mécanique est *relatif:* son caractère dépend du choix du référentiel. Le corps considéré peut simultanément être au repos par rapport à un référentiel, être en mouvement rectiligne uniforme par rapport à un autre référentiel et être en mouvement accéléré par rapport à un troisième. C'est pourquoi le principe de l'inertie n'est pas toujours valable pour tout système de référence. Ainsi, des corps immobiles posés sur le plancher plat d'un wagon en mouvement rectiligne uniforme par rapport à la Terre commencent à se mouvoir sur le plancher chaque fois que le mouvement du wagon devient accéléré.

3° En mécanique classique, on appelle *systèmes de référence* (repères ou référentiels) *galiléens* les systèmes pour lesquels est valable le principe de l'inertie[1]). Avec une très grande précision on peut considérer comme tel le référentiel *héliocentrique* dont l'origine des coordonnées coïncide avec le centre d'inertie du système solaire et dont les axes sont menés dans la direction des lointaines étoiles.

Tout système de référence au repos ou en mouvement rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen quelconque représente

---

[1]) La généralisation de ce concept dans le cas de la mécanique relativiste est faite en théorie de la relativité (p. 544): galiléens sont appelés les systèmes pour lesquels le principe de l'inertie est valable et la vitesse de la lumière dans le vide représente une constante universelle.

lui-même un référentiel galiléen. Au contraire, chaque système animé d'un mouvement accéléré rapporté à un référentiel galiléen n'est pas galiléen.

4° Le système de référence, qui est rigidement lié à la Terre (système de référence *géocentrique*) n'est pas galiléen, principalement à cause de la rotation diurne de la Terre. La confirmation expérimentale de ce fait et l'une des preuves de l'existence de la rotation diurne de la Terre sont l'expérience réalisée avec le pendule de Foucault, qui représente un corps pesant (habituellement une boule) suspendu à un long fil et pouvant osciller librement dans n'importe quelle direction pratiquement sans frottement au point de suspension. La position du plan d'oscillation d'un tel pendule par rapport au référentiel galiléen doit être invariable: le pendule est sollicité par la force de pesanteur et la force de réaction du fil, situées dans ce plan. Toutefois, par rapport au système de référence terrestre, le plan d'oscillation du pendule de Foucault effectue une rotation progressive avec une vitesse angulaire

$$\omega_{\text{p}} = \omega \sin \varphi,$$

où ω est la vitesse angulaire de la rotation diurne de la Terre et φ la latitude géographique du lieu d'observation. L'accélération maximale des points de la surface terrestre ne dépasse pas 0,5% de l'accélération de la chute libre. C'est pourquoi dans la plupart des problèmes pratiques le référentiel géocentrique peut être considéré approximativement comme galiléen.

2. Force

1° La *force* est une grandeur vectorielle qui mesure l'influence mécanique exercée sur un point matériel ou un corps par d'autres corps ou champs. La force est entièrement donnée si l'on indique sa valeur numérique, sa direction et son point d'application.

Il découle du principe de l'inertie que l'interaction des corps entre eux est la cause de la modification de leur état de mouvement. En outre, elle provoque la déformation des corps. La mesure des déformations x_1 et x_2 d'un même corps élastique sous l'influence de deux forces $\mathbf{F}_1$ et $\mathbf{F}_2$, dirigées dans le même sens et appliquées au même point, permet de comparer les valeurs numériques de ces forces:

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{x_2}{x_1}.$$

Cette méthode, qui est fondée sur la loi de Hooke (p. 294), est réalisée à l'aide de balances à ressorts et de dynamomètres.

2° L'action exercée sur un point matériel A (fig. I.2.1) par plusieurs corps avec des forces respectives $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_k$ est équivalente à l'action d'une force dite ***résultante des forces*** et égale à la somme vectorielle de ces forces:

FIG. I.2.1.

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{F}_i.$$

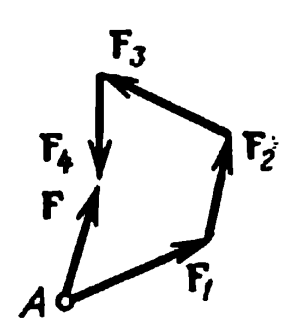


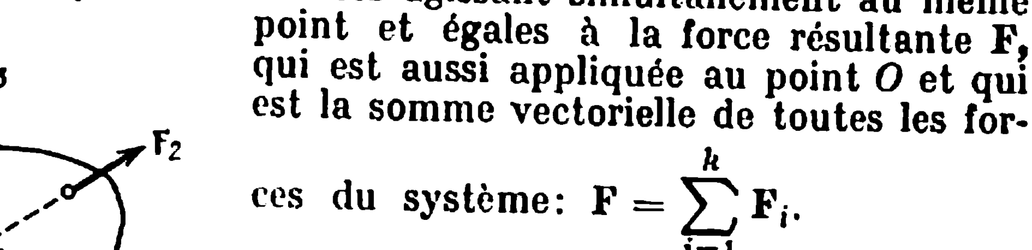
FIG. I.2.2.

La force résultante représente la fermeture du polygone construit sur les forces $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_k$ (fig. I.2.2). Les projections de cette force sur les axes de coordonnées cartésiennes sont les sommes algébriques des projections correspondantes de toutes les forces $\mathbf{F}_i$:

$$F_x = \sum_{i=1}^{k} F_{ix}, \quad F_y = \sum_{i=1}^{k} F_{iy}, \quad F_z = \sum_{i=1}^{k} F_{iz}.$$

On appelle *ligne d'action* d'une force $\mathbf{F}_i$ la ligne suivant laquelle est dirigé le vecteur $\mathbf{F}_i$. L'influence exercée sur un solide parfait est invariable à une translation du point d'application de la force le long de sa ligne d'action (on suppose que tous les points d'application de la force appartiennent au corps ou bien lui sont rigidement liés). Par conséquent, les forces appliquées au solide parfait peuvent être considérées comme des vecteurs glissants.

3° Le *système de forces concourantes* (*faisceau de forces*) est un ensemble des forces appliquées à un solide parfait de façon que leurs lignes d'action se coupent en un même point O (fig. I.2.3). Par translation de ces forces au point O suivant leurs lignes d'action on obtient un système de forces agissant simultanément au même point et égales à la force résultante $\mathbf{F}$, qui est aussi appliquée au point O et qui est la somme vectorielle de toutes les forces du système: $\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{F}_i$.



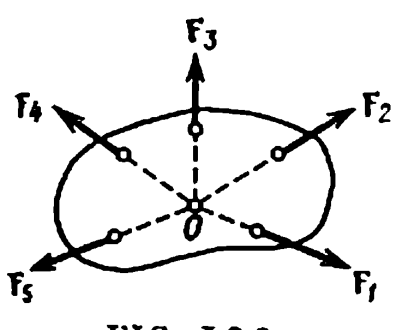


FIG. I.2.3.

4° Dans le cas le plus général, l'action exercée par un système de forces arbitraire sur un solide parfait est équivalente à l'ac-

tion du moment principal $\mathbf{M}$ du système de forces (p. 75) et de la *résultante générale (vecteur principal):* $\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{F}_i$. Le point O d'application de la résultante générale est appelé *centre de réduction.* Le choix de ce point est arbitraire et influe seulement sur la valeur du vecteur moment principal $\mathbf{M}$. Dans le cas d'un mouvement de translation d'un solide parfait, le moment principal de toutes les forces appliquées au solide par rapport à son centre d'inertie (p. 42) est nul.

5° Pour étudier un système quelconque de points matériels ou de corps, on distingue des *forces intérieures*, forces exercées sur un certain point (corps) du système par d'autres points (corps) appartenant à ce système, et des *forces extérieures*, forces conditionnées par l'action des points (corps) n'appartenant pas au système considéré.

6° Le *système fermé* (ou *isolé*) est un système de corps (ou de points matériels) tel qu'aucun d'eux ne soit sollicité par des forces extérieures.

7° *Principe de la libération:* chaque système mécanique non libre peut être considéré comme libre si l'on rejette les liaisons auxquelles il est assujetti et si l'on remplace l'action des corps effectuant ces liaisons par des forces correspondantes appelées *forces de liaison.* Lors du déplacement d'un corps sur une surface rugueuse, par exemple, les restrictions imposées au mouvement du corps peuvent être entièrement prises en considération en introduisant les forces normale et tangentielle du plan. La seconde de ces forces est la force de frottement.

A la différence des forces de liaison, toutes les autres forces (extérieures et intérieures) qui agissent sur le système mécanique sont appelées *forces appliquées (actives).* Quand on considère le mouvement d'un système mécanique, les forces appliquées (actives) doivent être données, et les forces de liaison ne sont pas connues et seront déterminées lors de la résolution du problème.

8. Masse

1° La *masse* du corps est une grandeur physique qui mesure ses propriétés d'inertie et de gravitation.

En mécanique newtonienne, la masse est une grandeur additive, autrement dit la masse m de tout système de points matériels

(d'un solide par exemple) est la somme des masses m_i de tous les points n de ce système:

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i.$$

On admet en mécanique newtonienne que a) la masse du corps ne dépend pas de la vitesse de son mouvement; b) la masse d'un système isolé de corps (ou de points matériels) reste constante quels que soient les processus qui s'y déroulent *(loi de la conservation de la masse)*.

L'inertie d'un point matériel s'exprime dans le fait que sous l'action d'une force extérieure ce point acquiert une accélération finie en valeur, et en l'absence d'influences extérieures conserve son état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme par rapport au référentiel galiléen. La masse entrant dans l'expression de la seconde loi de Newton caractérise les propriétés inertielles du point matériel et est appelée sa *masse d'inertie* (ou *inerte*).

La masse entrant dans l'expression de la loi de l'attraction universelle caractérise les propriétés gravitationnelles du point matériel et est appellée sa *masse gravitationnelle (gravifique* ou *pesante)*.

Des expériences très précises ont permis d'établir que pour tous les corps les rapports de leurs masses d'inertie à leurs masses gravifiques sont identiques. Lors du choix approprié de la valeur de la constante de la gravitation (p. 52) on peut alors estimer que pour tout corps ses masses d'inertie et gravitationnelle sont égales et sont liées à la force de pesanteur P de ce corps par la relation $m = P/g$, où g est l'accélération de la chute libre. Comme le montre l'expérience, en un lieu déterminé l'accélération de la chute libre de tous les corps est la même. C'est pourquoi le rapport des masses de deux corps est égal au rapport de leurs forces de pesanteur: $\frac{m_2}{m_1} = \frac{P_2}{P_1}$. C'est sur ce principe qu'est fondée la comparaison des masses des corps à l'aide des balances à fléau.

2° On appelle *densité* ρ du corps la limite du rapport de la masse de l'élément Δm du corps à son volume ΔV lorsque ΔV tend vers zéro:

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}.$$

La masse du corps est:

$$m = \int_0^V \rho dV,$$

où l'intégration est étendue à tout le volume V du corps. Dans le cas d'un corps homogène, sa densité est constante dans tout le volume V et sa masse est $m = \rho V$.

La *densite moyenne* ρ_m d'un corps non homogène est le rapport de la masse de ce corps à son volume

$$\rho_m = \frac{m}{V}.$$

3° On appelle *centre d'inertie* ou *centre de masse* d'un système de points matériels le point $C(x_c, y_c, z_c)$ dont le rayon vecteur $\mathbf{r}_c$ est lié aux masses m_i et aux rayons vecteurs $\mathbf{r}_i$ de tous les points n du système par la relation

$$\mathbf{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i},$$

de sorte que

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}.$$

Les coordonnées du centre d'inertie du corps sont:

$$x_c = \frac{\int\limits_{(m)} x\, dm}{m} = \frac{\int\limits_{(V)} \rho\, x\, dV}{m}, \quad y_c = \frac{\int\limits_{(m)} y\, dm}{m} = \frac{\int\limits_{(V)} \rho\, y\, dV}{m},$$

$$z_c = \frac{\int\limits_{(m)} z\, dm}{m} = \frac{\int\limits_{(V)} \rho\, z\, dV}{m}.$$

Si le corps est homogène, on a:

$$x_c = \frac{1}{V} \int\limits_{(V)} x\, dV, \quad y_c = \frac{1}{V} \int\limits_{(V)} y\, dV, \quad z_c = \frac{1}{V} \int\limits_{(V)} z\, dV.$$

En coordonnées cartésiennes rectangulaires:

$$dV = dx\, dy\, dz, \quad \int\limits_{(V)} x\, dV = \iiint\limits_{(V)} x\, dx\, dy\, dz, \text{ etc.}$$

4° La *quantité de mouvement* d'un point matériel est le vecteur $\mathbf{K}_i$, produit de la masse m_i du point par sa vitesse $\mathbf{v}_i$

$$\mathbf{K}_i = m_i \mathbf{v}_i.$$

La quantité de mouvement d'un système de n points matériels est le vecteur $\mathbf{K}$, égal à la somme géométrique des quantités de mouvement de tous les points du système (que l'on appelle la *résultante cinétique*):

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{K}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{v}_i.$$

Pour un corps

$$\mathbf{K} = \int_{(m)} \mathbf{v}\, dm = \int_{(V)} \mathbf{v}\rho\, dV.$$

La résultante cinétique est le produit de la masse m du système par la vitesse $\mathbf{v}_c = \frac{d\mathbf{r}_c}{dt}$ de son centre d'inertie: $\mathbf{K} = m\mathbf{v}_c$. La vitesse $\mathbf{v}_c$ représente la vitesse du mouvement de translation du système.

4. Deuxième loi de Newton

1° *Deuxième loi de Newton:* la dérivée première de la quantité de mouvement d'un point matériel par rapport au temps est égale à la force qui lui est appliquée:

$$\frac{d\mathbf{K}_i}{dt} = \mathbf{F}_i \quad \text{ou} \quad \frac{d}{dt}(m_i \mathbf{v}_i) = \mathbf{F}_i.$$

On appelle *impulsion élémentaire de la force* $\mathbf{F}_i$ dans un intervalle de temps dt le vecteur $\mathbf{F}_i dt$. L'*impulsion de la force* $\mathbf{F}_i$ dans un intervalle fini de temps Δt est égale à $\int_0^{\Delta t} \mathbf{F}_i dt$. Si la force $\mathbf{F}_i$ est constante, son impulsion pour un élément de temps Δt est $\mathbf{F}_i \Delta t$.

La deuxième loi de Newton peut être formulée également de la manière suivante: la variation élémentaire de la quantité de mouvement d'un point matériel est égale à l'impulsion élémentaire de la force qui lui est appliquée:

$$d(m_i \mathbf{v}_i) = \mathbf{F}_i dt.$$

Etant donné que $m_i =$ const, on a:

$$\mathbf{w}_i = \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \frac{\mathbf{F}_i}{m_i}.$$

La deuxième loi de Newton peut également être énoncée ainsi: l'accélération d'un point matériel est proportionnelle à la force qui lui est appliquée, inversement proportionnelle à la masse du point et coïncide en direction avec la force.

L'équation qui détermine la relation entre $\mathbf{w}_i$ et $\mathbf{F}_i$ est appelée *équation différentielle du mouvement* du point. Cette équation est de la forme

a) en coordonnées cartésiennes

$$m_i\ddot{x}_i = F_{ix}; \quad m_i\ddot{y}_i = F_{iy}; \quad m_i\ddot{z}_i = F_{iz};$$

b) en coordonnées cylindriques

$$m_i(\ddot{\rho}_i - \rho_i\dot{\varphi}_i{}^2) = F_{i\rho}; \; m_i(\rho_i\ddot{\varphi}_i + 2\dot{\rho}_i\dot{\varphi}_i) = F_{i\varphi};$$
$$m_i\ddot{z}_i = F_{iz},$$

où $F_{i\rho}$ et $F_{i\varphi}$ sont respectivement les projections de la force $\mathbf{F}_i$ sur les directions de la droite OM' (fig. I. 1.1,*b*, où M est le point matériel mobile de masse m_i) et de la droite menée dans le plan xOy perpendiculairement à OM' dans le sens de croissance de l'angle φ;

c) en coordonnées sphériques

$$m_i(\ddot{r}_i - r_i\dot{\varphi}^2{}_i \sin^2\theta_i - r_i\dot{\theta}^2{}_i) = F_{ir};$$

$$m_i[(r_i\ddot{\varphi}_i + 2\dot{r}_i\dot{\varphi}_i)\sin\theta + 2r_i\dot{\varphi}_i\dot{\theta}_i\cos\theta_i] = F_{i\varphi};$$

$$m_i(2\dot{r}_i\dot{\theta}_i + r_i\ddot{\theta}_i - r_i\dot{\varphi}_i^2 \sin\theta_i\cos\theta_i) = F_{i\theta},$$

où F_{ir} est la projection de $\mathbf{F}_i$ sur la direction de la droite OM (fig. I. 1.1,*c*), $F_{i\varphi}$ la projection de $\mathbf{F}_i$ sur la direction de la droite menée dans le plan xOy perpendiculairement à OM' dans le sens de croissance de l'angle φ, $F_{i\theta}$ la projection de $\mathbf{F}_i$ sur la direction de la droite menée dans le plan OMM' perpendiculairement à OM dans le sens de croissance de l'angle θ.

2° *Principe d'indépendance des effets des forces:* si plusieurs forces agissaient simultanément sur un point matériel, chacune d'elles communiquerait à ce point une accélération, qui est déterminée par la deuxième loi de Newton, comme si d'autres forces n'existaient pas. C'est pourquoi il est possible de déterminer l'accélération résultante du point d'après la deuxième loi de Newton en y portant la force résultante $\mathbf{F}_i$.

3° Dans le plan osculateur l'accélération d'un point matériel et la force qui lui est appliquée peuvent être décomposées en composantes normales et tangentielles:

$$m_i(\mathbf{w}_{in} + \mathbf{w}_{i\tau}) = \mathbf{F}_{in} + \mathbf{F}_{i\tau},$$

dans ce cas

$$\mathbf{F}_{in} = m_i\mathbf{w}_{in} \text{ et } \mathbf{F}_{i\tau} = m_i\mathbf{w}_{i\tau}.$$

La force normale est numériquement égale à (p. 26):

$$F_{in} = m_i w_{in} = \frac{m_i v_i^2}{R_i},$$

elle est dirigée vers le centre de courbure de la trajectoire du point matériel. On l'appelle souvent la *force centripète*. Dans le cas d'une trajectoire circulaire de rayon R_i la force $F_{in} = m_i\omega_i^2 R_i$, où ω_i est la vitesse angulaire de rotation du point.

La force tangentielle est numériquement égale à (p. 26).

$$F_{i\tau} = m_i w_{i\tau} = m_i \dot{v}_i.$$

Si $\dot{v}_i > 0$, la force $\mathbf{F}_{i\tau}$ coïncide en direction avec le vecteur vitesse $\mathbf{v}_i$ et est appelée *force motrice*; si $\dot{v}_i < 0$, la force $\mathbf{F}_{i\tau}$ est de direction opposée à celle de la vitesse $\mathbf{v}_i$ et est nommée *force de frottement*.

5. Troisième loi de Newton

Les actions de deux points matériels l'un sur l'autre sont numériquement égales et de sens opposé:

$$\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji} \, (i \neq j),$$

où $\mathbf{F}_{ij}$ est la force avec laquelle le point j agit sur le point i et $\mathbf{F}_{ji}$ la force avec laquelle le point i agit sur le point j. Ces forces sont appliquées à divers points et ne peuvent s'équilibrer mutuellement que dans le cas où les points i et j appartiennent à un même solide parfait.

6. Loi fondamentale de la dynamique du mouvement de translation

1° La dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement $\mathbf{K}$ d'un point matériel ou d'un système de points matériels

par rapport à un repère immobile (galiléen) est égale à la résultante générale $\mathbf{F}$ de toutes les forces extérieures appliquées à ce système:

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{F} \quad \text{ou} \quad m\mathbf{w}_c = \mathbf{F},$$

où $\mathbf{w}_c$ est l'accélération du centre d'inertie du système et m sa masse.

Dans le cas du mouvement de translation d'un solide avec une vitesse absolue $\mathbf{v}$, la vitesse du centre d'inertie est $\mathbf{v}_c = \mathbf{v}$. C'est pourquoi, lors de l'étude du mouvement de translation du solide, ce corps peut être remplacé par la pensée par un point matériel coïncidant avec le centre d'inertie du corps possédant toute sa masse et se déplaçant sous l'action de la résultante générale des forces extérieures appliquées au corps. La masse du corps sert ainsi de mesure de son inertie lors du mouvement de translation.

Les équations de la loi fondamentale de la dynamique du mouvement de translation du système en projections sur les axes d'un système cartésien rectangulaire immobile sont de la forme:

$$\frac{dK_x}{dt} = F_x, \quad \frac{dK_y}{dt} = F_y, \quad \frac{dK_z}{dt} = F_z$$

ou bien

$$mw_{cx} = F_x, \quad mw_{cy} = F_y, \quad mw_{cz} = F_z.$$

2° Cas les plus simples de translation du solide.

a) Mouvement inertiel ($\mathbf{F} = 0$):

$$m\mathbf{v} = \text{const}, \quad \mathbf{w} = 0.$$

b) Mouvement sous l'action d'une force constante:

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{F} = \text{const}, \quad m\mathbf{v} = \mathbf{F}t + m\mathbf{v}_0,$$

où $m\mathbf{v}_0$, est la quantité de mouvement du corps à l'instant initial $t = 0$.

EXEMPLE. Mouvement d'un corps lancé sous un angle α avec l'horizon. Le corps se meut sous l'action de la force constante de pesanteur $\mathbf{P}$ dirigée verticalement vers le bas (fig. I.2.4). Pour un point arbitraire $M(x, y)$ de la trajectoire du corps, on a:

$$m\mathbf{v} = \mathbf{P}t + m\mathbf{v}_0 \quad \text{ou} \quad \mathbf{v} = \mathbf{g}t + \mathbf{v}_0,$$

$$v_x = v_0 \cos\alpha, \qquad v_y = v_0 \sin\alpha - gt,$$

$$x = v_0 t \cos\alpha, \qquad y = v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}.$$

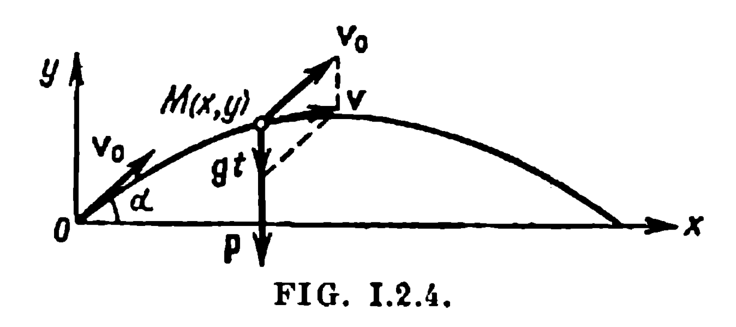


FIG. I.2.4.

L'équation de la trajectoire est:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}.$$

Hauteur maximum atteinte:

$$y_{\max} = \frac{(v_0 \sin \alpha)^2}{2g}.$$

Portée maximum le long de l'axe horizontal des x:

$$x_{\max} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

c) Mouvement sous l'action d'une force variable. La variation de quantité de mouvement du corps dans l'intervalle de temps $t_2 - t_1$ est:

$$m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1 = \mathbf{F}_m(t_2 - t_1),$$

où $\mathbf{F}_m = \frac{\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt}{t_2 - t_1}$ est la valeur moyenne du vecteur force dans l'intervalle de temps $t_1 - t_2$.

7. Loi de la conservation de la quantité de mouvement

1° La quantité de mouvement d'un système fermé ne varie pas au cours du temps:

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = 0, \quad \text{ou} \quad \mathbf{K} = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{v}_i = \text{const.}$$

C'est l'une des lois fondamentales de la nature découlant de l'homogénéité de l'espace (p. 113). Elle s'écrit en projections sur les axes d'un système cartésien rectangulaire immobile sous la forme d'un système de trois équations:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i\dot{x}_i &= 0, \\ \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i\dot{y}_i &= 0, \\ \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i\dot{z}_i &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ ou } \left\{\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} m_i\dot{x}_i &= a_1, \\ \sum_{i=1}^{n} m_i\dot{y}_i &= a_2, \\ \sum_{i=1}^{n} m_i\dot{z}_i &= a_3, \end{aligned}\right.$$

où $\dot{x}_i$, $\dot{y}_i$, $\dot{z}_i$ sont les projections sur les axes Ox, Oy, et Oz du vecteur $\mathbf{v}_i$ du i-ième point du système, et a_1, a_2, a_3 les grandeurs constantes égales aux projections sur les axes de coordonnées du vecteur $\mathbf{K}$ quantité de mouvement du système.

2° La loi de la conservation de la quantité de mouvement montre que l'interaction des corps composant un système fermé ne conduit qu'à un échange des quantités de mouvement entre ces corps, mais ne peut changer le mouvement du système en entier: pour toute interaction entre les corps constituant un système fermé, la vitesse de mouvement du centre d'inertie de ce système ne varie pas, autrement dit

$$\frac{d\mathbf{v}_c}{dt} = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{d^2x_c}{dt^2} = \frac{d^2y_c}{dt^2} = \frac{d^2z_c}{dt^2} = 0,$$

où $\mathbf{v}_c$ est la vitesse du centre d'inertie et x_c, y_c, z_c, ses coordonnées cartésiennes.

Si le système des corps n'est pas fermé et que la projection de la résultante générale $\mathbf{F}$ de toutes les forces extérieures sur un axe quelconque soit nulle, la projection sur cet axe du vecteur quantité de mouvement du système ne dépend pas du temps. Par exemple, si $F_x = 0$, on a:

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i\dot{x}_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} m_i\dot{x}_i = \text{const.}$$

8. Mouvement d'un corps de masse variable

1° L'équation différentielle du mouvement de translation d'un solide parfait de masse m dépendant du temps est:

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{F} + \mathbf{v}_1 \frac{dm}{dt},$$

où $\mathbf{F}$ est la résultante générale de toutes les forces agissant sur le corps et $\mathbf{v}_1$ la vitesse de la masse à adhérer avant qu'elle ne s'ajoute $\left(\text{si } \frac{dm}{dt} > 0\right)$ ou la vitesse de la masse à rejeter après qu'elle s'est détachée $\left(\text{si } \frac{dm}{dt} < 0\right)$.

2° L'accélération $\mathbf{w}$ du corps de masse variable est:

$$\mathbf{w} = \frac{1}{m}(\mathbf{F} + \mathbf{F}_r),$$

où

$$\mathbf{F}_r = (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}) \frac{dm}{dt} = \mathbf{u} \frac{dm}{dt}$$

est la *force de réaction* égale au produit de la dérivée par rapport au temps de la masse du corps par la vitesse relative $\mathbf{u} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}$ de la masse à adhérer ou à rejeter.

EXEMPLE 1. Force de réaction engendrée par un moteur à réaction. Cette force $\mathbf{F}_r$ est la somme vectorielle de deux forces de réaction engendrées simultanément par l'air pénétrant dans le moteur $\mathbf{F}_{r1}$ et par les produits de combustion éjectés $\mathbf{F}_{r2}$:

$$\mathbf{F}_r = \mathbf{F}_{r1} + \mathbf{F}_{r2},$$

$$\mathbf{F}_{r1} = \mathbf{u}_1 \frac{dm_1}{dt}, \qquad \mathbf{F}_{r2} = -\mathbf{u}_2\left(\frac{dm_1}{dt} + \frac{dm_2}{dt}\right),$$

$$\mathbf{F}_r = (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)\frac{dm_1}{dt} - \mathbf{u}_2 \frac{dm_2}{dt},$$

où $\mathbf{u}_1 = -\mathbf{v}$ est la vitesse relative de l'air, $\mathbf{v}$ la vitesse du vol, $\mathbf{u}_2$ la vitesse relative des produits de combustion à la sortie du moteur, $\frac{dm_1}{dt}$ la dépense instantanée de la masse d'air, $\frac{dm_2}{dt}$ la dépense instantanée de la masse de carburant.

EXEMPLE 2. Mouvement d'une fusée en l'absence d'influence d'une force extérieure. La *force de poussée* d'une fusée est tirée de la

formule précédente en supposant que $\mathbf{u}_1 = 0$ (l'oxydant, de même que le carburant, se trouve dans la fusée):

$$\mathbf{F}_r = \mathbf{u}_2 \frac{dm}{dt},$$

où $\frac{dm}{dt}$ est la vitesse de décroissance de la masse de la fusée due à la combustion du carburant. L'équation du mouvement de la fusée est:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{u}_2 \frac{dm}{dt},$$

où $\mathbf{v}$ et m sont la vitesse et la masse de la fusée à un instant arbitraire t. Les vecteurs $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ et $\mathbf{u}_2$ sont de sens contraire, c'est pourquoi

$$m \frac{dv}{dt} = -u_2 \frac{dm}{dt},$$

d'où il découle pour $u_2 = \text{const}$ l'*équation de Tsiolkovski*:

$$v = v_0 + u_2 \ln \frac{m_0}{m},$$

où v_0 et m_0 sont les valeurs initiales de la vitesse et de la masse de la fusée (pour $t = 0$).

9. Principe mécanique de relativité

1° Dans deux systèmes de référence galiléens arbitraires les coordonnées et le temps sont liés par la *transformation de Galilée*:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - (\mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_e t) \quad (\mathbf{v}_e = \text{const}),$$
$$t' = t,$$

où $\mathbf{r}$ et $\mathbf{r}'$ sont les rayons vecteurs du point en mouvement dans le premier et le second référentiel, $\mathbf{v}_e$ la vitesse du mouvement rectiligne uniforme du second référentiel par rapport au premier et $\mathbf{r}_0$ le rayon vecteur mené de l'origine du premier référentiel à l'origine du second à l'instant $t = 0$. La seconde condition ($t' = t$) exprime le caractère *absolu* du temps en mécanique classique, c'est-à-dire le fait que le temps s'écoule de façon identique dans tous les référentiels galiléens (p. 37).

2° Les vitesses et les accélérations d'un point matériel dans les deux référentiels sont liées par les relations:

$$\mathbf{v}' = \frac{d\mathbf{r}'}{dt'} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} - \mathbf{v}_e = \mathbf{v} - \mathbf{v}_e,$$

$$\mathbf{w}' = \frac{d\mathbf{v}'}{dt'} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{w}.$$

L'accélération d'un point matériel quelconque est identique dans tous les référentiels galiléens.

Dans le cas le plus général, les forces agissant sur un point matériel de la part d'autres corps ou des champs qu'ils engendrent, dépendent des distances entre le point et ces corps, des différences entre les vitesses du point et des corps, ainsi que du temps. Il découle des formules de transformation de Galilée que toutes ces grandeurs sont identiques dans tous les référentiels galiléens:

$$\mathbf{r}_2' - \mathbf{r}_1' = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_2' - \mathbf{v}_1' = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1.$$

C'est pourquoi les forces agissant sur un point matériel mobile sont aussi identiques:

$$\mathbf{F}' = \mathbf{F}.$$

Par conséquent,

$$\frac{F'}{w'} = \frac{F}{w} = m,$$

c'est-à-dire que les équations du mouvement du point matériel et des systèmes de ces points sont identiques dans tous les repères galiléens, et elles sont *invariantes* par rapport à la transformation de Galilée.

3° On peut formuler ce résultat sous forme du *principe mécanique de relativité*: le mouvement uniforme et rectiligne (par rapport à un repère galiléen) d'un système fermé n'influe pas sur le cours des processus mécaniques qui se produisent dans ce système.

En d'autres termes, en mécanique tous les référentiels galiléens sont équivalents. Dans le cadre de la mécanique classique il n'y a donc aucune raison d'isoler un certain système de référence «principal» par rapport auquel les états de repos et de mouvement des corps pourraient être considérés absolus.

La généralisation ultérieure du principe de relativité sera réalisée en théorie de la relativité (p. 544).

10. Loi de l'attraction universelle

1° Entre tout couple de points matériels agissent les forces d'attraction mutuelle qui sont proportionnelles à la masse de ces points et inversement proportionnelles au carré de leur distance (fig. I.2.5):

$$\mathbf{F}_{12} = f\frac{m_1 m_2}{R^2}\frac{\mathbf{R}_{12}}{R},$$

où $\mathbf{F}_{12}$ est la force de gravitation agissant sur un point de masse m_1, $\mathbf{R}_{12}$ le rayon vecteur mené de ce point à un point de masse m_2, $R = |\mathbf{R}_{12}|$ la distance entre ces points. Le coefficient f est appelé *constante de la gravitation (constante de l'attraction universelle)*. Il est numériquement égal à la force d'attraction mutuelle entre deux points matériels qui possèdent des masses identiques égales à l'unité de masse et se trouvent l'un de l'autre à une distance égale à l'unité de longueur. La constante de la gravitation est déterminée expérimentalement. Sa valeur numérique ne dépend que du choix du système d'unités de mesure:

FIG. I.2.5.

$$f = (6{,}67 \pm 0{,}01)\cdot 10^{-11}\frac{\mathrm{N\cdot m^2}}{\mathrm{kg^2}} = (6{,}67 \pm 0{,}01)\,10^{-8}\frac{\mathrm{dyn\cdot cm^2}}{\mathrm{g^2}}.$$

En vertu de la troisième loi de Newton, la force $\mathbf{F}_{21}$ agissant sur un point matériel de masse m_2 est numériquement égale à la force $\mathbf{F}_{12}$, mais orientée dans le sens opposé:

$$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12} = -f\frac{m_1 m_2}{R^2}\frac{\mathbf{R}_{12}}{R} = f\frac{m_1 m_2}{R^2}\frac{\mathbf{R}_{21}}{R}.$$

2° On peut considérer les éléments suffisamment petits de deux corps de forme et de dimensions arbitraires comme des points matériels dont les masses sont égales au produit de leurs volumes (dV_1 et dV_2) par leurs densités (ρ_1 et ρ_2). C'est pourquoi la force de gravitation $d\mathbf{F}_{12}$ agissant sur l'élément du premier corps de la part de l'élément du second corps est:

$$d\mathbf{F}_{12} = f\frac{\rho_1\rho_2}{r_{12}^2}\frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}}dV_1 dV_2.$$

La force résultante $\mathbf{F}_{12}$ d'attraction du premier corps par le second est:

$$\mathbf{F}_{12} = f\int_{V_1}\rho_1 dV_1\int_{V_2}\frac{\rho_2}{r_{12}^3}\mathbf{r}_{12}dV_2,$$

où l'intégration est étendue aux volumes tout entiers V_1 et V_2 des deux corps. Dans le cas de corps homogènes, leurs densités sont constantes, de sorte que

$$\mathbf{F}_{12} = f\rho_1\rho_2 \int_{V_1} dV_1 \int_{V_2} \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3} dV_2.$$

Pour deux solides de forme sphérique dont la densité ne dépend que de la distance à leur centre

$$\mathbf{F}_{12} = f\frac{m_1 m_2}{R^3} \mathbf{R}_{12},$$

où m_1 et m_2 sont les masses de ces corps, $\mathbf{R}_{12}$ le rayon vecteur qui lie les centres du premier et du second corps et $R = |\mathbf{R}_{12}|$.

Cette formule est valable également dans le cas où l'un des corps est de forme arbitraire, mais ses dimensions sont beaucoup plus petites que le rayon du deuxième corps.

3° On appelle *force de pesanteur* d'un point matériel la force $\mathbf{P}$ égale à la différence vectorielle entre la force $\mathbf{F}$ d'attraction de ce point matériel sur la Terre et la force centripète $\mathbf{F}_c$ conditionnant la participation du point matériel à la rotation diurne de la Terre (fig. I.2.6):

$$\mathbf{P} = \mathbf{F} - \mathbf{F}_c$$

et dans ce cas

$$F_c = m\omega^2 R \cos\varphi,$$

où m est la masse du point, ω la vitesse angulaire de la rotation diurne de la Terre, R le rayon terrestre et φ la latitude géographique du lieu d'observation A.

La force de pesanteur est maximum aux pôles et minimum à l'équateur. Cependant, cette différence ne dépasse pas 0,55%. La *force de pesanteur d'un corps* est la somme géométrique des forces de pesanteur de tous les points matériels appartenant à ce corps. On appelle *centre de gravité* du corps le point d'application de cette force. Le centre de gravité du corps coïncide avec son centre d'inertie (p. 42).

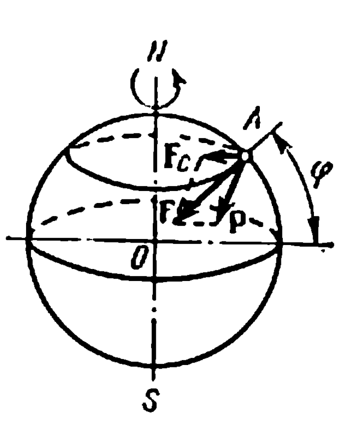


FIG. I.2.6.

4° On appelle *chute libre* le mouvement du corps qui a lieu uniquement sous l'action de sa force de pesanteur. L'*accélération de la chute libre (accélération de la pesanteur)* est $\mathbf{g} = \mathbf{P}/m$.

Elle est la même pour tous les corps et dépend de la latitude et de l'altitude. Il est possible de calculer les valeurs numériques de l'accélération de la chute libre g (en cm/s²) à de faibles altitudes h (en m) à l'aide de la formule approximative

$$g = 978{,}049\,(1 + 0{,}0052884 \sin^2 \varphi - 0{,}0000059 \sin^2 2\varphi) - \\ - 0{,}0003086\, h - 0{,}011.$$

La *valeur normale* de g, adoptée pour les calculs barométriques et dans la construction des systèmes d'unités, est égale à 980,665 cm/s².

Dans la plupart des calculs techniques on néglige la dépendance entre g et φ et l'on suppose que $g = 981$ cm/s². Pour déterminer la variation de g, à mesure qu'on s'éloigne de la surface de la Terre, on utilise la formule approximative

$$g = f\frac{M}{(R_0 + h)^2} = g_0\left(\frac{R_0}{R_0 + h}\right)^2,$$

où M est la masse terrestre, $R_0 = 6\,370$ km le rayon moyen de la Terre et $g_0 = 981$ cm/s².

5° On appelle *poids* d'un corps la force avec laquelle agit ce corps, par suite de l'attraction terrestre, sur son appui (ou sur sa suspension) retenant ce corps de tomber librement. Si le corps et le point d'appui sont immobiles par rapport à la Terre, le poids du corps est égal à sa force de pesanteur.

On appelle *poids volumique (spécifique)* d'un corps la grandeur physique γ, égale à la limite du quotient de la valeur numérique ΔP de la force de pesanteur de l'élément du corps par son volume ΔV lors de la diminution illimitée de ΔV:

$$\gamma = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta V} = \frac{dP}{dV}.$$

La force de pesanteur de tout le corps est numériquement égale à

$$P = \int_{(V)} \gamma\, dV,$$

où l'intégration est étendue au volume total V du corps.

On appelle *poids volumique moyen* γ_m d'un corps non homogène le rapport de la valeur numérique de la force de pesanteur du corps à son volume:

$$\gamma_m = \frac{P}{V}.$$

La relation entre le poids volumique et la densité du corps est de la forme:

$$\gamma = \rho g, \quad \gamma_m = \rho_m g.$$

11. Champ de gravitation

1° L'attraction mutuelle des corps est due au *champ de gravitation*, qui, de même que les autres champs physiques et la substance, est l'une des formes de la matière. La particularité caractéristique du champ de gravitation est que sur chaque point matériel placé dans ce champ agit une force d'attraction proportionnelle à la masse de ce point. La caractéristique vectorielle du champ de gravitation est son *intensité* **g**, qui est le quotient de la force d'attraction **F**, agissant sur le point matériel, par sa masse m : $\mathbf{g} = \mathbf{F}/m$.

2° Le caractère *potentiel* des forces d'attraction (p. 66) permet d'introduire une caractéristique scalaire du champ de gravitation: le *potentiel* φ, qui est lié à **g** par la relation

$$\mathbf{g} = -\operatorname{grad} \varphi = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\mathbf{k}\right).$$

Entre les champs de gravitation et les champs électrostatiques (p. 358) existe une analogie formelle qui découle de la ressemblance des expressions de la force d'attraction mutuelle de deux points matériels (p. 52) et de la force d'interaction électrostatique de deux charges ponctuelles (p. 357). Aussi peut-on utiliser pour trouver l'intensité et le potentiel du champ de gravitation, créé par un système arbitraire de points matériels de masses respectives $m_1, m_2, \ldots, m_k$, les expressions d'intensité et de potentiel du champ électrostatique d'un système géométriquement identique de charges ponctuelles $q_1, q_2, \ldots, q_k$ en remplaçant dans ces expressions, écrites en unités SI, les grandeurs $q_i/4\pi\varepsilon_0\varepsilon$ par $-fm_i$, où f est la constante de la gravitation. Ainsi, pour un champ de gravitation créé par un point matériel de masse M, qui se trouve à l'origine des coordonnées,

$$\mathbf{g} = -f\frac{M}{r^3}\mathbf{r} \quad \text{et} \quad \varphi = -f\frac{M}{r} + C$$

où **r** est le rayon vecteur d'un point du champ et C une constante arbitraire d'intégration.

Ces expressions sont valables également pour le champ de gravitation d'une sphère de masse M, dont la densité ne varie

que dans la direction radiale et le rayon de la surface de laquelle est inférieur à r.

Dans le cas général, le potentiel φ du champ de gravitation, créé par des masses distribuées arbitrairement dans l'espace, satisfait à l'*équation différentielle de Poisson:*

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=-4\pi f\rho \quad \text{ou} \quad \Delta\varphi=-4\pi f\rho,$$

où $\rho = dm/dV$ est la densité volumique de la distribution de la masse et $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ l'opérateur de Laplace.

La solution générale de cette équation est de la forme:

$$\varphi=-f\int\limits_{(V)}\frac{\rho dV}{r},$$

où r est la distance de l'élément de volume dV de masse $dm = \rho dV$ jusqu'au point considéré du champ, et l'intégration est étendue au volume total V, occupé par les masses qui créent le champ.

3° On appelle *apesanteur* l'état d'un système mécanique dans lequel le champ de gravitation extérieur agissant sur le système ne provoque pas de pression réciproque des parties du système l'une sur l'autre. A l'état d'apesanteur le corps suspendu à un ressort n'engendre aucune déformation du ressort, et le corps reposant immobile sur un appui n'exerce aucune action sur celui-ci.

L'état d'apesanteur surgit dans tout système où sont observées les conditions suivantes: a) à part les forces du champ de gravitation, sur le système n'agit aucune autre force extérieure; b) les dimensions du système ne sont pas trop grandes, de sorte qu'à chaque instant le champ de gravitation est le même en tous les points du système; c) le système effectue un mouvement de translation. Ces conditions sont réalisées, par exemple, dans un ascenseur en chute libre, dans les satellites artificiels de la Terre et les vaisseaux cosmiques en vol libre, c'est-à-dire se mouvant tout en ayant leurs moteurs débroyés.

4° La loi de l'attraction universelle de Newton et la théorie qui lui correspond, appelée *théorie non relativiste du champ de gravitation*, sont approximatives. Cette théorie décrit de façon suffisamment exacte le mouvement du corps dans le champ de gravitation seulement dans les cas où le champ est relativement faible, autrement dit son potentiel $|\varphi| \ll c^2$, où c est la vitesse de la lumière dans le vide, et la vitesse du corps $v \ll c$.

La théorie de la gravitation moderne, fondée sur la théorie de la relativité, a été formulée par A. Einstein *(relativité générale)*. Elle représente une théorie unifiée d'espace, de temps et d'attraction. Conformément à cette théorie, les propriétés géométriques (métrique) de l'espace-temps à quatre dimensions (p. 545) ne sont pas invariables, elles dépendent de la distribution des masses attractives dans l'espace et de leurs mouvements. Les masses, qui créent le champ d'attraction, «déforment» l'espace à trois dimensions réel et modifient de différentes façons la marche du temps en différents points de cet espace, c'est-à-dire engendrent une déviation de la métrique de l'espace-temps par rapport à la métrique de l'espace-temps «plan» décrite dans la géométrie d'Euclide et considérée en relativité restreinte (p. 544). De ce fait l'intervalle élémentaire ds entre deux points d'univers dans le champ de gravitation est de la forme:

$$ds^2 = \sum_{i,k=0}^{3} g_{ik}\, dx^i dx^k = g_{00}(dx^0)^2 + g_{01} dx^0 dx^1 + \ldots + g_{33}(dx^3)^2,$$

où $x^0 = ct$ est la coordonnée temporaire, x^1 x^2, et x^3 les coordonnées spatiales et $g_{ik} = g_{ki}$. Par aucune transformation il n'est possible de réduire cette expression dans tout l'espace-temps à la forme: $ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ caractérisant l'espace-temps «plan» (d'Euclide). Une telle réduction n'est possible que pour un voisinage infiniment petit d'un point d'univers quelconque.

La *ligne d'univers* (p. 545) correspondant au mouvement d'un point matériel libre dans le champ de gravitation représente elle-même une géodésique dans l'espace-temps à quatre dimensions, c'est-à-dire une ligne le long de laquelle l'intégrale $\int ds$ entre deux points d'univers quelconques a une valeur extrémale. Par suite de la «courbure» de l'espace-temps les géodésiques ne sont pas rectilignes. Dans l'espace réel à trois dimensions le mouvement d'un point matériel soumis à l'action du champ de gravitation n'est donc pas rectiligne et uniforme.

En théorie d'Einstein, le calcul du champ de gravitation revient à la découverte des dépendances de g_{ik} des coordonnées spatiales et du temps pour un système donné de corps créant le champ. Le système d'équations du champ de gravitation est non linéaire par rapport à g_{ik}. C'est pourquoi le principe de superposition n'a pas lieu pour les champs de gravitation. Il n'est approximativement juste que pour des champs de gravitation assez faibles, pour lesquels la théorie non relativiste est valable.

12. Frottement externe

1° On distingue deux types principaux de frottement: interne et externe. On appelle *frottement interne* ou *viscosité* l'apparition de forces tangentielles entravant le déplacement des portions de fluide les unes par rapport aux autres (p. 220). On appelle *frottement externe* l'interaction entre les corps en contact qui empêche leur déplacement relatif. Suivant le caractère du mouvement relatif des corps on distingue: le *frottement de glissement* surgissant quand un corps se déplace par translation sur la surface d'un autre corps, et le *frottement de roulement* apparaissant quand un corps roule sur la surface d'un autre corps. Le roulement pur a lieu seulement dans le cas où la ligne ou bien le point de contact des corps frottants coïncide avec l'axe instantané de rotation du corps qui roule. Dans tous les autres cas le frottement de roulement est accompagné du frottement de glissement.

2° Le *frottement cinématique* est un frottement externe qui a lieu entre des corps mobiles. On appelle *frottement statique* le frottement externe entre des corps réciproquement immobiles. Il se manifeste en ce que pour donner naissance à un déplacement relatif de deux corps en contact, il faut appliquer à l'un d'eux la force extérieure $\mathbf{F} > \mathbf{F}_0$, où $\mathbf{F}_0$ est la *force limite de frottement statique*. On appelle *phénomène de stagnation* l'absence de déplacement réciproque quand $\mathbf{F} \leqslant \mathbf{F}_0$. Ce phénomène est largement utilisé en technique pour la transmission des efforts de certains détails de machines à d'autres (transmission par courroies, manchons à friction, etc.).

On appelle *frottement à sec* le frottement de glissement entre les corps dont la surface n'est pas lubrifiée et *frottement mouillé* le frottement entre les corps lubrifiés copieusement et continuellement.

Selon l'épaisseur de la couche de lubrifiant posé entre les surfaces des corps en frottement et le degré de rugosité de ces dernières, on distingue quelques cas transitoires de frottement de glissement: semi-sec, limite, semi-mouillé.

3° Dans le cas de frottement à sec la force de glissement est principalement engendrée par le grippement mécanique dû aux inégalités des surfaces des corps et par les phénomènes d'adhérence des molécules des deux corps aux endroits de contact immédiat. Dans les calculs approchés, on peut admettre que la force de glissement **F** est proportionnelle à la pression normale entre les surfaces des corps frottants *(loi d'Amontons)*

$$F = fN,$$

où f est le coefficient de frottement (de glissement) sans dimension, qui dépend des propriétés du matériau dont le corps est fait. En réalité, le coefficient de frottement dépend d'un grand nombre d'autres facteurs: de la qualité du traitement des surfaces des corps en frottement, de la présence d'impuretés sur ces surfaces, de la vitesse de glissement, etc. Aussi le détermine-t-on en se fondant sur les données expérimentales, obtenues pour les cas analogues à celui du problème en question. Habituellement, le coefficient f_0 correspondant à la force limite de frottement statique est plus grand que le coefficient de frottement cinématique.

On utilise souvent, au lieu du coefficient de frottement, l'*angle de frottement* φ, lié à f par la relation $\operatorname{tg} \varphi = f$. L'angle $\varphi_0 = \operatorname{arc\,tg} f_0$ est égal au plus petit angle d'inclinaison du plan par rapport à l'horizon, pour lequel le corps reposant sur ce plan commence à glisser vers le bas sous l'action de la pesanteur.

Plus juste est la loi du frottement à deux termes établie à partir du calcul de l'action des forces attractives entre les molécules de corps frottants:

$$F = \mu(N + Sp_0),$$

où μ est le *coefficient de frottement authentique*, p_0 la pression supplémentaire due aux forces d'attraction moléculaire et S la surface de contact immédiat entre les corps.

4° Des corps en forme de cylindres circulaires ou de sphères roulant sur un plan produisent des déformations non seulement élastiques, mais aussi plastiques (p. 293). La ligne d'action de la réaction **R** du plan ne coïncide alors pas avec la ligne d'action de la force **N** de pression normale (fig. I.2.7). La composante normale au plan $\mathbf{R}_n$ de la force **R** est numériquement égale à N, et la composante horizontale **F** représente la force de frottement (de glissement). En première approximation on peut admettre que

$$F = k\frac{N}{r} \quad \textit{(loi de Coulomb)},$$

où r est le rayon du corps en roulement et k le coefficient de frottement (de glissement) ayant une dimension de longueur et dépendant du matériau dont les corps sont faits, de l'état de leurs surfaces et de toute une série d'autres facteurs.

Le couple de forces $\mathbf{R}_n$ et **N**, appliquées au corps en roulement, crée le *moment de frottement* M égal à

$$M = Fr = kN.$$

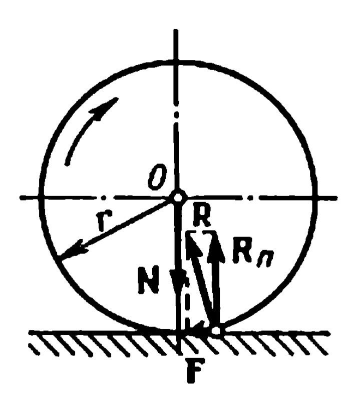


FIG. I.2.7.

13. Mouvement dans les référentiels non galiléens

1° L'accélération relative $\mathbf{w}_r$ du point est égale à la différence entre son accélération absolue $\mathbf{w}_a$ et la somme des accélérations d'entraînement $\mathbf{w}_e$ et de Coriolis $\mathbf{w}_C$ (p. 33):

$$\mathbf{w}_r = \mathbf{w}_a - (\mathbf{w}_e + \mathbf{w}_C).$$

C'est pourquoi dans un référentiel arbitraire l'équation du mouvement relatif d'un point matériel de masse m est de la forme:

$$m\mathbf{w}_r = m\mathbf{w}_a - (m\mathbf{w}_e + m\mathbf{w}_C).$$

Choisissant comme référentiel absolu un système galiléen quelconque et prenant en considération que pour ce dernier la deuxième loi de Newton ($m\mathbf{w}_a = \mathbf{F}$) est valable, on obtient:

$$m\mathbf{w}_r = \mathbf{F} + \mathbf{I}_e + \mathbf{I}_C,$$

où $\mathbf{F}$ est la résultante de toutes les forces agissant sur le point matériel de la part d'autres corps, $\mathbf{I}_e = -m\mathbf{w}_e$ et $\mathbf{I}_C = -m\mathbf{w}_C$ les *forces d'inertie d'entraînement* et *de Coriolis*.

2° L'équation du mouvement relatif d'un point matériel dans un système non galiléen arbitraire est formellement la même que l'équation de ce point dans un système galiléen ($m\mathbf{w} = \mathbf{F}$). La seule différence est qu'il faut introduire dans le second membre de l'équation deux forces d'inertie complémentaires. La différence de principe, existant entre les forces d'inertie et les forces d'interaction habituelles, est que les premières ne proviennent d'aucun corps concret agissant sur le point matériel. Il ne faut pas confondre les forces d'inertie indiquées ci-dessus avec la force d'inertie de d'Alembert $\mathbf{I}_\partial = -m\mathbf{w}$, où $\mathbf{w}$ est l'accélération du point matériel rapporté au référentiel galiléen. L'introduction de cette force d'inertie est tout à fait formelle: elle permet de donner à l'équation de la dynamique du point dans le référentiel galiléen la forme d'une équation de la statique: $\mathbf{F} + \mathbf{I}_\partial = 0$, où $\mathbf{F}$ est la résultante générale. Alors que les forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis agissent réellement sur un point dans le référentiel non galiléen et peuvent être mesurées à l'aide de méthodes ordinaires (avec un dynamomètre à ressort par exemple), la force d'inertie de d'Alembert n'exerce aucune action sur ce point et de ce fait, elle ne peut pas être mesurée.

3° Les forces d'inertie sont proportionnelles aux masses des points matériels et, toutes autres conditions étant égales, communiquent à ces points des accélérations relatives identiques. Les forces d'attraction aussi ont la même propriété: en un même point

du champ de gravitation ces forces, à l'image des forces d'inertie, sont proportionnelles aux masses des points matériels et leur communiquent des accélérations identiques, égales à la valeur du champ. Par conséquent, le mouvement libre d'un corps rapporté à un référentiel non galiléen est équivalent au mouvement de ce corps relativement à un référentiel galiléen sous l'action d'un certain champ de gravitation complémentaire («équivalent»). On appelle cette affirmation *principe d'équivalence*. Par exemple, un champ de gravitation uniforme constant $\mathbf{g} = -\mathbf{w}_0$ est équivalent aux forces d'inertie prenant naissance dans un système de référence soumis à un mouvement de translation avec une accélération constante ($\mathbf{w}_e = \mathbf{w}_0 = \text{const}$).

Le principe d'équivalence ne signifie pas du tout l'identité des forces d'inertie et des forces d'attraction «réelles». En effet, les champs de gravitation créés par des corps tendent vers zéro à mesure qu'on s'éloigne de ces corps. Cependant, le champ de gravitation «équivalent» aux forces d'inertie ne satisfait pas à cette condition. Ainsi, dans l'exemple considéré ci-dessus il est le même en tous les points de l'espace, tandis que dans le cas d'un système de référence rotatif le champ de gravitation «équivalent» aux forces d'inertie centrifuges croît d'une façon illimitée à mesure qu'on s'éloigne de l'axe de rotation du système. On peut éliminer entièrement le champ «équivalent» par choix approprié du référentiel: dans les systèmes de référence galiléens les forces d'inertie font défaut et, par conséquent, le champ de gravitation «équivalent» aussi. Les champs de gravitation «authentiques» existent également dans les systèmes de référence galiléens. C'est pourquoi il est impossible d'éliminer totalement ces champs de tout l'espace par modification du choix du référentiel et par introduction d'un champ correspondant de forces d'inertie. Une telle substitution ne peut être réalisée que localement, c'est-à-dire pour un domaine du champ d'attraction tellement petit que dans les limites de celui-ci on peut admettre ce champ uniforme et pour un intervalle de temps tellement petit qu'au cours de celui-ci on peut admettre le champ constant. Donc, le champ de gravitation «authentique» est équivalent à un champ de forces d'inertie, surgissant lors d'un mouvement accéléré dans un domaine limité de l'espace et pour un intervalle de temps limité *(principe d'équivalence locale)*.

CHAPITRE 3

Travail et énergie mécanique

1. Energie

1° On appelle *énergie* la mesure unifiée des différentes formes de mouvement. L'énergie est une grandeur scalaire. Afin de donner une caractéristique quantitative des formes de mouvement qualitativement différentes considérées en physique, on introduit les formes d'énergie qui leur correspondent: *mécanique* (p. 67), *interne* (p. 161), *électromagnetique* (p. 486), *nucléaire* (p. 834), etc.

2° *Loi de la conservation et de la transformation de l'énergie:* quels que soient les processus se déroulant dans un système isolé, son énergie totale ne change pas.

Cette loi découle de l'homogénéité du temps (p. 112) et est l'une des lois les plus importantes de la nature. Elle énonce que le mouvement de la matière ne peut être créé et ne peut être annulé: il peut seulement passer d'une forme à une autre.

3° Si le système est non isolé, la variation de son énergie causée par des influences extérieures est numériquement égale et de signe opposé à la somme algébrique des variations de l'énergie de tous les champs et corps extérieurs se trouvant en interaction avec ce système.

4° Il y a deux procédés, qualitativement différents, de transmission du mouvement et de l'énergie correspondante d'un corps macroscopique à un autre: *sous forme de travail* et *sous forme de chaleur* (par *échange de chaleur*)[1].

---

[1]) Lors de l'interaction de différentes microparticules (atomes, électrons, etc.) entre elles, ces concepts sont inapplicables et dans de tels cas on ne parle que de l'accomplissement du travail.

La variation de l'énergie du corps réalisée suivant le premier procédé est appelée *travail* effectué sur ce corps. De façon correspondante la variation de l'énergie du corps s'opérant suivant le second procédé est appelée *quantité de chaleur* communiquée au corps.

La transmission de l'énergie sous forme de travail a lieu lors de l'interaction de forces des corps. Aussi peut-on dire que le travail effectué sur le corps considéré n'est rien d'autre que le travail des forces exercées sur lui par d'autres (extérieurs) corps avec lesquels il se trouve en interaction. Le travail effectué sur le corps peut produire l'accroissement de n'importe quelle forme de l'énergie de ce corps.

La transmission de l'énergie par échange de chaleur entre les corps est conditionnée par la différence des températures de ces corps et peut être réalisée aussi bien lors du contact immédiat des corps (voir conductibilité thermique, pp. 219 et 283, et échange convectif, p. 341) que par émission et absorption du rayonnement électromagnétique (échange de chaleur par radiation). L'énergie reçue par le corps sous forme de chaleur peut produire l'accroissement de son énergie interne (p. 161).

2. Travail

1° Le travail élémentaire δA de la force **F** effectué lors du déplacement $d\mathbf{r}$ d'un point matériel sous l'action de la force **F**, est égal au produit scalaire des vecteurs **F** et $d\mathbf{r}$:

$$\delta A = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = F\,ds\,\cos\alpha = F_\tau\,ds$$

ou en coordonnées cartésiennes:

$$\delta A = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz,$$

où **r** est le rayon vecteur du point, x, y et z ses coordonnées, F_x, F_y et F_z les projections du vecteur force sur les axes de coordonnées, α l'angle entre les vecteurs **F** et $d\mathbf{r}$, $ds = |(d\mathbf{r})|$ la longueur élémentaire du chemin parcouru par le point le long de sa trajectoire, $F_\tau = F\cos\alpha$ la projection de la force **F** sur la tangente à la trajectoire.

Le travail élémentaire est désigné par δA et non dA, parce que, dans le cas général, il ne représente pas une différentielle totale, autrement dit, l'intégrale curviligne de δA le long d'une trajectoire fermée arbitraire du point d'application de la force n'est pas nulle, alors que cette intégrale de la différentielle totale doit être identiquement nulle. Le travail des forces de frottement, par

exemple, suivant une trajectoire fermée du corps peut ne pas être nul.

2° Si un point matériel (ou un solide parfait) est sollicité par un système de forces $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, ..., $\mathbf{F}_h$, le travail élémentaire δA accompli alors est la somme algébrique des travaux élémentaires de toutes les forces du système:

$$\delta A = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i,$$

où $d\mathbf{r}_i$ est le déplacement élémentaire du point d'application de la force $\mathbf{F}_i$.

Dans le cas d'un mouvement de translation d'un solide parfait tous les vecteurs $d\mathbf{r}_i$ sont identiques et égaux à $d\mathbf{r}$. C'est pourquoi le travail élémentaire δA est égal au travail accompli par la résultante générale $\mathbf{F}$ du système de forces $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, ..., $\mathbf{F}_k$ (p. 40)

$$\delta A = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

3° Dans le cas d'un mouvement de rotation d'un solide parfait le travail élémentaire δA est égal au produit du moment résultant M par rapport à l'axe de rotation de toutes les forces agissant sur le corps (p. 75) par l'angle élémentaire $d\varphi$ de rotation du corps autour de cet axe: $\delta A = M d\varphi$.

4° Le travail A de la force $\mathbf{F}$ sur une portion finie s de trajectoire du déplacement de son point d'application est la somme algébrique des travaux élémentaires de cette force sur toutes les portions infiniment petites de la trajectoire:

$$A = \int_0^s \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^s F_\tau \, ds.$$

Si $F_\tau = \text{const}$, on a: $A = F_\tau s$.

Si un solide parfait est sollicité par un système de forces $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, ..., $\mathbf{F}_k$ lui imprimant un mouvement de translation, on a:

$$A = \sum_{i=1}^{k} \int_0^s \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r} = \int_0^s \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^s F_\tau \, ds,$$

où $\mathbf{F}$ est la résultante générale des forces et F_τ sa projection sur le déplacement élémentaire $d\mathbf{r}$ du corps.

5° Si la dépendance entre F_τ et s est donnée graphiquement (fig. I.3.1), le travail A de la force **F** sur la portion de trajectoire comprise entre les points $B(s_1)$ et $C(s_2)$ est proportionnel à l'aire S, hachurée sur la figure I.3.1:

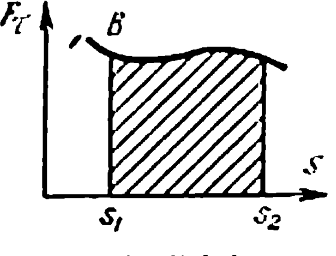


FIG. I.3.1.

$$A = k_1 k_2 S,$$

où k_1 et k_2 sont les échelles de s et F_τ, admises pour la construction du graphique et qui montrent respectivement à combien d'unités de chemin est égale l'unité de longueur de l'axe d'abscisses et à combien d'unités de force est égale l'unité de longueur de l'axe d'ordonnées.

3. Puissance

1° On appelle *puissance* N de la force **F** une grandeur physique caractérisant la rapidité avec laquelle cette force accomplit le travail. Elle est le quotient du travail élémentaire δA par le temps dt pendant lequel ce travail est effectué:

$$N = \frac{\delta A}{dt} = \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}.$$

La puissance de la force est mesurée par le produit scalaire de cette force par la vitesse de déplacement de son point d'application:

$$N = F_\tau v,$$

où F_τ est la projection de la force **F** sur la direction du vecteur **v**. Dans le cas où la force **F** imprime au corps un mouvement de translation, $F_\tau = m\dot{v}$ et $N = mv\dot{v}$.

2° Dans le cas d'un mouvement arbitraire d'un solide parfait la puissance résultante est la somme algébrique des puissances de toutes les forces agissant sur le corps:

$$N = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{F}_i\cdot\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{F}_i\cdot\mathbf{v}_i,$$

où $\mathbf{v}_i$ est la vitesse de mouvement du point d'application de la force $\mathbf{F}_i$.

3° La puissance de la force ou du système de forces imprimant un mouvement de rotation au solide parfait est le produit du moment

résultant de ces forces par rapport à l'axe de rotation par la vitesse angulaire du corps:

$$N = M\omega.$$

4. Fonction de forces

1° Les forces sollicitant un point matériel ou un corps sont appelées *forces potentielles* si le travail de ces forces lors du déplacement de ce point (corps) dépend uniquement de ses positions initiale et finale dans l'espace. Autrement dit, le travail de la force potentielle **F** le long d'une trajectoire fermée arbitraire du mouvement de son point d'application est identiquement nul:

$$\oint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \oint (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \equiv 0.$$

Pour que cette condition soit réalisée, il faut et il suffit que l'expression sous l'intégrale (c'est-à-dire le travail élémentaire de la force **F**) représente la différentielle totale d'une certaine fonction scalaire de coordonnées $U(x, y, z)$, appelée *fonction de forces:*

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = dU.$$

D'où

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z},$$

ou bien

$$\mathbf{F} = \frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{k} = \text{grad } U.$$

La force potentielle **F** est égale au gradient de la fonction de forces U.

EXEMPLE 1. Pour l'interaction gravitationnelle de deux points matériels de masses m_1 et m_2, éloignés l'un de l'autre à la distance R (p. 52),

$$U = f\frac{m_1 m_2}{R}.$$

EXEMPLE 2. Pour l'interaction électrostatique de deux charges ponctuelles q_1 et q_2, éloignées l'une de l'autre à la distance R (p. 357),

$$U = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{q_1 q_2}{R}.$$

2° Dans le cas le plus général, les forces potentielles et la fonction de forces peuvent explicitement dépendre non seulement des

coordonnées, mais aussi du temps $t \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} \neq 0 \text{ et } \frac{\partial U}{\partial t} \neq 0 \right)$. De telles forces sont appelées *forces non stationnaires*. Dans le cas de forces non stationnaires, il faut admettre, quand on calcule l'intégrale $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, que le temps est un paramètre fixe.

Le travail A, effectué par la force potentielle stationnaire **F** lors d'un déplacement fini de son point d'application suivant le chemin entre les points $1(x_1, y_1, z_1)$ et $2(x_2, y_2, z_2)$, est égal à la différence des valeurs de la fonction de forces aux points initial et final:

$$A = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_1^2 dU = U_2 - U_1.$$

Dans le cas d'une force potentielle non stationnaire cette formule n'est valable que pour le processus instantané de translation de son point d'application, puisque dans le cas contraire l'expression sous l'intégrale

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz$$

ne représente pas une différentielle totale de la fonction $U(x, y, z, t)$.

3° Les forces sollicitant un point matériel ou un corps sont appelées *forces non potentielles* si le travail de ces forces dépend de la trajectoire de déplacement du point (corps).

Les forces de frottement cinématique sont un exemple de forces non potentielles. Habituellement elles sont dirigées dans le sens contraire au sens du déplacement élémentaire $d\mathbf{r}$, de sorte que $\oint \mathbf{F}_{\text{fr}} \cdot d\mathbf{r} < 0$.

5. Energie mécanique

1° L'*énergie mécanique* W est l'énergie du mouvement mécanique et de l'interaction mécanique des corps. Elle est la somme des énergies cinétique W_c et potentielle W_p[1]):

$$W = W_c + W_p.$$

2° L'*énergie cinétique* d'un corps est la mesure de son mouvement mécanique. Elle est définie par le travail que doit effectuer

1) En mécanique analytique, il est admis de désigner l'énergie cinétique par T, l'énergie potentielle par U et l'énergie mécanique par E.

ce corps lors de son freinage jusqu'à arrêt complet. L'énergie cinétique d'un point matériel est égale à la moitié du produit de la masse m du point par le carré de la vitesse v de son mouvement:

$$W_c = \frac{mv^2}{2}.$$

Dans le cas d'un mouvement plan donné en coordonnées polaires (ρ, φ),

$$W_c = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2).$$

L'énergie cinétique d'un corps est la somme des énergies cinétiques de tous les points matériels le constituant et s'exprime par l'intégrale suivante:

$$W_c = \frac{1}{2}\int_{(m)} v^2\, dm = \frac{1}{2}\int_{(V)} \rho\, v^2\, dV,$$

où dm est la masse d'un petit élément du corps, dV, ρ et v le volume, la densité et le module de la vitesse de cet élément, m et V la masse et le volume de tout le corps.

Si le corps est animé d'un mouvement de translation avec une vitesse v, on a:

$$W_c = \frac{mv^2}{2}.$$

Si le corps est en rotation autour d'un axe fixe, son énergie cinétique est égale à la moitié du produit du moment d'inertie J du corps par rapport à l'axe de rotation (p. 76) par le carré de la vitesse angulaire ω:

$$W_c = \frac{J\omega^2}{2}.$$

L'énergie cinétique d'un corps en rotation autour d'un point fixe s'exprime par la même formule, où J est le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe instantané de rotation.

Dans le cas le plus général, l'énergie cinétique d'un système matériel est la somme de l'énergie cinétique du système en translation, dont le centre d'inertie se déplace à une vitesse v_c, et de l'énergie cinétique W_c' du système en mouvement relatif par rapport au repère en translation dont l'origine est au centre d'inertie *(théorème de König)*

$$W_c = \sum_{i=1}^{k} \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{mv_c^2}{2} + W_c',$$

où

$$W'_c = \sum_{i=1}^{k} \frac{m_i v_i'^2}{2}, \quad \mathbf{v}'_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_c.$$

En particulier, l'énergie cinétique du corps animé d'un mouvement de translation à une vitesse v et qui tourne simultanément avec une vitesse angulaire ω autour d'un axe passant par le centre d'inertie du corps est

$$W_c = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}.$$

L'exemple d'un tel mouvement est le roulement d'une sphère ou d'un cylindre sur le plan.

3° On appelle *énergie potentielle* la partie de l'énergie mécanique du système qui dépend de la *configuration du système*, c'est-à-dire de la disposition réciproque des particules du système et de leur position dans le champ de forces extérieur. On la mesure par le travail qu'effectuent les forces potentielles (extérieures et intérieures) agissant sur toutes les particules du système lors du passage[1] de la configuration considérée du système à une configuration appelée *configuration zéro* et pour laquelle il est convenu d'admettre l'énergie potentielle du système égale à zéro. Le choix de la configuration zéro, c'est-à-dire de l'origine du barème de l'énergie potentielle, est tout à fait arbitraire, étant donné que dans chaque expérience il n'est possible de mesurer que la variation de l'énergie potentielle, mais non sa valeur absolue. Pour chaque problème concret ce choix a pour but d'en simplifier au possible la solution.

L'énergie potentielle W_p de même que la fonction de forces U (p. 66) caractérise un champ de forces potentiel donné. Elle est liée à la fonction de forces par les relations:

$$dW_p = -dU \quad \text{et} \quad W_p = -U + C,$$

où C est la constante d'intégration.

L'énergie potentielle du système est $W_p = W_p^{ext} + W_p^{int}$. Ici W_p^{ext} est l'*énergie potentielle externe* du système conditionnée par l'action des forces potentielles extérieures le sollicitant, c'est-à-dire des forces appliquées de la part de corps n'entrant pas dans le système, et W_p^{int} l'*énergie potentielle interne* du système conditionnée par les forces potentielles d'interaction entre toutes ses

---

1) Si les forces potentielles sont non stationnaires, le temps est considéré comme étant un paramètre fixe lors de ce passage.

parties. Dans le cas général W_p^{int} dépend des coordonnées de tous les points matériels n constituant le système: $W_p^{int} = f(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n)$, W_p^{ext} peut aussi dépendre explicitement du temps t : $W_p^{ext} = f_1(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n, t)$. Ceci est lié au fait que les corps extérieurs agissant sur le système considéré peuvent se déplacer par rapport au système de référence (on suppose donnée la loi de ce mouvement dans chaque problème concret).

Si $\mathbf{F}_i^{ext} = \mathbf{F}_i(\mathbf{r}_i, t)$ est la résultante de toutes les forces potentielles extérieures agissant sur un point matériel du système, on a:

$$\frac{dW_p^{ext}}{dt} = \frac{\partial W_p^{ext}}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{F}_i, \mathbf{v}_i),$$

où $\mathbf{v}_i = d\mathbf{r}_i/dt$, $\mathbf{r}_i$ est le rayon vecteur du i-ième point. Dans le cas d'un champ de forces extérieur stationnaire

$$\frac{\partial W_p^{ext}}{\partial t} = 0 \quad \text{et} \quad dW_p^{ext} = -\sum_{i=1}^{n} (\mathbf{F}_i, \mathbf{v}_i)dt.$$

L'énergie potentielle interne du système est la somme algébrique des énergies potentielles W_{ik} d'interaction de tous les couples possibles de points du système:

$$W_p^{int} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k>1}^{n} W_{ik} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq i)}}^{n} W_{ik},$$

où $W_{ik} = -\int (\mathbf{F}_{ik}, d\mathbf{r}_{ik}) + \text{const} = -\int (\mathbf{F}_{ki}, d\mathbf{r}_{ki}) + \text{const} = W_{ki}$, $\mathbf{r}_{ik} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k$, $\mathbf{r}_{ki} = \mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i$ et $\mathbf{F}_{ik} = -\mathbf{F}_{ki}$ sont les forces potentielles d'interaction des i-ième et k-ième points du système. Dans le cas d'un solide parfait $W_p^{int} = \text{const}$ et l'on peut admettre que $W_p = W_p^{ext}$.

EXEMPLE 1. L'énergie potentielle d'un corps ayant subi une déformation élastique (on admet l'énergie potentielle du corps non déformé égale à zéro) est:

$$W_p = \int_V w_p dV,$$

où w_p est la densité volumique de l'énergie potentielle, numériquement égale à l'énergie de déformation de l'unité de volume du corps

$\left(w_p = \frac{dW_p}{dV}\right)$, l'intégration étant étendue au volume total V du corps. Dans le cas le plus simple de dilatation ou de compression linéaire d'un corps isotrope suivant l'axe Ox surgissent dans ce corps des forces potentielles élastiques, dont la résultante **F**, d'après la loi de Hooke (p. 293), est égale à $\mathbf{F} = -a\mathbf{x}$, où a est le coefficient d'élasticité dépendant de la forme et des dimensions du corps, ainsi que des propriétés élastiques du matériau dont il est fait, **x** le vecteur numériquement égal à la déformation du corps et coïncidant en direction avec la force extérieure qui engendre celle-ci. Etant donné que $F_x = -ax$, et $F_y = F_z = 0$, on a: $U = -ax^2/2$ et

$$W_p = \frac{ax^2}{2}.$$

EXEMPLE 2. Energie potentielle d'un corps dans le champ de gravitation. La force **F**, agissant sur le point matériel de la part du champ de gravitation, est égale au produit de l'intensité **g** de ce champ par la masse m du point (p. 55):

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g} = -m \operatorname{grad} \varphi = -\operatorname{grad} (m\varphi) = \operatorname{grad} U,$$

où φ est le potentiel du champ (p. 55) et $U = -m\varphi + C$ est la fonction de forces (p. 66). L'énergie potentielle d'un point matériel dans le champ de gravitation est le produit de sa masse m par le potentiel φ au point considéré du champ:

$$W_p = m\varphi.$$

On peut admettre en première approximation que la Terre est une sphère dont la densité ne varie que suivant le rayon. Le potentiel du champ de gravitation terrestre au point éloigné du centre de la Terre à la distance r est égal à (p. 56) $\varphi = -f\frac{M}{r} + C$, où M est la masse de la Terre et $r \geqslant R_0$ le rayon terrestre.

L'énergie potentielle d'un corps de masse m qui se trouve dans le champ gravitationnel de la Terre est

$$W_p = -f\frac{mM}{r} + mC$$

ou, quand $W_p = 0$ sur la surface de la Terre ($r = R_0$),

$$W_p = fmM\left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{r}\right).$$

6. Loi de la conservation de l'énergie mécanique

1° La variation élémentaire de l'énergie cinétique d'un système de n points matériels est la somme algébrique des travaux élémentaires de toutes les forces (extérieures ou intérieures) agissant sur les points du système:

$$dW_c = \sum_{i=1}^{n} \delta A_i = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{F}_i, \ d\mathbf{r}_i),$$

où $\mathbf{F}_i$ est la résultante des forces appliquées au i-ième point matériel.

La variation élémentaire de l'énergie mécanique d'un système (p. 67) est:

$$dW = \frac{\partial W_p}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{f}_i, \ d\mathbf{r}_i),$$

où W_p est l'énergie potentielle du système, et $\mathbf{f}_i$ la résultante des forces non potentielles sollicitant le i-ième point matériel du système. Si toutes les forces sont potentielles, la dérivée totale par rapport au temps de l'énergie mécanique du système est égale à la dérivée partielle par rapport au temps de l'énergie potentielle de ce système: $\frac{dW}{dt} = \frac{\partial W_p}{\partial t}$.

2° Le système de corps (points matériels) est dit *conservatif* si toutes les forces extérieures sollicitant ces corps sont stationnaires et potentielles et toutes les forces intérieures, potentielles[1]). L'énergie potentielle d'un système conservatif ne dépend pas explicitement du temps. Donc

$$\frac{dW}{dt} = 0, \ W = W_c + W_p = \text{const.}$$

L'énergie mécanique d'un système conservatif reste invariable au cours de son mouvement. Cet énoncé est appelé *loi de la conservation de l'énergie mécanique*. Elle est valable en particulier pour tout système fermé de corps si les forces d'interaction entre ceux-ci sont potentielles. Si ces forces sont non potentielles (s'il y a, par exemple, forces de frottement), l'énergie mécanique du système fermé décroît.

3° Le système de corps est dit *dissipatif* si son énergie mécanique décroît avec le temps au compte de sa transformation en

---

[1] Si le système n'est pas libre, les liaisons imposées à celui-ci doivent être sans frottement (p. 96) et indépendantes du temps (p. 22).

d'autres formes (non mécaniques) d'énergie (par exemple, en énergie interne du mouvement chaotique des particules constituant ces corps). Ce processus de décroissance de l'énergie mécanique du système est appelé *dissipation d'énergie.*

7. Choc

1° On appelle *choc* le phénomène de variation finie des vitesses des solides, qui se produit en un intervalle de temps τ très court, lorsque ces corps entrent en collision. Au cours du processus de déformation des corps accompagnant le choc, surgissent des *forces instantanées (forces de percussion)* considérables. Les forces instantanées représentent des forces intérieures pour le système de corps s'entrechoquant. Les impulsions de ces forces pour le temps τ (durée du choc) sont appelées *impulsions instantanées*. Elles sont beaucoup plus grandes que les impulsions des forces extérieures appliquées au système pendant le même temps. Ceci permet de négliger l'influence des forces extérieures dans le processus de choc et d'admettre que le système de corps s'entrechoquant est fermé, c'est-à-dire que les lois de la conservation de la quantité de mouvement (p. 47) et du moment cinétique (p. 84) sont réalisées dans ce système. Considérant les corps s'entrechoquant comme un système de n points matériels, on obtient:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{u}_i$$

et

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{u}_i,$$

où $\mathbf{v}_i$ et $\mathbf{u}_i$ sont respectivement les vitesses du point matériel de masse m_i avant et après le choc et $\mathbf{r}_i$ le rayon vecteur de ce point.

2° On appelle *ligne de choc* la normale commune aux surfaces des corps s'entrechoquant en leur point de contact. Le choc est *direct* si les vitesses des centres d'inertie des corps s'entrechoquant sont avant le choc parallèles à la ligne de choc. Dans le cas contraire le choc est *oblique*. Le choc est appelé *central* si les centres d'inertie des corps s'entrechoquant se trouvent sur la ligne de choc.

EXEMPLE 1. Choc central direct de deux corps en mouvement de translation. Les vitesses des corps $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ avant le choc et $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ après le choc sont dirigées suivant une même droite: l'axe Ox qui

passe par les centres d'inertie de ces corps. Les projections de ces vitesses sur l'axe Ox sont liées par les relations:

$$u_1 = \frac{(m_1 - km_2)v_1 + m_2(1 + k)v_2}{m_1 + m_2},$$

$$u_2 = \frac{m_1(1 + k)v_1 + (m_2 - km_1)v_2}{m_1 + m_2},$$

$$k = \frac{u_2 - u_1}{v_1 - v_2},$$

où les valeurs de v_1, v_2, u_1 et u_2 sont positives ou négatives suivant la direction du vecteur vitesse correspondant (dans le sens positif de l'axe Ox ou dans le sens contraire). La grandeur k est appelée *coefficient de restitution*. Elle est égale au rapport des valeurs absolues des vitesses relatives des corps avant et après le choc et ne dépend que des propriétés élastiques des corps en contact. La décroissance de l'énergie cinétique des corps causée par le choc est:

$$-\Delta W_c = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2 (1 - k^2).$$

Cette portion d'énergie mécanique du système se transforme en son énergie interne. Si les forces de percussion sont potentielles, le choc est dit *parfaitement élastique* et $k = 1$. Le choc est *inélastique* si après celui-ci les corps se déplacent avec la même vitesse, c'est-à-dire $u_1 = u_2$ et $k = 0$. Dans tous les autres cas le choc est nommé *imparfaitement élastique* et $0 < k < 1$.

EXEMPLE 2. Choc central oblique de deux corps en translation. Seules les composantes normales des vitesses des corps, parallèles à la ligne de choc, changent lors du choc:

$$u_{1n} = \frac{(m_1 - km_2)v_{1n} + m_2(1 + k)v_{2n}}{m_1 + m_2},$$

$$u_{2n} = \frac{m_1(1 + k)v_{1n} + (m_2 - km_1)v_{2n}}{m_1 + m_2},$$

et dans ce cas le coefficient de restitution est:

$$k = \frac{u_{2n} - u_{1n}}{v_{1n} - v_{2n}}.$$

CHAPITRE 4

Dynamique du mouvement de rotation

1. Moment de force

1° On appelle *moment* $\mathbf{M}_i$ *d'une force par rapport au point O* le produit vectoriel du rayon vecteur $\mathbf{r}_i$, mené du point O au point d'application de la force, par le vecteur force $\mathbf{F}_i$:

$$\mathbf{M}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i.$$

Les projections M_{ix}, M_{iy} et M_{iz} du vecteur $\mathbf{M}_i$ sur les axes de coordonnées cartésiennes rectangulaires avec le centre au point O sont liées aux projections des vecteurs $\mathbf{r}_i$ et $\mathbf{F}_i$ sur ces axes par les relations:

$$M_{ix} = y_i F_{iz} - z_i F_{iy}, \quad M_{iy} = z_i F_{ix} - x_i F_{iz};$$

$$M_{iz} = x_i F_{iy} - y_i F_{ix},$$

où x_i, y_i, z_i sont les coordonnées du point d'application de la force $\mathbf{F}_i$.

2° Le *moment d'une force par rapport à un axe* est une grandeur scalaire égale à la projection du vecteur moment d'une force sur un axe donné par rapport à un point quelconque de ce même axe.

Le *moment résultant* $\mathbf{M}$ d'un système k de forces est un vecteur égal à la somme des vecteurs moments des forces de ce système par rapport au centre de réduction (p. 40):

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{M}_i = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i.$$

Les moments résultants $\mathbf{M}$ et $\mathbf{M}'$ d'un même système de forces pour deux centres de réduction différents O et O' sont liés par la relation

$$\mathbf{M}' = \mathbf{M} - \mathbf{r}_{O'} \times \mathbf{F},$$

où $\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{F}_i$ est la résultante générale du système de forces et $\mathbf{r}_{O'}$ le rayon vecteur mené du point O au point O'.

Le moment d'un système de forces par rapport à un axe est la projection sur cet axe du moment résultant du système de forces correspondant à un point quelconque de ce même axe.

2. Moment d'inertie

1° On appelle *moment d'inertie* d'un corps par rapport à un axe une grandeur qui mesure l'inertie du corps en rotation autour de cet axe et qui est la somme des produits des masses élémentaires par les carrés de leurs distances à cet axe. Les moments d'inertie d'un corps par rapport aux axes de coordonnées cartésiennes rectangulaires sont égaux à

$$J_x = \int_{(m)} (y^2 + z^2)\, dm = \int_{(V)} (y^2 + z^2)\rho\, dV = \iiint_{(V)} (y^2 + z^2)\rho\, dx\, dy\, dz,$$

$$J_y = \int_{(m)} (x^2 + z^2)\, dm = \int_{(V)} (x^2 + z^2)\rho\, dV = \iiint_{(V)} (x^2 + z^2)\rho\, dx\, dy\, dz,$$

$$J_z = \int_{(m)} (x^2 + y^2)\, dm = \int_{(V)} (x^2 + y^2)\rho\, dV = \iiint_{(V)} (x^2 + y^2)\rho\, dx\, dy\, dz,$$

où m, ρ et V sont la masse, la densité et le volume du corps et x, y et z les coordonnées d'une particule élémentaire de volume dV et de masse dm du corps. Le moment d'inertie dépend uniquement de la forme du corps et de la disposition des masses par rapport à l'axe.

Les grandeurs $r_x = \sqrt{J_x/m}$, $r_y = \sqrt{J_y/m}$ et $r_z = \sqrt{J_z/m}$ sont appelées *rayons de giration* du corps par rapport aux axes Ox, Oy et Oz respectivement.

Pour un système discret de n points matériels,

$$J_x = \sum_{i=1}^{n} (y_i^2 + z_i^2) m_i, \quad J_y = \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 + z_i^2) m_i,$$

$$J_z = \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 + y_i^2) m_i.$$

2° *Théorème de Steiner:* le moment d'inertie J_a d'un corps par rapport à un axe arbitraire a est la somme du moment d'inertie $J_{a'}$ de ce corps par rapport à un axe a', parallèle à l'axe a et qui passe par le centre d'inertie du corps, et du produit de la masse m du corps par le carré de la distance d entre les axes a et a' (il est analogue pour un système arbitraire de points matériels):

$$J_a = J_{a'} + md^2.$$

Donc, le moment d'inertie d'un corps par rapport à un axe qui passe par son centre d'inertie, est inférieur au moment d'inertie par rapport à tout axe parallèle à celui-ci.

3° On appelle *moments centrifuges d'inertie d'un corps* par rapport aux axes de coordonnées cartésiennes rectangulaires (Ox, Oy, Oz) les expressions suivantes:

$$J_{xy} = \int_{(m)} xy \, dm = \int_{(V)} xy \, \rho \, dV = \iiint_{(V)} xy \, \rho \, dx \, dy \, dz,$$

$$J_{xz} = \int_{(m)} xz \, dm = \int_{(V)} xz \, \rho \, dV = \iiint_{(V)} xz \, \rho \, dx \, dy \, dz,$$

$$J_{yz} = \int_{(m)} yz \, dm = \int_{(V)} yz \, \rho \, dV = \iiint_{(V)} yz \, \rho \, dx \, dy \, dz.$$

Pour un système de n points matériels,

$$J_{xy} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i m_i, \quad J_{xz} = \sum_{i=1}^{n} x_i z_i m_i, \quad J_{yz} = \sum_{i=1}^{n} y_i z_i m_i.$$

4° Les moments d'inertie J_a d'un solide par rapport à tous les axes possibles a, passant par un point quelconque O, sont liés aux moments d'inertie de ce corps par rapport aux axes du système

de coordonnées (Ox, Oy, Oz), dont l'origine coïncide avec O, par la relation suivante:

$$J_a = J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma - 2J_{xy} \cos \alpha \cos \beta - - 2J_{xz} \cos \alpha \cos \gamma - 2J_{yz} \cos \beta \cos \gamma,$$

où α, β et γ sont les angles formés par l'axe a avec les axes Ox, Oy et Oz respectivement.

L'axe Ox est appelé *axe principal d'inertie* du corps si les moments centrifuges d'inertie J_{xy} et J_{xz} sont simultanément nuls. On peut mener par chaque point du corps trois axes principaux d'inertie réciproquement perpendiculaires Ox', Oy' et Oz' tels que

$$J_a = J_1 \cos^2 \alpha' + J_2 \cos^2 \beta' + J_3 \cos^2 \gamma',$$

où α', β' et γ' sont les angles formés par l'axe a avec les axes Ox', Oy' et Oz', J_1, J_2 et J_3 les moments d'inertie du corps par rapport aux axes principaux d'inertieau point O nommés *moments principaux d'inertie.*

5° Si l'on mène par le point O d'un solide tous les axes a possibles et que l'on porte sur chacun d'eux les segments OA numériquement égaux à $1/\sqrt{J_a}$, le lieu géométrique des points A représentera alors un ellipsoïde, appelé *ellipsoïde d'inertie* du corps au point O. Les axes principaux de l'ellipsoïde d'inertie coïncident avec les axes principaux d'inertie du corps au point O. Les équations de l'ellipsoïde d'inertie dans les systèmes de coordonnées (Ox, Oy, Oz) et (Ox', Oy', Oz') sont de la forme:

$$J_x x^2 + J_y y^2 + J_z z^2 - 2J_{xy}\, xy - 2J_{xz}\, xz - 2J_{yz}\, yz = 1,$$

$$J_1 x'^2 + J_2 y'^2 + J_3 z'^2 = 1.$$

On appelle *ellipsoïde central d'inertie* d'un solide l'ellipsoïde d'inertie qui correspond au centre d'inertie de ce corps. Les axes principaux de l'ellipsoïde central d'inertie sont appelés *axes principaux d'inertie* relatifs au centre d'inertie, et les moments d'inertie du corps par rapport à ces axes *moments principaux d'inertie* relatifs au centre d'inertie. L'axe principal et central d'inertie est axe principal d'inertie pour tous les points du corps appartenant à cet axe.

6° Si le corps homogène a un axe de symétrie, cet axe est l'un des axes principaux et centraux d'inertie. Si le corps homogène a un plan de symétrie, toute ligne perpendiculaire à ce plan est axe principal d'inertie au point d'intersection de cette ligne avec le plan de symétrie.

Un corps solide tournant autour d'un point fixe O est appelé *corps de rotation du point de vue de la dynamique* si son ellipsoïde d'inertie pour le point O représente un ellipsoïde de rotation. L'axe de rotation de l'ellipsoïde d'inertie est nommé *axe de symétrie dynamique du corps.*

7° Moments principaux d'inertie relatifs au centre d'inertie de quelques corps homogènes de la forme la plus simple (m est la masse du corps).

1) Mince tige rectiligne de longueur l, disposée le long de l'axe Oz:

$$J_x = J_y = \frac{1}{12} ml^2, \qquad J_z = 0.$$

2) Parallélépipède rectangle de côtés a, b et c parallèles respectivement aux axes Ox, Oy et Oz:

$$J_x = \frac{m}{12}(b^2 + c^2), \quad J_y = \frac{m}{12}(a^2 + c^2), \quad J_z = \frac{m}{12}(a^2 + b^2).$$

3) Cylindre circulaire creux de hauteur H et de rayons extérieur et intérieur égaux à R_1 et R_2; Oz est l'axe du cylindre:

$$J_x = J_y = \frac{m}{12}\left(3R_1^2 + 3R_2^2 + H^2\right), \quad J_z = \frac{m}{2}\left(R_1^2 + R_2^2\right).$$

Pour un cylindre plein ($R_2 = 0$, $R_1 = R$):

$$J_x = J_y = \frac{m}{12}(3R^2 + H^2), \quad J_z = \frac{1}{2} mR^2.$$

Pour la surface latérale d'un cylindre creux à parois minces ($R_1 = R_2 = R$):

$$J_x = J_y = \frac{m}{12}(6R^2 + H^2), \qquad J_z = mR^2.$$

4) Sphère creuse de rayons extérieur et intérieur égaux à R_1 et R_2:

$$J_x = J_y = J_z = \frac{5}{2} m \frac{R_1^5 - R_2^5}{R_1^3 - R_2^3}.$$

Pour une sphère pleine ($R_2 = 0$, $R_1 = R$):

$$J_x = J_y = J_z = \frac{2}{5} mR^2.$$

Pour une sphère à parois minces ($R_1 = R_2 = R$):

$$J_x = J_y = J_z = \frac{2}{3} mR^2.$$

Pour un secteur de sphère (Oz est l'axe de symétrie):

$$J_z = \frac{mh}{5} (3R - h).$$

où R est le rayon de la sphère, h la hauteur du segment de sphère appartenant au secteur de sphère.

Pour le segment de sphère (Oz est l'axe de symétrie):

$$J_z = \frac{mh}{20} \frac{20R^2 - 15Rh + 3h^2}{3R - h}.$$

5) Cône circulaire droit de hauteur h et de rayon de base R (Oz est l'axe du cône):

$$J_x = J_y = \frac{3m}{20}\left(R^2 + \frac{H^2}{4}\right), \qquad J_z = \frac{3}{10} mR^2.$$

Pour la surface latérale d'un cône creux à parois minces:

$$J_z = \frac{1}{2} mR^2.$$

6) Tronc de cône circulaire droit de hauteur H, R_1 et R_2 sont les rayons de base (Oz est l'axe du cône):

$$J_z = \frac{3m}{10} \frac{R_1^5 - R_2^5}{R_1^3 - R_2^3}.$$

Pour la surface latérale d'un tronc de cône à parois minces:

$$J_z = \frac{m}{2} (R_1^2 + R_2^2).$$

7) Pyramide rectangulaire droite de hauteur H, les côtés a et b de sa base sont parallèles respectivement aux axes Ox et Oy:

$$J_x = \frac{m}{20}\left(b^2 + \frac{3}{4} H^2\right), \qquad J_y = \frac{m}{20}\left(a^2 + \frac{3}{4} H^2\right),$$

$$J_z = \frac{m}{20} (a^2 + b^2).$$

8) Ellipsoïde avec les demi-axes a, b et c parallèles respectivement aux axes Ox, Oy et Oz:

$$J_x = \frac{m}{5}(b^2 + c^2), \quad J_y = \frac{m}{5}(a^2 + c^2), \quad J_z = \frac{m}{5}(a^2 + b^2).$$

9) Anneau de rayon R avec une section transversale circulaire de rayon r (tore); l'axe Oz est perpendiculaire au plan sur lequel reposent les centres des sections transversales:

$$J_x = J_y = \frac{m}{8}(4R^2 + 5r^2), \quad J_z = m\left(R^2 + \frac{3}{4}r^2\right).$$

3. Moment cinétique

1° On appelle *moment cinétique* ou *moment de la quantité de mouvement* d'un point matériel par rapport à un certain point *(pôle)* le vecteur $\mathbf{L}_i$, égal au produit vectoriel du rayon vecteur $\mathbf{r}_i$ du point, issu du pôle, par sa quantité de mouvement $m_i\mathbf{v}_i$:

$$\mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times m_i\mathbf{v}_i.$$

On appelle *moment cinétique* ou *moment de la quantité de mouvement* d'un système de points matériels par rapport à un pôle le vecteur $\mathbf{L}$, égal à la somme géométrique des moments cinétiques relativement au même pôle de tous les n points du système:

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times m_i\mathbf{v}_i.$$

Le moment cinétique du corps par rapport à un pôle est:

$$\mathbf{L} = \int_{(m)} (\mathbf{r} \times \mathbf{v})\, dm = \int_{(V)} (\mathbf{r} \times \mathbf{v})\, \rho dV = \iiint_{(V)} (\mathbf{r} \times \mathbf{v})\, \rho\, dx\, dy\, dz,$$

où $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$ et ρ sont respectivement le rayon vecteur, la vitesse et la densité d'un petit élément du corps de masse dm et de volume dV.

2° Le centre d'inertie C d'un système de points matériels possède la propriété suivante: les moments cinétiques de ce système par rapport à C pour le mouvement absolu des points ($\mathbf{L}_C$) et pour leur mouvement relatif ($\mathbf{L}'_C$) par rapport au système de référence en translation avec son origine au point C sont les mêmes: $\mathbf{L}_C = \mathbf{L}_C'$, donc

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}'_i \times m_i\mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}'_i \times m_i\mathbf{v}'_i,$$

où $\mathbf{v}_i$ et $\mathbf{v}'_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_c$ sont les vitesses des mouvements absolu et relatif d'un point de masse m_i dont la position par rapport à C est déterminée par le rayon vecteur $\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_c$. Les moments cinétiques du système par rapport à son centre d'inertie ($\mathbf{L}_c$) et au pôle immobile ($\mathbf{L}$) sont liés par la relation:

$$\mathbf{L}_c = \mathbf{L} - m\ (\mathbf{r}_c \times \mathbf{v}_c) = \mathbf{L} - \mathbf{r}_c \times \mathbf{K},$$

où $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ est la masse du système, $\mathbf{v}_c$ la vitesse absolue du centre d'inertie par rapport au pôle et $\mathbf{K}$ la quantité de mouvement du système.

3° Le moment de la quantité de mouvement ou moment cinétique d'un système de points matériels (de corps) par rapport à l'axe a est une grandeur scalaire $\mathbf{L}_a$ égale à la projection sur l'axe a du vecteur moment cinétique $\mathbf{L}$ du système (du corps) rapporté à tout pôle appartenant à cet axe. Les moments cinétiques d'un système de n points matériels par rapport aux axes d'un système immobile de coordonnées cartésiennes sont:

$$L_x = \sum_{i=1}^{n} (y_i v_{iz} - z_i v_{iy}) m_i,$$

$$L_y = \sum_{i=1}^{n} (z_i v_{ix} - x_i v_{iz}) m_i,$$

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} (x_i v_{iy} - y_i v_{ix}) m_i,$$

où x_i, y_i, z_i sont les coordonnées du i-ième point matériel du système, v_{ix}, v_{iy}, v_{iz} les projections de sa vitesse $\mathbf{v}_i$ sur les axes de coordonnées.

Pour un corps

$$L_x = \int_{(m)} (yv_z - zv_y)dm = \iiint_{(V)} (yv_z - zv_y)\ \rho\ dx\ dy\ dz,$$

$$L_y = \int_{(m)} (zv_x - xv_z)dm = \iiint_{(V)} (zv_x - xv_z)\ \rho\ dx\ dy\ dz,$$

$$L_z = \int_{(m)} (xv_y - yv_x)dm = \iiint_{(V)} (xv_y - yv_x)\ \rho\ dx\ dy\ dz,$$

où x, y, z sont les coordonnées d'un petit élément du corps de masse dm et v_x, v_y, v_z les projections de la vitesse de cet élément sur les axes de coordonnées.

Le moment cinétique d'un corps ou d'un système de points matériels par rapport à un axe arbitraire a passant par l'origine des coordonnées, est:

$$L_a = L_x \cos \alpha + L_y \cos \beta + L_z \cos \gamma,$$

où α, β, γ sont les angles formés par l'axe a avec les axes de coordonnées Ox, Oy, et Oz. Si le corps tourne autour de l'axe a avec une vitesse angulaire ω, on a:

$$L_a = J_a \omega.$$

4. Loi fondamentale de la dynamique du mouvement de rotation

La dérivée par rapport au temps du moment cinétique d'un système mécanique par rapport à un point fixe[1]) ou au centre d'inertie du système est égale au moment résultant par rapport au même point de toutes les forces extérieures appliquées au système:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M},$$

ou bien, en projections sur les axes de coordonnées du système de référence immobile (galiléen),

$$\frac{dL_x}{dt} = M_x; \qquad \frac{dL_y}{dt} = M_y; \qquad \frac{dL_z}{dt} = M_z.$$

EXEMPLE 1. Rotation d'un système autour d'un axe fixe Oz: $L_x = L_y = 0$ et $L_z \neq 0$. Equation du mouvement: $\frac{d}{dt} L_z = M_z$. Si le système est un solide parfait, on a alors: $J_z \frac{d\omega}{dt} = M_z$, où ω est la vitesse angulaire et J_z le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe Oz.

EXEMPLE 2. Rotation d'un solide autour d'un point fixe O. Dans le système de coordonnées (x', y', z') rigidement lié au corps

[1]) Par rapport à un certain repère galiléen.

avec son origine en O, l'équation du mouvement du corps est de la forme:

$$\frac{\tilde{d}\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M} - \omega \times \mathbf{L},$$

où **L** et **M** sont le moment cinétique du corps et le moment résultant par rapport au point O des forces extérieures appliquées à celui-ci, ω la vitesse de rotation angulaire du corps, et

$$\frac{\tilde{d}\mathbf{L}}{dt} = \frac{dL_{x'}}{dt}\mathbf{i}' + \frac{dL_{y'}}{dt}\mathbf{j}' + \frac{dL_{z'}}{dt}\mathbf{k}'$$

la dérivée relative du vecteur **L** par rapport au temps, **i**′, **j**′, et **k**′ les vecteurs unités du système mobile. Si les axes du système mobile coïncident avec les axes principaux d'inertie du corps en O, les équations du mouvement du corps en projections sur ces axes sont de la forme:

$$J_1\dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2)\omega_2\omega_3 = M_1,$$
$$J_2\dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3)\omega_3\omega_1 = M_2,$$
$$J_3\dot{\omega}_3 + (J_2 - J_1)\omega_1\omega_2 = M_3,$$

où J_1, J_2 et J_3 sont les moments principaux d'inertie du corps en O, ω_1, ω_2 et ω_3 les projections du vecteur vitesse angulaire du corps sur les axes principaux d'inertie, et M_1, M_2 et M_3 les moments de toutes les forces extérieures par rapport aux mêmes axes. Ces équations sont appelées *équations dynamiques d'Euler.*

Elles sont valables également pour la rotation d'un solide libre autour du centre d'inertie. Seulement dans ce cas J_1, J_2, et J_3 sont les moments principaux d'inertie relatifs au centre d'inertie, ω_1, ω_2, ω_3 les projections du vecteur vitesse angulaire du corps sur les axes principaux d'inertie relatifs au centre d'inertie et M_1, M_2, M_3 les moments de toutes les forces extérieures par rapport aux mêmes axes.

5. Loi de la conservation du moment cinétique

1° Si le moment résultant des forces extérieures par rapport à un point fixe ou au centre d'inertie d'un système mécanique est identiquement nul, le moment cinétique du système par rapport à ce point ne variera pas avec le temps:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0, \qquad \mathbf{L} = \text{const.}$$

Dans un système fermé, les forces extérieures font défaut. C'est pourquoi le moment cinétique **L** du système fermé par rapport à un point fixe quelconque ainsi que la somme géométrique $\mathbf{L}'_c$ des moments cinétiques de toutes les parties du système par rapport à son centre d'inertie ne dépendent pas du temps:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times m_i\mathbf{v}_i = 0, \qquad \frac{d\mathbf{L}'_c}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i = 0,$$

où $\mathbf{r}_i$ et $\mathbf{v}_i$ sont le rayon vecteur et la vitesse absolue du i-ième point matériel du système par rapport au système immobile (galiléen) de coordonnées (x, y, z) et $\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_c$ et $\mathbf{v}'_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_c$ sont le rayon vecteur et la vitesse relative du même point par rapport au centre d'inertie du système. En projections sur les axes fixes Ox, Oy, Oz et les axes $O'x'$, $O'y'$ et $O'z'$ du système en translation tel que son origine O' coïncide toujours avec le centre d'inertie, la loi de la conservation du moment cinétique s'écrit sous forme de deux systèmes d'équations:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i(y_i v_{iz} - z_i v_{iy}) = 0,\\
&\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i(z_i v_{ix} - x_i v_{iz}) = 0,\\
&\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i v_{iy} - y_i v_{ix}) = 0;
\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i(y'_i v'_{iz} - z'_i v'_{iy}) = 0,\\
&\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i(z'_i v'_{ix} - x'_i v'_{iz}) = 0,\\
&\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i(x'_i v'_{iy} - y'_i v'_{ix}) = 0.
\end{aligned}\right\}$$

2° Si le moment des forces extérieures par rapport au centre d'inertie d'un solide est nul, la rotation du corps autour du centre d'inertie est appelée *rotation libre*. Elle se décrit par les trois équa-

tions suivantes, découlant des équations dynamiques d'Euler (p. 84):

$$J_1\dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2)\omega_2\omega_3 = 0,$$
$$J_2\dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3)\omega_3\omega_1 = 0,$$
$$J_3\dot{\omega}_3 + (J_2 - J_1)\omega_1\omega_2 = 0,$$

où J_1, J_2 et J_3 sont les moments principaux d'inertie relatifs au centre d'inertie, ω_1, ω_2 et ω_3 les projections du vecteur vitesse angulaire du corps sur les axes principaux passant par le centre d'inertie. Dans ce cas le mouvement du centre d'inertie du corps s'effectue d'après la loi:

$$m\,\ddot{\mathbf{r}}_c = \mathbf{F},$$

où $\mathbf{F}$ est la résultante générale du système de forces extérieures, m la masse du corps.

3° La rotation libre du corps est dite *stationnaire* si le vecteur vitesse angulaire ω du corps est constant. La condition indispensable et suffisante d'un tel mouvement est la rotation du corps autour de l'un des axes principaux et centraux d'inertie. En pratique cependant la rotation libre stationnaire n'a lieu qu'autour des axes principaux et centraux d'inertie avec le plus grand et le plus petit moment d'inertie, appelés *axes libres* du corps, tandis que la rotation libre par rapport au troisième axe n'est pas stable.

Si le système mécanique n'est pas fermé, mais le moment des forces extérieures par rapport à un axe fixe quelconque est identiquement nul, le moment cinétique du système relativement à cet axe ne variera pas au cours du mouvement.

6. Mouvement sous l'action de forces centrales

1° La force agissant sur un point matériel mobile (ou un corps) est dite *centrale* si sa ligne d'action passe constamment par un même point fixe O, appelé *centre des forces*:

$$\mathbf{F} = F\frac{\mathbf{r}}{r},$$

où $\mathbf{r}$ est le rayon vecteur mené du centre O au point d'application de la force $\mathbf{F}$, F la projection de la force sur la direction du rayon vecteur. Les forces d'attraction entre les points matériels et les forces d'interaction électrostatique entre les charges électriques ponctuelles, pour lesquelles F est inversement proportionnelle à r^2, sont des exemples de forces centrales.

2° Quand un point matériel se déplace sous l'action d'une force centrale, son moment cinétique par rapport au centre des forces O ne varie pas:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M} = 0, \quad \mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \text{const.}$$

Le mouvement du point a alors lieu dans le plan:

$$L_x x + L_y y + L_z z = 0,$$

perpendiculaire à $\mathbf{L}$ et passant par O. La vitesse aréolaire du point (p. 24) est constante *(deuxième loi de Kepler):*

$$2\sigma = r^2\dot{\varphi} = \frac{L}{m},$$

où r et φ sont les coordonnées polaires du point dans son plan de mouvement (les coordonnées cartésiennes du point sont ξ et η).

3° Dans le cas où la force centrale agissant sur un point matériel ne dépend que de r, cette force est potentielle (p. 66). Sa fonction de forces est:

$$U(r) = \int_0^r F(r)\, dr + U_0,$$

où $U_0 = U(0)$. Les énergies potentielle, cinétique et totale du point sont:

$$W_p = -U(r) + C = W_p(r),$$

$$W_c = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2},$$

$$W = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} + W_p(r).$$

Le lien existant entre les coordonnées polaires du point et le temps est de la forme:

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[W - W_p(r) - \frac{L^2}{2mr^2}\right]}} + C_1,$$

$$\varphi = \int \frac{\frac{L}{r^2}\, dr}{\sqrt{2m\,[W - W_p(r)] - \frac{L^2}{r^2}}} + C_2.$$

La seconde formule détermine l'équation de la trajectoire (orbite) d'un point matériel et la première, la loi du mouvement du point le long de cette trajectoire.

4° L'énergie totale W du point ne varie pas au cours du mouvement. Le domaine des valeurs possibles du rayon polaire r du point peut alors être déterminé par la condition

$$\frac{L^2}{2mr_*^2} + W_p(r_*) = W,$$

où r_* sont les valeurs extrémales de r, c'est-à-dire r_{max} et r_{min}. Si r_{max} est une valeur finie, le mouvement est appelé *fini*. Dans ce cas la trajectoire du point est comprise à l'intérieur de l'anneau, limité par les circonférences $r = r_{min}$ et $r = r_{max}$. Toutes les trajectoires du mouvement fini du point sont fermées si l'énergie potentielle W_p est proportionnelle à $1/r$ ou r^2. Dans le cas où la valeur maximale de r est illimitée, le mouvement est appelé *infini*.

5° *Problème de Kepler*[1]. Le mouvement d'un point matériel sous action de la force centrale qui est inversement proportionnelle au carré de la distance du centre des forces:

$$\mathbf{F} = -\frac{a}{r^3}\mathbf{r} \text{ et } W_p = -\frac{a}{r},$$

où a est une grandeur constante. Si $a < 0$, le point est repoussé du centre (interaction coulombienne des charges ponctuelles de même signe); si $a > 0$, le point est attiré vers le centre (interaction gravitationnelle des points matériels et interaction coulombienne des charges ponctuelles de signes différents).

La trajectoire du point est une conique dont l'équation en coordonnées polaires r et $\psi = \varphi - C_2$ (p. 87) est de la forme:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\psi} \qquad (a > 0),$$

$$r = \frac{p}{-1 + e\cos\psi} \qquad (a < 0),$$

où $p = \frac{L^2}{m|a|}$ est le *paramètre de l'orbite*, $e = \sqrt{1 + \frac{2WL^2}{ma^2}}$ l'*excentricité de l'orbite*, W l'énergie totale du point et L son moment cinétique par rapport au centre.

---

[1] Certains auteurs l'appellent *problème de Newton*.

a) $\alpha > 0$. Le centre des forces se trouve au foyer de l'orbite d'un point matériel. La distance qui le sépare du point le plus proche de l'orbite, appelé *périhélie*, est:

$$r_{\min} = \frac{p}{1+e}.$$

Si $W > 0$, on a $e > 1$ et l'orbite est une hyperbole;
si $W = 0$, on a $e = 1$, l'orbite est donc une parabole;
si $W < 0$, on a $e < 1$, et l'orbite est une ellipse (fig. I.4.1) dont les demi-axes sont égaux à

$$a = \frac{p}{1-e^2} = \frac{\alpha}{2|W|}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{L}{\sqrt{2m|W|}}.$$

La période de révolution du point suivant l'orbite elliptique est:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}.$$

b) $\alpha < 0$. L'énergie totale du point est:

$$W = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{|\alpha|}{r} \geqslant 0.$$

Dans ce cas le mouvement est toujours infini, et la trajectoire a la forme d'une hyperbole ($W > 0$) ou d'une parabole ($W = 0$). Le centre des forces O et le foyer de l'orbite F se trouvent sur son axe de symétrie, de différents côtés du périhélie P (fig. I.4.2), on a:

$$r_{\min} = \frac{p}{e-1}.$$

EXEMPLE 1. Mouvement des planètes dans le champ gravitationnel du Soleil: $\alpha = fmM > 0$, où m est la masse de la planète, M la masse du Soleil, f la constante de la gravitation. Le mouvement

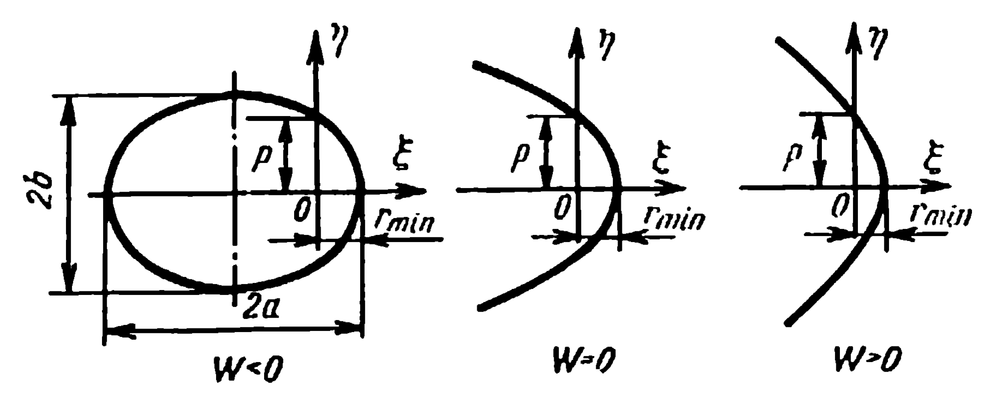


FIG. I.4.1.

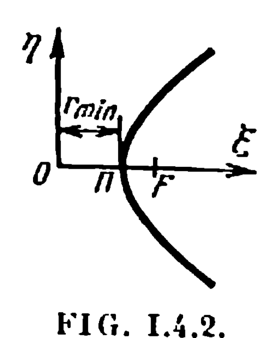


FIG. I.4.2.

des planètes est fini, c'est-à-dire que $W < 0$. Les deux lois suivantes sont alors valables:

1) les planètes suivent des orbites elliptiques dont le Soleil occupe un des foyers *(première loi de Kepler)*.

2) le quotient des cubes des demi grands axes des orbites par les carrés des temps de révolution planétaire est le même pour toutes les planètes du système solaire *(troisième loi de Kepler)*:

$$4\pi^2 \frac{a^3}{T^2} = \frac{\alpha}{m} = fM = \text{const.}$$

EXEMPLE 2. Mouvement des corps dans le champ gravitationnel de la Terre: $\alpha = fmM = g_0 m r_0^2$, où m est la masse du corps, M la masse de la Terre, g_0 l'accélération de la chute libre sur la surface de la Terre dont le rayon est égal à r_0 (l'influence de la rotation diurne de la Terre n'est pas prise en considération).

On appelle *première vitesse cosmique* ou *vitesse circulaire* v_1 la vitesse qu'il faut communiquer au point pour qu'il devienne un satellite de la Terre décrivant une orbite circulaire ($e = 0$) de rayon r_0:

$$v_1 = \sqrt{g_0 r_0} = 7{,}9 \text{ km/s}$$ [1]).

On appelle *seconde vitesse cosmique* ou *vitesse parabolique* v_2 la vitesse la plus petite qu'il faut communiquer au corps pour que l'orbite de celui-ci devienne parabolique dans le champ gravitationnel de la Terre ($e = 1$), c'est-à-dire pour que le corps puisse surmonter l'attraction de la pesanteur terrestre et devenir un satellite du Soleil:

$$v_2 = \sqrt{2 g_0 r_0} = 11{,}2 \text{ km/s}$$ [1]).

7. Gyroscope

1° Le *gyroscope (gyroscope symétrique)* est un solide tournant autour d'un point fixe O et possédant un axe de symétrie dynamique Oz' (p. 79), qui passe par le centre d'inertie du gyroscope. Le gyroscope est dit *équilibré* si le point O coïncide avec son centre d'inertie. Dans le cas contraire le gyroscope est dit *pesant*, parce que le moment de sa force de pesanteur est différent de zéro par rapport au point O et influe considérablement sur le mouvement du gyroscope.

---

[1]) L'influence de la résistance de l'atmosphère n'est pas prise en considération.

Si l'orientation de l'axe instantané de rotation du gyroscope autour du point O est illimitée, le gyroscope possède trois degrés de liberté. Lorsque cet axe ne peut occuper des positions arbitraires rien que dans un certain plan immobile, passant par le point O, le gyroscope possède deux degrés de liberté.

2° Rotation libre (p. 85) du gyroscope équilibré possédant trois degrés de liberté.

Le moment cinétique **L** du gyroscope par rapport au point O et son énergie cinétique sont constants. De plus, il découle des équations de la rotation libre du corps autour d'un point (p. 86), quand $J_1 = J_2$:

$$\dot{\omega}_3 = 0, \quad \omega_1\dot{\omega}_1 + \omega_2\dot{\omega}_2 = 0,$$

c'est-à-dire que ω_3, $\omega_1^2 + \omega_2^2$ et $\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2}$ sont constantes.

Deux cas sont possibles:

a) $\omega_1 = \omega_2 = 0$, de sorte que $\omega = \omega_3$ et $\omega = \frac{1}{J_3}\,\mathbf{L} = \text{const.}$

L'orientation de l'axe de symétrie dynamique d'un gyroscope équilibré en rotation libre par rapport aux axes du système de référence galiléen ne varie pas avec le temps.

b) $\omega_1^2 + \omega_2^2 \neq 0$, c'est-à-dire que l'axe instantané de rotation du gyroscope ne coïncide pas avec son axe de symétrie dynamique Oz'.

L'axe Oz' tourne de façon uniforme autour d'un axe fixe Oz, qui coïncide avec le vecteur **L**, en décrivant une conique circulaire avec son sommet au point O et un angle d'ouverture 2ϑ déterminé par la condition

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{J_1}{J_3}\sqrt{\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{\omega_3^2}}.$$

Un tel mouvement est appelé *précession régulière* et l'angle ϑ, *angle de nutation*. La vitesse angulaire de précession est:

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}{\sin\vartheta} = \omega_3\sqrt{\left(\frac{J_3}{J_1}\right)^2 + \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{\omega_3^2}}.$$

Si $\omega_1^2 + \omega_2^2 \ll \omega_3^2$, l'angle de nutation est faible lors d'une précession régulière et l'axe Oz' coïncide pratiquement avec l'axe fixe Oz.

3° Action des forces extérieures sur le mouvement du gyroscope possédant trois degrés de liberté.

On suppose en théorie approchée du gyroscope qu'il est en rotation rapide autour d'un axe de symétrie dynamique Oz' ($\omega = \omega_3$), lequel à son tour est en rotation lente autour d'un point fixe O sous l'influence des forces extérieures. C'est le mouvement de *précession*. Les vecteurs $\boldsymbol{\omega}$ et $\mathbf{L} = J_3\boldsymbol{\omega}$ sont nommés *vitesse angulaire propre* et *moment cinétique propre* du gyroscope.

Si la force extérieure $\mathbf{F}$ est appliquée au point A de l'axe Oz' (fig. I.4.3), son moment $\mathbf{M}$ par rapport au point O est:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_a \times \mathbf{F} = \frac{r_a}{J_3\omega}\mathbf{L} \times \mathbf{F},$$

où $\mathbf{r}_a$ est le rayon vecteur du point A et ω la valeur algébrique de la vitesse angulaire propre du gyroscope ($\omega > 0$ si le vecteur $\mathbf{L}$ est orienté suivant la direction positive de l'axe Oz').

4° Il suit de la loi fondamentale de la dynamique du mouvement de rotation (p. 83) que pour le gyroscope ayant trois degrés de liberté:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{r_a}{J_3\omega}\mathbf{L} \times \mathbf{F}.$$

Les vecteurs $d\mathbf{L}$ et $\mathbf{L}$ sont réciproquement perpendiculaires. Par conséquent, sous l'action d'une force $\mathbf{F}$, appliquée à l'axe Oz' du gyroscope, le vecteur $\mathbf{L}$ et l'axe du gyroscope effectuent une précession autour d'un axe instantané OO' parallèle à la force $\mathbf{F}$, dans la direction du vecteur moment $\mathbf{M}$ de cette force par rapport au point O.

La vitesse angulaire de précession est:

$$\boldsymbol{\Omega} = -\frac{r_a}{J_3\omega}\mathbf{F}.$$

Le vecteur

$$\mathbf{M}_g = -\mathbf{M} = \mathbf{L} \times \boldsymbol{\Omega} = J_3\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Omega}$$

est appelé *moment gyroscopique*. Le moment gyroscopique est appliqué au corps extérieur qui engendre la précession du gyroscope avec la vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega}$.

La précession est appelée *régulière* si $\boldsymbol{\Omega} = \text{const}$ et l'angle ϑ formé par les vecteurs $\mathbf{L}$ et $\boldsymbol{\Omega}$ est aussi

FIG. I.4.3.

constant. Selon la théorie exacte, dans le cas de précession régulière, le moment gyroscopique est:

$$\mathbf{M}_g = J_3\omega \times \Omega\left(1 + \frac{J_3 - J_1}{J_3}\frac{\Omega}{\omega}\cos\vartheta\right).$$

Cette formule coïncide avec la formule approximative dans les cas suivants:

a) $\omega \gg \Omega$ (position initiale de la théorie approchée);

b) $\vartheta = 90°$;

c) $J_3 = J_1 = J_2$ *(gyroscope sphérique)*.

EXEMPLE. Précession régulière du gyroscope pesant, conditionnée par sa force de pesanteur: $\mathbf{M}_g = \mathbf{P} \times \mathbf{r}_C$, où $\mathbf{r}_C$ est le rayon vecteur du centre d'inertie. La précession s'effectue autour d'un axe vertical qui fait l'angle ϑ avec l'axe du gyroscope. La vitesse angulaire de précession est déterminée par l'équation

$$J_3\omega\,\Omega\left(1 + \frac{J_3 - J_1}{J_3}\frac{\Omega}{\omega}\cos\vartheta\right) = Pr_C.$$

La précession régulière est possible à condition que

$$J_3^2\omega^2 + 4\,(J_3 - J_1)\;Pr_C\;\cos\vartheta > 0.$$

Il existe deux vitesses angulaires de précession:

$$\Omega = \frac{-J_3\omega \pm \sqrt{J_3^2\,\omega^2 + 4(J_3 - J_1)Pr_C\cos\vartheta}}{2\,(J_3 - J_1)\cos\vartheta}.$$

Si la vitesse angulaire propre du gyroscope est suffisamment grande, on a:

$$\Omega_1 = \frac{Pr_C}{J_3\omega} \qquad \text{— précession lente,}$$

$$\Omega_2 = \frac{J_3\omega}{(J_3 - J_1)\cos\vartheta} \quad \text{— précession rapide.}$$

Pour qu'une précession régulière du gyroscope pesant (ou du gyroscope équilibré soumis à l'action d'une force constante) soit réalisée, il est indispensable d'observer les conditions initiales strictement déterminées de son mouvement. Dans le cas contraire surgit une *précession pseudorégulière*, lors de laquelle l'angle de nutation ϑ varie périodiquement. Plus grande est la vitesse angulaire propre ω du gyroscope, plus petite est l'amplitude des oscillations l'angle ϑ et du mouvement du gyroscope leur correspondant qu'on appelle *nutation*.

Si l'axe de symétrie dynamique d'un gyroscope pesant ayant trois degrés de liberté est disposé verticalement et que son centre d'inertie soit situé au-dessus de son point d'appui, la rotation du gyroscope autour de cet axe sera stable si

$$J_3\omega > 2\sqrt{PJ_1r_c}.$$

5° Gyroscope ayant deux degrés de liberté. La réduction du nombre de degrés de liberté du gyroscope de trois à deux entraîne une perte complète de la stabilité du gyroscope indépendamment de la valeur de sa vitesse angulaire propre. La force extérieure **F**, appliquée à un axe de symétrie dynamique Oz' du gyroscope à deux degrés de liberté et dirigée dans le plan perpendiculaire à son second axe de rotation Ox, détermine la rotation libre du gyroscope autour de Ox dans la direction d'action de la force. Ceci est lié au fait que sous l'action de la force **F** et de la rotation propre du gyroscope dans les paliers fixés de façon immobile de l'axe Ox surgit un couple de forces, qui est appliqué au gyroscope et qui crée un moment **M** coïncidant en direction avec la force **F** et engendrant une rotation dans la même direction de l'axe Oz'.

Grâce à la rotation diurne de la Terre, l'axe de symétrie dynamique du gyroscope à deux degrés de liberté, tournant sans entraves autour d'un axe vertical, se trouve dans le plan du méridien géographique de façon que l'angle formé par les vitesses angulaires de la Terre et du gyroscope soit un angle aigu. Cette propriété du gyroscope a été utilisée en premier par Foucault pour la démonstration expérimentale de l'existence de la rotation diurne de la Terre.

CHAPITRE 5

Eléments de mécanique analytique

1. Notions principales et définitions

1° On appelle *coordonnées généralisées* d'un système mécanique les paramètres indépendants $q_1, q_2, \ldots, q_l$ qui déterminent complètement la configuration de ce système, c'est-à-dire la position de tous ses points par rapport au référentiel.

Les *vitesses généralisées* du système sont les dérivées totales par rapport au temps des coordonnées généralisées du système:

$$\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt} \quad (i = 1, 2, \ldots, l).$$

2° Le *nombre de degrés de liberté* d'un système mécanique est le nombre s de mouvements possibles indépendants de ce système. Pour un système holonome (p. 22) le nombre de degrés de liberté est celui de coordonnées généralisées de ce système: $s = l$. Dans le cas d'un système non holonome (p. 22), $s = l - k$, où k est le nombre de liaisons non holonomes imposées à ce système. Par la suite nous ne considérerons que des systèmes holonomes.

3° On considère comme *déplacements virtuels* d'un système mécanique toute variation infiniment petite de la configuration du système, compatible avec les liaisons imposées à ce système à l'instant t. Si les liaisons sont indépendantes du temps (p. 22), le déplacement réel du système en un intervalle de temps infiniment petit dt coïncide avec l'un de ses déplacements virtuels. Dans le cas de liaisons dépendantes du temps, le déplacement réel du système ne coïncide avec aucun des déplacements virtuels, parce que dans l'intervalle de temps dt les conditions imposées par les liaisons varient.

Le déplacement virtuel $\delta \mathbf{r}_k$ du k-ième point matériel du système à s degrés de liberté est:

$$\delta \mathbf{r}_k = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i,$$

où δq_i sont les accroissements infiniment petits des coordonnées généralisées, correspondant au déplacement virtuel du système et appelés variations isochrones des coordonnées généralisées.

4° Le travail élémentaire *(travail virtuel)* effectué, lors d'un déplacement virtuel, par les forces agissant sur tous les n points matériels d'un système holonome à s degrés de liberté est:

$$\delta A = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k = \sum_{i=1}^{s} Q_i \delta q_i,$$

où $\mathbf{F}_k = \mathbf{F}_k^{(a)} + \mathbf{R}_k$; $\mathbf{F}_k^{(a)}$ et $\mathbf{R}_k$ sont respectivement les résultantes des forces appliquées et des forces de liaison (p. 40), imposées au k-ième point matériel. La grandeur

$$Q_i = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i}$$

est appelée *force généralisée*, conjuguée à la coordonnée généralisée q_i.

Les liaisons sont dites *sans frottement* (ou *idéales*) si la somme des travaux élémentaires des forces de ces liaisons lors de tout déplacement virtuel du système est nulle:

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{R}_k^{\text{id}} \cdot \delta \mathbf{r}_k \equiv 0.$$

Cette condition est valable, par exemple, pour un corps glissant sur une surface parfaitement lisse ou roulant sans glisser sur une surface parfaitement rugueuse.

Dans le cas de liaisons sans frottement (idéales) les forces généralisées s'expriment seulement par des forces appliquées:

$$Q_i = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k^{(a)} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i}.$$

Si toutes les forces $\mathbf{F}_k^{(a)}$ sont conservatives, on a:

$$Q_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i},$$

où U est l'énergie potentielle totale (externe et interne, p. 96) du système.

Dans le cas général

$$Q_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i} + Q'_i,$$

où $Q'_i = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{f}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i}$ est la *force non potentielle généralisée*, $\mathbf{f}_k$ la résultante de toutes les forces non potentielles agissant sur le k-ième point matériel du système.

5° On appelle *fonction de Lagrange (lagrangien)* L la différence entre les énergies cinétique T et potentielle U du système. Elle est fonction des coordonnées généralisées, des vitesses généralisées et du temps:

$$L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - U(q, t).$$

Ici sous $\dot{q}$ et q on comprend tout l'ensemble de s coordonnées généralisées et s vitesses généralisées du système holonome.

L'énergie cinétique d'un système holonome est:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{v}_k^2 = a + \sum_{i=1}^{s} a_i \dot{q}_i + \sum_{i,j=1}^{s} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j,$$

où
$$a = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k \left(\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t}\right)^2; \quad a_i = \sum_{k=1}^{n} m_k \left(\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i}\right);$$

$$a_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k \left(\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_j}\right);$$

m_k est la masse du k-ième point du système, $\mathbf{r}_k$ et $\mathbf{v}_k = d\mathbf{r}_k/dt$ le rayon vecteur et la vitesse de ce point.

Dans le cas d'un système libre ou d'un système à liaisons indépendantes du temps (p. 22) $\frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t} = 0$ et $a = a_i = 0$, c'est-à-dire que l'énergie cinétique du système ne dépend pas explicitement du temps et est une fonction homogène du second degré des vitesses généralisées:

$$T = \sum_{i,j=1}^{s} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j = T(q, \dot{q}).$$

En particulier, ce résultat est valable pour les systèmes conservatifs (p. 72), puisque ces systèmes sont libres ou bien assujettis à des liaisons sans frottement et indépendantes du temps. L'énergie potentielle et la fonction de Lagrange d'un système conservatif quelconque ne dépendent pas explicitement du temps:

$$L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - U(q).$$

EXEMPLE 1. Un point matériel de masse m se déplace dans le champ de forces centrales. La fonction de Lagrange en coordonnées cartésiennes est:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right),$$

en coordonnées cylindriques:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - U\left(\sqrt{\rho^2 + z^2}\right),$$

en coordonnées sphériques:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2) - U(r).$$

EXEMPLE 2. Dans un système de deux points matériels de masses m_1 et m_2, dont les rayons vecteurs du mouvement relatif et du centre d'inertie sont respectivement:

$$\mathbf{r}(x, y, z) = \mathbf{r}_1\,(x_1, y_1, z_1) - \mathbf{r}_2\,(x_2, y_2, z_2) \text{ et } \mathbf{r}_0\,(X_0, Y_0, Z_0),$$

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2}(\dot{X}_0^2 + \dot{Y}_0^2 + \dot{Z}_0^2) +$$

$$+ \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U\,(x, y, z).$$

6° L'*impulsion généralisée* p_i, conjuguée à la coordonnée généralisée q_i, est la dérivée partielle de la fonction lagrangienne L par rapport à la vitesse généralisée $\dot{q}_i$:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}.$$

EXEMPLE 1. Pour un point matériel de masse m les impulsions généralisées, conjuguées aux coordonnées x, y, z, coïncident avec les projections de l'impulsion en coordonnées cartésiennes:

$$p_x = m\dot{x}, \quad p_y = m\dot{y}, \quad p_z = m\dot{z}.$$

EXEMPLE 2. L'impulsion généralisée p_φ, conjuguée à la coordonnée φ en coordonnées cylindriques, est le moment cinétique par rapport à l'axe Oz

$$p_\varphi = m\rho^2\dot{\varphi}.$$

2. Equations de Lagrange de seconde espèce

1° Si le mouvement d'un système holonome est décrit par les coordonnées généralisées $q_1, \ldots, q_i$ et par les vitesses généralisées $q_1, \ldots, q_i$, les équations du mouvement sont de la forme:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, s),$$

où T est l'énergie cinétique du système et Q_i la force généralisée.

Ces équations sont appelées *équations de Lagrange de seconde espèce*. Si le mouvement a lieu dans un champ potentiel, les équations de Lagrange s'écrivent:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial q_i},$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}(T - U) - \frac{\partial}{\partial q_i}(T - U) = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0.$$

EXEMPLE 1. Le mouvement d'un point matériel de masse m dans un champ potentiel se décrit par les équations de Lagrange, identiques aux équations du mouvement de Newton (p. 43):

$$m\ddot{x} = F_x, \quad m\ddot{y} = F_y, \quad m\ddot{z} = F_z,$$

où

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \text{ et } F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}.$$

EXEMPLE 2. Les équations de Lagrange pour les coordonnées du centre d'inertie d'un système isolé de deux corps sont:

$$\ddot{X}_0 = \ddot{Y}_0 = \ddot{Z}_0 = 0.$$

Le centre d'inertie effectue un mouvement rectiligne uniforme indépendant du mouvement relatif des deux corps.

EXEMPLE 3. Les équations de Lagrange pour un mouvement relatif d'un système isolé de deux points matériels sont:

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\ddot{y} = -\frac{\partial U}{\partial y} \text{ et } \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\ddot{z} = -\frac{\partial U}{\partial z},$$

où U est l'énergie potentielle réciproque des points $(U = (U\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}))$, $x = x_1 - x_2$, $y = y_1 - y_2$ et $z = z_1 - z_2$.

Ainsi, le problème du mouvement relatif d'un système isolé de deux points matériels en interaction se ramène au problème du mouvement d'un point matériel de masse $m_{\text{réd}} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, appelée *masse réduite*, dans un champ de forces potentiel extérieur $\mathbf{F} = -\operatorname{grad} U$.

2° Si les forces agissant sur un système holonome ne sont pas potentielles, les forces généralisées peuvent être représentées par le «*potentiel généralisé*» $U^*(q, \dot{q})$ sous la forme:

$$Q_i = -\frac{\partial U^*}{\partial q_i} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U^*}{\partial \dot{q}_i}\right),$$

les équations de Lagrange pour le système sont aussi de la forme:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0,$$

où $L = T - U^*$.

EXEMPLE. Pour une particule de charge q et de masse m, se déplaçant dans un champ électromagnétique,

$$U^* = q\varphi - q\,\mathbf{A}\cdot\mathbf{v} \text{ et } L = \frac{mv^2}{2} - q\varphi + q\,\mathbf{A}\cdot\mathbf{v},$$

où φ et $\mathbf{A}$ sont les potentiels scalaire et vecteur du champ (p. 525).

3° Les équations de Lagrange pour un système holonome arbitraire sollicité par des forces potentielles ou non potentielles sont de la forme:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i',$$

où Q_i' est la force non potentielle généralisée (p. 97). En particulier, pour un système de points matériels soumis aux forces de frottement, proportionnelles aux vitesses du mouvement des points,

$$Q_i' = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i},$$

où $\Phi = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j$ est la *fonction dissipative* (de Rayleigh).

3. Fonction de Hamilton. Equations canoniques de Hamilton

1° On appelle *fonction de Hamilton (hamiltonien)* d'un système holonome à s degrés de liberté la fonction des coordonnées et impulsions généralisées du système et du temps de la forme:

$$H(q, p, t) = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - L,$$

où tous les $\dot{q}_i$ et la fonction de Lagrange L sont exprimés par les coordonnées et les impulsions généralisées.

Pour un système conservatif (p. 72) les fonctions de Lagrange et de Hamilton ne dépendent pas explicitement du temps et $\frac{dH}{dt} = 0$, donc $H = \text{const}$. En outre, dans ce cas

$$\sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T$$

en vertu du théorème d'Euler pour les fonctions homogènes du second degré. Par conséquent,

$$H = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L = T + U.$$

La fonction hamiltonienne du système conservatif est son énergie mécanique totale.

EXEMPLE 1. Pour une particule de masse m dans le champ potentiel $U(x, y, z)$

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U(x, y, z).$$

EXEMPLE 2. Dans le cas d'oscillateur harmonique linéaire (p. 119)

$$T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 = \frac{p^2}{2m}, \qquad U = \frac{ax^2}{2},$$

où a est le coefficient d'élasticité (p. 121),

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{ax^2}{2}.$$

EXEMPLE 3. Planète de masse m décrivant une orbite elliptique dans le champ d'attraction du Soleil (p. 89).

En coordonnées polaires

$$p_\rho = m\dot{\rho}, \qquad p_\varphi = m\rho^2\dot{\varphi},$$

$$T = \frac{m}{2}\,(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2) = \frac{1}{2m}\left(p_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}\,p_\varphi^2\right).$$

L'énergie potentielle de la planète est:

$$U(\rho) = -f\frac{mM}{\rho},$$

où f est la constante de la gravitation (p. 52), M la masse du Soleil.

La fonction de Hamilton est:

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}p_\varphi^2\right) - f\frac{mM}{\rho}.$$

2° On appelle *équations canoniques de Hamilton* d'un système holonome à s degrés de liberté, sollicité uniquement par des forces potentielles, l'ensemble de $2s$ équations différentielles du premier ordre:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, s).$$

Connaissant l'état initial du système, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs de q_i et p_i pour $t = 0$, il est possible, par intégration de ces équations, de déterminer l'état du système à un instant arbitraire t, autrement dit, l'ensemble des valeurs de $q_i(t)$ et $p_i(t)$. Les équations canoniques de Hamilton traduisent le *principe classique de causalité.*

Dans le cas où les fonctions de Lagrange et de Hamilton ne dépendent pas explicitement d'une coordonnée généralisée q_k quelconque, cette coordonnée est dite *cyclique.* Il suit des équations canoniques de Hamilton que l'impulsion généralisée p_k conjuguée à la coordonnée cyclique q_k ne varie pas au cours du mouvement du système:

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} = 0 \text{ et } p_k = \text{const.}$$

Les équations canoniques de Hamilton écrites ci-dessus sont également valables pour un système holonome possédant un «potentiel généralisé» (p. 100).

Pour un système holonome arbitraire les équations canoniques de Hamilton sont de la forme:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \text{ et } \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + Q'_i,$$

où Q'_i est une force non potentielle généralisée (p. 97).

3° Pour rendre plus illustrative la représentation de la variation de l'état du système, on introduit un espace multidimensionnel de toutes les coordonnées généralisées q_i et de toutes les impulsions généralisées $p_i (i = 1, 2, ..., s)$ du système considéré. Un espace à $2s$ dimensions est appelé *espace des phases* ou *espace* Γ. L'espace à s dimensions des coordonnées généralisées q_i est nommé *espace de configuration*. L'état du système est représenté par un point dans l'espace des phases correspondant à ce système (*point figuratif* ou *point de l'espace des phases*). La variation de l'état du système est représentée par la trajectoire du point figuratif dans l'espace des phases (*trajectoire de l'espace des phases*). La trajectoire de l'espace des phases ne peut se couper, car ce fait signifierait que la solution des équations de Hamilton n'est pas univoque. L'espace des phases n'a rien de commun avec l'espace réel et représente un schéma géométrique à l'aide duquel les lois de la variation de l'état du système peuvent être formulées en langue géométrique.

EXEMPLE 1. Oscillateur harmonique linéaire (p. 119), se mouvant autour de la position d'équilibre $q = 0$, sous l'action d'une force d'élasticité $F = -a_e q$, où a_e est le coefficient d'élasticité. L'équation du mouvement

$$m\ddot{q} = -a_e q$$

donne

$$q = A \sin(\omega t + \varphi), \quad p = m\omega A \cos(\omega t + \varphi),$$

où A est l'amplitude, φ la phase initiale des oscillations (p. 117), $\omega = 2\pi\nu = \sqrt{a/m}$, ν la fréquence des oscillations. En éliminant le temps, on trouve la trajectoire de l'espace des phases:

$$\left(\frac{q}{A}\right)^2 + \frac{p^2}{(m\omega A)^2} = 1.$$

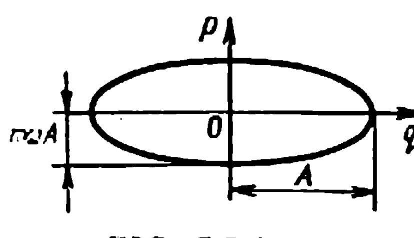


FIG. I.5.1.

La trajectoire de l'espace des phases est une ellipse de demi-axes $a = A$ et $b = m\omega A$. Le plan (p, q) (fig. I.5.1.) représente l'espace des phases de l'oscillateur

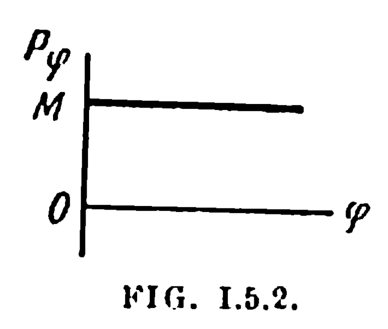


FIG. I.5.2.

L'énergie mécanique totale de l'oscillateur est:

$$E = \frac{aA^2}{2}.$$

Elle est liée avec la surface de l'ellipse $S = \oint p\,dq = \pi ab = \pi m\omega A^2$:

$$E = \frac{\omega}{2\pi} S = \nu \oint p\,dq.$$

La surface de l'ellipse est de la même dimension que l'action (p. 106).

EXEMPLE 2. Le *rotateur plan* représente une particule tournant dans le plan à une distance donnée de l'origine des coordonnées. En tant que coordonnée généralisée il est commode de choisir l'angle φ que fait le rayon vecteur **r** avec l'axe Ox. La fonction de Hamilton H coïncide avec l'énergie cinétique et la fonction de Lagrange:

$$H = T = \frac{mv^2}{2} = \frac{mr^2\dot\varphi^2}{2} = \frac{J\dot\varphi^2}{2},$$

où $\dot\varphi$ est la vitesse angulaire et $J = mr^2$ le moment d'inertie.

L'impulsion généralisée p_φ, conjuguée à la coordonnée φ, est (p. 100):

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = mr^2\dot\varphi = J\dot\varphi,$$

c'est-à-dire que p_φ est le moment cinétique. On peut exprimer H de la manière suivante: $H = p_\varphi^2/2J$ et en vertu des équations canoniques de Hamilton:

$$\dot p_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0, \quad \dot\varphi = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2}.$$

La première des équations donne $p_\varphi = M = \text{const}$, autrement dit, la loi de la conservation du moment cinétique (p. 84). Le plan (p_φ, φ) (fig. I.5.2) représente l'espace des phases. La trajectoire de l'espace des phases est une droite $p_\varphi = M$.

4. Notion de principes variationnels en mécanique

1° Les équations du mouvement du système mécanique ou les conditions d'équilibre de celui-ci peuvent être obtenues comme conséquences de certaines règles générales, appelées *principes variationnels de la mécanique*. Les principes variationnels montrent en

quoi diffèrent le mouvement ou l'état réel du système mécanique de tous ses autres mouvements ou états virtuels (compatibles avec les liaisons). Les principes variationnels exprimant cette différence pour le mouvement ou l'état du système en chaque instant donné sont appelés ***principes différentiels.*** Ils sont les principes les plus généraux de la mécanique, applicables aux systèmes holonomes et non holonomes. Les principes variationnels établissant la différence entre le déplacement réel du système pour un intervalle de temps fini et tous les autres déplacements virtuels sont appelés ***principes intégraux.*** Les principes variationnels intégraux ne sont valables que pour les systèmes holonomes. Mais, habituellement, on les formule relativement aux systèmes holonomes conservatifs.

2° Principes variationnels différentiels fondamentaux.

Principe des déplacements virtuels: pour l'équilibre de tout système à liaisons sans frottement, il faut et il suffit que la somme des travaux élémentaires des forces appliquées à ce système lors d'un déplacement virtuel arbitraire soit nulle (si toutes les liaisons sont bilatérales) ou inférieure à zéro (si certaines liaisons sont unilatérales), autrement dit, en notations données, p. 96,3° et 4°:

$$\delta A^{(a)} = \sum_{k=1}^{n} F_k^{(a)} \cdot \delta \mathbf{r}_k = \sum_{i=1}^{l} Q_i \delta q_i \leqslant 0,$$

où l est le nombre de coordonnées généralisées du système.

En particulier, pour un système holonome à s degrés de liberté assujetti à des liaisons bilatérales sans frottement, toutes les variations δq_i sont indépendantes et les conditions d'équilibre sont de la forme:

$$Q_i = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, s).$$

Principe de d'Alembert-Lagrange: pour le déplacement réel d'un système mécanique arbitraire soumis à des liaisons bilatérales sans frottement, la somme de tous les travaux élémentaires de toutes les forces appliquées et de toutes les forces d'inertie[1]) lors de tout déplacement virtuel du système en chaque instant donné est nulle:

$$\sum_{k=1}^{n} \left(F_k^{(a)} - m_k \frac{d^2 \mathbf{r}_k}{dt^2} \right) \cdot \delta \mathbf{r}_k = 0,$$

---

[1]) On a en vue les forces d'inertie de d'Alembert étant donné que le système de référence est supposé galiléen (p. 60).

où $d^2\mathbf{r}_k/dt^2$ est l'accélération du k-ième point matériel de masse m_k et $-m_k \frac{d^2\mathbf{r}_k}{dt^2}$ la force d'inertie de d'Alembert.

En coordonnées généralisées

$$\sum_{i=1}^{l} \left\{\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i}\right] - Q_i\right\} \delta q_i = 0,$$

où T est l'énergie cinétique du système.

Le principe des déplacements virtuels et le principe de d'Alembert-Lagrange peuvent également être appliqués aux systèmes soumis à des liaisons avec frottement si les forces de frottement correspondant à ces liaisons sont mises au nombre des forces appliquées.

3° On appelle *action (action hamiltonienne)* l'intégrale de Lagrange L par rapport au temps:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L\, dt,$$

où t_0 est l'instant initial lors duquel le système occupe la position caractérisée par l'ensemble de s valeurs de coordonnées généralisées q_{i0}, t_1 l'instant lors duquel la position du système est définie par l'ensemble de s coordonnées q_{i1}.

On appelle *action réduite* l'intégrale de la forme:

$$S_0 = \int_{t_0}^{t_1} (H + L)\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i\, dt,$$

où H est la fonction de Hamilton d'un système holonome à s degrés de liberté et p_i l'impulsion généralisée (p. 98). En particulier, pour un système holonome conservatif $H = \text{const}$ et

$$S_0 = \int_{t_0}^{t_1} 2T dt = H(t_1 - t_0) + S,$$

où T est l'énergie cinétique du système, S l'action.

4° Principes variationnels intégraux de la mécanique.

Principe de la moindre action (principe de Hamilton): le déplacement réel d'un système holonome conservatif de la position A_0 (q_{i0})

à l'instant t_0, à la position $A_1(q_{i1})$, à l'instant t_1, diffère de tous les déplacements virtuels de ce système de A_0 à A_1 dans le même intervalle $t_1 - t_0$ en ce que pour lui l'action est stationnaire, donc

$$\delta S \equiv \delta \int_{t_0}^{t_1} L\, dt = 0 \quad \text{ou bien} \quad \int_{t_0}^{t_1} \delta L\, dt = 0.$$

Ici δ est le symbole de la variation isochrone, autrement dit, lors de la variation de l'action, le temps t (en particulier, t_0 et t_1), lui, ne varie pas. En outre, on suppose que les positions initiale A_0 et finale A_1 du système sont fixes, c'est-à-dire que $\delta q_{i0} = \delta q_{i1} = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$.

On peut généraliser le principe de Hamilton à un système holonome arbitraire. Dans ce cas son écriture mathématique est de la forme:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} T\, dt + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{s} Q_i \delta q_i \; dt = 0$$

ou

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\delta L + \sum_{i=1}^{s} Q_i' \delta q_i\right) dt = 0,$$

où Q_i est la force généralisée et Q_i' la force non potentielle généralisée.

Pour un système holonome non conservatif avec un potentiel généralisé U^*, le principe de Hamilton se traduit par

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L\, dt = 0, \text{ où } L = T - U^*.$$

Principe de Maupertuis-Lagrange: le déplacement réel d'un système holonome conservatif de la position $A_0(q_{i0})$ à la position $A_1(q_{i1})$ diffère de tous les déplacements isoénergétiques virtuels de ce système de A_0 à A_1 en ce que pour lui l'action réduite est minimale, donc

$$\Delta S_0 \equiv \Delta \int_{t_0}^{t_1} 2T\, dt = 0.$$

Ici Δ est le symbole de la variation totale[1]. Pour la trouver, on fait varier non seulement q_i et $\dot{q}_i$ (comme pour la variation de δ) mais aussi le temps, c'est-à-dire les limites d'intégration. En outre, on suppose que l'énergie mécanique totale du système $E = H =$ $=$ const, et les positions initiale A_0 et finale A_1 du système sont fixes, c'est-à-dire que $\Delta q_{i0} = \Delta q_{i1} = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$.

Principe de Maupertuis-Jacobi pour le système holonome conservatif:

$$\delta \int_{A_0}^{A_1} \sqrt{2(E-U)} \sqrt{2 \sum_{i,\, j=1}^{s} a_{ij}\, dq_i\, dq_j} = 0.$$

Ce principe découle du principe de Maupertuis-Lagrange, puisque pour le système conservatif (p. 98) $\sqrt{2T} = \sqrt{2(E-U)}$ et

$$\sqrt{2T}\, dt = \sqrt{2 \sum_{i,\, j=1}^{s} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j dt^2} = \sqrt{2 \sum_{i,\, j=1}^{s} a_{ij} dq_i dq_j}.$$

En particulier, pour un point matériel libre de masse m avec l'énergie totale E, se mouvant dans un champ de forces potentiel stationnaire,

$$\delta \int_{A_0}^{A_1} \sqrt{2m(E-U)}\, ds = 0,$$

où $U(x, y, z)$ est l'énergie potentielle du point, ds l'élément de longueur du chemin parcouru par le point. Cette relation coïncide avec l'expression mathématique du principe de Fermat (p. 651) pour la propagation du rayon lumineux dans un milieu isotrope, optiquement non homogène avec un indice de réfraction $n(x, y, z) =$ $= C_1 \sqrt{E - U(x, y, z)}$, où C_1 est le facteur constant de proportion-

---

[1]) La relation entre les variations totale et isochrone d'une fonction arbitraire $f(q, t)$ s'exprime de la sorte:

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial f}{\partial q_i} \Delta q_i + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial f}{\partial q_i} \delta q_i +$$

$$+ \left(\sum_{i=1}^{s} \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial t} \right) \Delta t = \delta f + \frac{df}{dt} \Delta t,$$

nalité. Il existe donc une ***analogie optique mécanique***: à chaque problème sur le mouvement du point dans un champ potentiel stationnaire correspond un problème défini d'optique géométrique, et inversement.

5. Transformations canoniques

1° Les coordonnées généralisées $q_1, \ldots, q_s$ et les impulsions généralisées $p_1, \ldots, p_s$ d'un système holonome jouent dans les équations canoniques de Hamilton le rôle de variables indépendantes. Les transformations de ces $2s$ variables en nouvelles variables indépendantes

$$q_i' = q_i'(q, p, t) \quad \text{et} \quad p_i' = p_i'(q, p, t)$$

sont appelées *canoniques* si les équations du mouvement du système en nouvelles variables ont, elles aussi, la forme d'équations canoniques de Hamilton[1]):

$$\dot{q}' = \frac{\partial H'}{\partial p_i'} \quad \text{et} \quad \dot{p}_i' = -\frac{\partial H'}{\partial q_i'} \quad (i = 1, \ldots, s),$$

où $H' = H'(q', p', t)$ est la nouvelle fonction de Hamilton.

2° Condition nécessaire et suffisante pour que la transformation soit canonique:

$$\left[\sum_{i=1}^{s} p_i\, dq_i - H(q, p, t)\, dt\right] - \left[\sum_{i=1}^{s} p_i'\, dq_i' - H'(q', p', t)\, dt\right] = dF,$$

où F est la ***fonction génératrice de transformation canonique.*** La fonction génératrice peut être écrite sous l'une des quatre formes suivantes:

$$F_1(q, q', t); \quad F_2(q, p', t); \quad F_3(p, q', t) \quad \text{et} \quad F_4(p, p', t).$$

Si $F = F_1$, on a:

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}, \quad p_i' = -\frac{\partial F_1}{\partial q_i'} \quad \text{et} \quad H' = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}.$$

Si $F = F_2$, on a:

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, \quad q_i' = \frac{\partial F_2}{\partial p_i'} \quad \text{et} \quad H' = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}.$$

---

[1]) On considère les systèmes sur lesquels n'agissent que des forces potentielles.

Si $F = F_3$, on a:

$$q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i}, \quad p'_i = -\frac{\partial F_3}{\partial q'_i} \text{ et } H' = H + \frac{\partial F_3}{\partial t}.$$

Si $F = F_4$, on a:

$$q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i}, \quad q'_i = \frac{\partial F_4}{\partial p'_i} \text{ et } H' = H + \frac{\partial F_4}{\partial t}.$$

EXEMPLE 1. Toute transformation des coordonnées généralisées $q'_i = f_i\,(q, t)$ nommée *transformation ponctuelle* est canonique, puisqu'elle s'obtient à l'aide de la fonction génératrice $F_2\,(q, p', t) = \sum_{i=1}^{s} f_i\,(q_1, \ldots, q_s, t)\,p'_i$. Par conséquent, les équations canoniques de Hamilton sont invariantes envers le choix des coordonnées généralisées.

EXEMPLE 2. On réalise à l'aide de la fonction génératrice $F_1\,(q, q', t) = \sum_{i=1}^{s} q_i q'_i$ la transformation canonique: $q'_i = p_i$ et $p'_i = -q_i$ conduisant (au signe près) au changement de nom réciproque es coordonnées et des impulsions généralisées. Aussi appelle-t-on souvent q_i et p_i *grandeurs conjuguées canoniques*.

EXEMPLE 3. On peut considérer la variation des grandeurs q_i et p_i au cours du mouvement d'un système comme une transformation canonique continue dont la fonction génératrice à chaque instant est la fonction $F_2(q, p', t) = \sum_{i=1}^{s} q_i p'_i + H(q, p', t)\,dt$:

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = p'_i + \frac{\partial H}{\partial q_i}\,dt \text{ et } q'_i + \frac{\partial F_2}{\partial p'_i} = q_i + \frac{\partial H}{\partial p'_i}\,dt;$$

p'_i et q'_i différant de p_i et q_i par des valeurs infiniment petites, on peut admettre, aux valeurs petites du premier ordre près, $H(q, p', t) = H(q, p, t)$ et $\frac{\partial H}{\partial p'_i} = \frac{\partial H}{\partial p_i}$, de sorte que

$$p'_i = p_i - \frac{\partial H}{\partial q_i}\,dt = p_i + \dot{p}_i\,dt = p_i + dp_i$$

et

$$q'_i = q_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\,dt = q_i + \dot{q}_i\,dt = q_i + dq_i.$$

3° Lors des transformations canoniques le volume de l'espace des phases reste le même: $\int d\Gamma = \int d\Gamma'$, où

$$d\Gamma = dq_1 \ldots\ dq_s \cdot dp_1 \ldots\ dp_s,\quad d\Gamma' = dq_1' \ldots\ dq_s' \cdot dp_1' \ldots\ dp_s',$$

et l'intégration est étendue à un domaine arbitraire de l'espace des phases des variables (q, p) et au domaine correspondant de l'espace des phases des variables (q', p').

Il en résulte (cf. 2°, exemple 3) le *théorème de Liouville*: si à l'instant t_0 les points figuratifs, correspondant aux différents états initiaux du système dont le mouvement est décrit par les équations canoniques de Hamilton, occupent sans discontinuer l'élément de volume $d\Gamma_0$ de l'espace des phases, à un instant arbitraire t ils occuperont sans discontinuer l'élément de volume $d\Gamma$ de l'espace des phases et dans ce cas $d\Gamma = d\Gamma_0$.

4° Dans chaque cas concret, pour le système dont la fonction hamiltonienne H ne varie pas au cours du mouvement, il est possible de réaliser une transformation canonique des coordonnées et des impulsions généralisées telle que toutes les coordonnées généralisées q_i' soient cycliques (p. 102). Toutes les impulsions généralisées sont alors constantes:

$$p_i' = a_i \text{ et } H' = H'(a_1, \ldots, a_s), \text{ de sorte que}$$

$$\dot{q}_i' = \frac{\partial H'}{\partial a_i} = \omega_i\ (a_1, \ldots, a_s) = \text{const et } q_i = \omega_i t + \alpha_i,$$

où α_i sont les constantes d'intégration définies par les conditions initiales.

EXEMPLE. Oscillateur harmonique linéaire. La fonction hamiltonienne est $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2 = E$, où m, E et ω sont respectivement la masse, l'énergie et la pulsation propre de l'oscillateur. La transformation canonique réalisée à l'aide de la fonction génératrice $F_1\ (q, q', t) = \frac{m\omega}{2} q^2 \operatorname{cotg} q'$ est de la forme:

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q} = m\omega q \operatorname{cotg} q' \quad\text{et}\quad p' = -\frac{\partial F_1}{\partial q'} = \frac{m\omega q^2}{2 \sin^2 q'}$$

ou bien

$$q = \sqrt{\frac{2p'}{m\omega}} \sin q' \quad\text{et}\quad p = \sqrt{2m\omega p'} \cos q'.$$

Le nouveau hamiltonien $H' = H + \frac{\partial F_1}{\partial t} = H = p'\omega \cos^2 q' +$ $+ p' \omega \sin^2 q' = \omega p'$. Par conséquent, q' est une coordonnée cyclique, $p' = \frac{F}{\omega} = \text{const}$,

$$\dot{q}' = \frac{\partial H'}{\partial p'} = \omega, \; q' = \omega t + \alpha \text{ et } q = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin (\omega t + \alpha).$$

6. Lois de conservation

1° Les solutions des équations de Lagrange de seconde espèce pour un système mécanique à s degrés de liberté contiennent $2s$ constantes arbitraires et peuvent être représentées sous la forme:

$$q_i = q_i (t, c_1, c_2, \dots, c_{2s}),$$

$$(i = 1, 2, \dots, s).$$

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i (t, c_1, c_2, \dots, c_{2s})$$

Entre ces $2s$ équations il est possible d'éliminer le temps t et de s'assurer que pour chaque système mécanique existent des fonctions des coordonnées généralisées q_i et des vitesses généralisées $\dot{q}_i$, qui restent constantes au cours du mouvement. Ces fonctions sont appelées *intégrales des équations du mouvement*. La recherche de ces intégrales est le but principal de la mécanique. Parmi les intégrales du mouvement certaines sont les plus importantes et leur constance est liée aux propriétés des formes fondamentales d'existence de la matière: l'espace et le temps. Les intégrales du mouvement sont additives: leurs valeurs pour un système composé de plusieurs parties n'interagissant pas entre elles sont la somme des valeurs de chaque partie.

2° L'intégrale première du mouvement d'un système fermé arbitraire est son énergie totale *(loi de la conservation et de la transformation de l'énergie)*. Cette loi découle de l'homogénéité du temps, c'est-à-dire de l'indépendance des lois du mouvement d'un système du choix de l'origine du temps. En particulier, pour un système conservatif, de l'homogénéité du temps découle la loi de la conservation de l'énergie mécanique totale de ce système. En effet, grâce à l'homogénéité du temps, la fonction lagrangienne L, déterminant

la loi du mouvement d'un système conservatif, ne dépend pas explicitement du temps et

$$\frac{dL}{dt}=\sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d\dot{q}_i}{dt}\right).$$

A l'aide des équations de Lagrange cette égalité peut être représentée sous la forme:

$$\frac{dL}{dt}=\sum_{i=1}^{s}\left[\dot{q}_i\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d\dot{q}_i}{dt}\right]=\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i$$

ou bien

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i-L\right]=0.$$

D'où il résulte que

$$\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i-L=2T-L=T+U=\text{const},$$

autrement dit, l'énergie mécanique totale du système conservatif $E=T(q,\dot{q})+U(q)$ est une intégrale du mouvement. L'énergie E du système est additive. Ceci découle de l'additivité de la fonction lagrangienne de laquelle E dépend linéairement. La loi de la conservation de l'énergie mécanique totale est vraie pour tout système conservatif aussi bien fermé que non fermé.

3° Le vecteur impulsion d'un système fermé est également une intégrale du mouvement. La loi de la conservation de l'impulsion découle de l'homogénéité de l'espace. L'homogénéité de l'espace signifie que la translation dans cet espace de tout système mécanique fermé ne change pas les propriétés mécaniques du système, c'est-à-dire laisse sa fonction de Lagrange invariable. La fonction lagrangienne pour un système fermé de N points matériels est:

$$L=\sum_{k=1}^{N}\frac{m_k}{2}\mathbf{v}_k^2-U(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\ldots,\mathbf{r}_N),$$

où $\mathbf{r}_k$ est le rayon vecteur du k-ième point de masse m_k et $\mathbf{v}_k=\frac{d\mathbf{r}_k}{dt}$ la vitesse de ce point. La variation de la fonction de Lagrange

lors d'une translation infiniment petite du système, déterminée par le vecteur déplacement $\delta \mathbf{g}$, c'est-à-dire lors de la substitution de $\mathbf{r}_k + \delta \mathbf{g}$ à tous les $\mathbf{r}_k$, est:

$$\delta L = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_k} \cdot \delta \mathbf{g} = \delta \mathbf{g} \cdot \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_k}.$$

$\delta \mathbf{g}$ étant arbitraire, l'exigence que $\delta L = 0$ signifie que $\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_k} = 0$. En vertu des équations de Lagrange $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_k} = \mathbf{f}_k$, où $\mathbf{f}_k$ est la résultante de toutes les forces non potentielles sollicitant le k-ième point du système. Pour le système fermé ces forces sont des forces intérieures, donc

$$\sum_{k=1}^{N} \mathbf{f}_k = 0 \text{ et } \sum_{k=1}^{N} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_k}\right) = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_k} = 0,$$

ou

$$\mathbf{P} = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_k} = \sum_{k=1}^{N} m_k \mathbf{v}_k = \text{const.}$$

L'impulsion du système fermé égale à la somme vectorielle des impulsions de tous ses points matériels est une intégrale des équations du mouvement du système.

4° L'intégrale du mouvement d'un système fermé est aussi le vecteur moment d'impulsion. La loi de la conservation du moment d'impulsion est liée à l'isotropie de l'espace. Les propriétés mécaniques du système fermé ne varient pas lors d'une rotation quelconque du système dans l'espace isotrope. Dans ce cas la fonction de Lagrange du système doit rester invariable. Lors de la rotation du système, les directions des rayons vecteurs et des vitesses de toutes les particules changent, tous les vecteurs $\mathbf{r}_k$ et $\mathbf{v}_k$ se transformant d'après la même loi:

$$\delta \mathbf{r} = \delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}, \quad \delta \mathbf{v} = \delta \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{v},$$

où $\delta \boldsymbol{\varphi}$ est le vecteur rotation infiniment petite. Sa valeur absolue est égale à l'angle de rotation $\delta \varphi$ et sa direction coïncide avec l'axe de rotation correspondant au système de référence dextrogyre. La

variation de la fonction lagrangienne lors d'une rotation infiniment petite du système mécanique fermé est:

$$\delta L = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_k} \cdot \delta \mathbf{r}_k + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_k} \cdot \delta \mathbf{v}_k \right);$$

$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_k} = \mathbf{p}_k$ et $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_k} = \dot{\mathbf{p}}_k - \mathbf{f}_k$ en vertu des équations de Lagrange. Par conséquent,

$$\delta L = \sum_{k=1}^{N} (\mathbf{p}_k \cdot \delta\varphi \times \mathbf{r}_k + \mathbf{p}_k \cdot \delta\varphi \times \mathbf{v}_k - \mathbf{f}_k \cdot \delta\varphi \times \mathbf{r}_k) =$$

$$= \delta\varphi \sum_{k=1}^{N} (\mathbf{r}_k \times \dot{\mathbf{p}}_k + \dot{\mathbf{r}}_k \times \mathbf{p}_k - \mathbf{r}_k \times \mathbf{f}_k) =$$

$$= \delta\varphi \cdot \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{N} \mathbf{r}_k \times \mathbf{p}_k,$$

puisque $\sum_{k=1}^{N} \mathbf{r}_k \times \mathbf{f}_k = 0$ pour le système fermé. Donc, $\delta\varphi$ étant arbitraire, la condition $\delta L = 0$ est de la forme:

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{N} \mathbf{r}_k \times \mathbf{p}_k = 0.$$

Durant le mouvement d'un système fermé, la grandeur vectorielle

$$\mathbf{M} = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{r}_k \times \mathbf{p}_k = \text{const},$$

appelée moment d'impulsion du système (cf. p. 18), reste constante.

5° Tout système isolé a au moins sept intégrales additives des équations du mouvement (sept équations traduisant les lois de conservation): une équation exprimant la loi de la conservation de l'énergie, trois équations traduisant les lois de la conservation des projections sur les axes de coordonnées du vecteur impulsion et trois équations pour le vecteur moment d'impulsion.

CHAPITRE 6

Oscillations mécaniques

1. Notions fondamentales

1° On appelle *oscillations (vibrations)* ou *mouvement oscillatoire* les mouvements (les variations d'état) qui se répètent plus ou moins périodiquement dans le temps. D'après leur nature physique les oscillations sont très variées. On distingue les oscillations mécaniques (balancements des pendules, mouvements des pistons des moteurs à combustion interne, vibrations des cordes, des fondations, des tiges et des membranes, oscillations électromagnétiques (p. 505), etc.

2° Les oscillations sont dites *périodiques* si les grandeurs physiques variant au cours du processus d'oscillation se répètent à intervalles égaux. On appelle *période des oscillations* T l'intervalle minimal de temps après lequel se répètent les valeurs de toutes les grandeurs physiques caractérisant le mouvement oscillatoire. C'est la durée d'une oscillation complète. On appelle *fréquence* ν des oscillations périodiques le nombre d'oscillations complètes effectuées par unité de temps:

$$\nu = \frac{1}{T}.$$

La dépendance du temps t d'une grandeur physique S oscillante périodique est de la forme: $S = S_0 + x(t)$, où $S_0 = \text{const}$, et $x(t)$ est une fonction périodique du temps: $x(t + T) = x(t)$.

3° Les oscillations *harmoniques (sinusoïdales)* sont le type le plus simple d'oscillations périodiques. Dans ce cas,

$$x = A \sin (\omega t + \varphi_0)$$

ou

$$x = A \cos (\omega t + \varphi_1),$$

où A, ω, φ_0 et φ_1 sont les grandeurs constantes, et $A > 0$, $\omega > 0$ et $\varphi_1 = \varphi_0 - \frac{\pi}{2}$. La grandeur A égale à la valeur absolue maximale de x est appelée *amplitude* des oscillations. Les expressions $\Phi = \omega t + \varphi_0$ et $\Phi_1 = \omega t + \varphi_1$ déterminent la valeur de x à l'instant donné t et représentent la *phase* des oscillations. A l'origine du temps ($t = 0$) la phase est égale à la *phase initiale* φ_0 ou bien φ_1. La grandeur ω est appelée *pulsation*

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu.$$

Les dérivées première et seconde par rapport au temps de la grandeur oscillante harmonique x varient harmoniquement:

$$\dot{x} = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0) = A\omega \sin\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\ddot{x} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) = A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0 + \pi) = -\omega^2 x.$$

Par conséquent, la grandeur oscillante harmonique x satisfait à l'équation

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0,$$

qui est appelée *équation différentielle des oscillations harmoniques.*

4° Les oscillations harmoniques peuvent être représentées graphiquement à l'aide du vecteur tournant amplitude (fig. I.6.1). Le vecteur **A**, qui est numériquement égal à l'amplitude des oscillations, tourne uniformément dans le sens contraire des aiguilles d'une montre autour de l'axe O, perpendiculaire au plan du dessin, avec une vitesse angulaire ω. Si à l'instant $t=0$, l'angle que fait le vecteur **A** avec l'axe Ox est φ_1, la projection B de l'extrémité de ce vecteur sur l'axe Ox effectue des oscillations harmoniques suivant la loi $x = A \cos(\omega t + \varphi_1)$.

5° Si ont lieu simultanément deux oscillations harmoniques de même fréquence lors desquelles la grandeur physique scalaire $S = S_0 + x$ varie suivant les lois

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \quad \text{et} \quad x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2),$$

la variation résultante $x = x_1 + x_2$ de la grandeur S a lieu avec la même fréquence suivant la loi harmonique

$$x = A \cos(\omega t + \varphi).$$

Pour déterminer A et φ, on utilise la *méthode des diagrammes vectoriels* fondée sur le fait qu'en

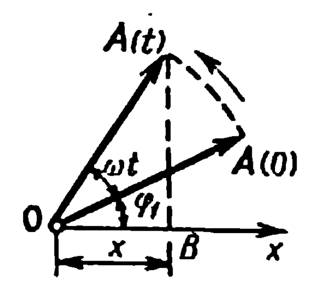


FIG. I.6.1

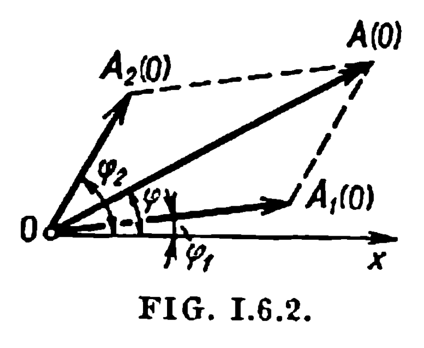


FIG. I.6.2.

chaque instant les vecteurs tournants amplitudes des oscillations superposées ($\mathbf{A}_1$ et $\mathbf{A}_2$) et le vecteur résultant $\mathbf{A}$ sont liés par la relation $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$. Ces trois vecteurs tournent avec une même vitesse angulaire ω, de sorte que leurs positions réciproques ne dépendent pas du temps. Il apparaît de la figure I.6.2 correspondant à l'instant $t = 0$ que

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

et

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2}.$$

Si $\varphi_2 - \varphi_1 = 2n\pi$ ($n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$) on a: $A = A_1 + A_2$; si $\varphi_2 - \varphi_1 = (2n+1)\pi$ ($n = 0; \pm 1; \pm 2, \ldots$), on a: $A = |A_1 - A_2|$. Dans le cas général $|A_1 - A_2| \leqslant A \leqslant A_1 + A_2$.

6° Lors de la *superposition* de deux oscillations harmoniques $x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$ et $x_2 = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$ ayant des fréquences et des amplitudes différentes, l'oscillation résultante n'est pas harmonique. On peut la représenter sous la forme:

$$x = x_1 + x_2 = A(t) \cos[\omega_1 t + \varphi(t)],$$

où

$$A^2(t) = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos[\psi(t) - \varphi_1],$$

$$\operatorname{tg}\varphi(t) = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\psi(t)}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\psi(t)} \quad \text{et} \quad \psi(t) = (\omega_2 - \omega_1)t + \varphi_2.$$

Du point de vue de la physique une telle représentation de l'oscillation non harmonique résultante n'a de sens que pour la superposition des oscillations harmoniques dont les fréquences sont voisines. Dans ce cas, $A(t)$ et $\varphi(t)$ sont des fonctions du temps à variation lente et le processus d'oscillations est appelé *battements*. La grandeur $A(t)$ variant périodiquement dans les limites entre $|A_1 - A_2|$ et $A_1 + A_2$ avec la fréquence $\nu_b = |\nu_2 - \nu_1| = \frac{1}{2\pi}|\omega_2 - \omega_1|$ est appelée *fréquence des battements*.

7° L'oscillation périodique complexe (non harmonique) de la grandeur physique S peut être représentée sous forme de *serie de Fourier*, constituée de simples oscillations harmoniques avec des pulsations qui sont des multiples entiers d'une pulsation fondamentale $\omega = 2\pi/T$:

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n),$$

où

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \varphi_n = \text{arc tg}\,\frac{a_n}{b_n}.$$

Les coefficients a_n et b_n sont déterminés à l'aide des formules d'Euler-Fourier:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} S(t)\cos n\omega t\,dt \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} S(t)\sin n\omega t\,dt \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots).$$

La recherche de la série de Fourier correspondant à une oscillation complexe donnée est appelée *analyse harmonique.* Les termes de cette série, dont les pulsations sont égales à ω, 2ω, 3ω, etc., sont appelés respectivement premier (fondamental), second, troisième, etc., *harmoniques* de l'oscillation complexe.

8° Les oscillations de la forme $x = A(t)\cos[\omega t + \varphi(t)]$ sont nommées *modulées* si $\left|\frac{dA}{dt}\right| \ll \omega A_{\max}$ et $\left|\frac{d\varphi}{dt}\right| \ll \omega$. Les oscillations sont *modulées en amplitude* si $\varphi = \text{const}$, et *modulées en phase* ou *en fréquence* si $A = \text{const}$. L'exemple le plus simple d'oscillations modulées sont les battements, pour lesquels $A(t)$ et $\varphi(t)$ sont des fonctions périodiques du temps (p. 118).

9° On appelle *oscillations libres* les oscillations qui surgissent dans un système non soumis aux forces extérieures variables comme conséquence d'un écart initial de ce système de son état d'équilibre stable.

On appelle *oscillations forcées* d'un système les oscillations produites sous l'action de forces extérieures périodiques.

10° Un système est *linéaire* si son mouvement se décrit par des équations différentielles linéaires. Dans le cas contraire le système est *non linéaire* et son mouvement oscillatoire représente des *oscillations non linéaires.*

Le système oscillant à un degré de liberté est appelé *oscillateur (vibrateur)* à une dimension. Si les oscillations libres de ce système sont harmoniques, on l'appelle *oscillateur harmonique* à une dimension. Dans le cas contraire l'oscillateur est dit *anharmonique.*

2. Petites oscillations d'un système à un degré de liberté

A. OSCILLATIONS LIBRES D'UN SYSTÈME CONSERVATIF

1° Les énergies cinétique et potentielle d'un système sont:

$$W_c = \frac{1}{2} b(q)\dot{q}^2 \quad \text{et} \quad W_p = W_p(q),$$

où q est la coordonnée généralisée (p. 95), $b(q) \geqslant 0$.

A l'état d'équilibre stable ($q = q_0$) l'énergie potentielle a un minimum, de sorte que

$$\left(\frac{dW_p}{dq}\right)_{q=q_0} = 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{d^2W_p}{dq^2}\right)_{q=q_0} = \beta_0 > 0.$$

Si l'on compte la valeur de l'énergie potentielle à partir de sa valeur à l'état $q = q_0$, on a $W_p(q_0) = 0$ et la série de Taylor pour $W_p(q)$ est de la forme:

$$W_p(q) = \beta_0 \frac{(q - q_0)^2}{2!} + \left(\frac{d^3W_p}{dq^3}\right)_{q=q_0} \frac{(q - q_0)^3}{3!} + \dots$$

2° Les oscillations sont *petites* si l'on peut négliger dans les seconds membres de l'équation tous les termes excepté le premier, de sorte que

$$W_p(q) = \frac{\beta_0}{2} (q - q_0)^2 = \frac{\beta_0 x^2}{2}$$

et

$$W_c(q) = \frac{1}{2} b(q_0)\dot{q}^2 = \frac{b_0 \dot{x}^2}{2},$$

où $x = q - q_0$ est le déplacement du système de son état d'équilibre stable.

3° L'équation différentielle des petites oscillations est de la forme:

$$b_0\ddot{x} + \beta_0 x = 0.$$

La grandeur $-\beta_0 x = -\frac{dW_p}{dx}$ représente la force généralisée F_x conjuguée à la coordonnée généralisée x (p. 96). $F_x = -\beta_0 x$, où $\beta_0 > 0$, est la *force quasi élastique* et β_0 le *coefficient de force quasi élastique*.

4° Les oscillations du système sont harmoniques:

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_1).$$

Leur pulsation $\omega_0 = \sqrt{\beta_0/b_0}$ est déterminée par les propriétés du système, elle est appelée *pulsation propre* des oscillations du système conservatif. La période est $T = 2\pi\sqrt{b_0/\beta_0}$. L'amplitude A et la phase initiale φ_1 se déterminent par les conditions initiales. Par exemple, si à l'instant $t = 0$, $x = x_0$ et $\dot{x} = \dot{x}_0$, on a:

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_0}\right)^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi_1 = -\frac{\dot{x}_0}{\omega_0 x_0}.$$

L'amplitude des oscillations libres du système conservatif ne dépend pas du temps. De telles oscillations sont appelées *oscillations non amorties (entretenues)*.

5° Les énergies cinétique et potentielle des oscillations harmoniques du système sont des fonctions périodiques du temps de période $T' = T/2 = \pi\sqrt{b_0/\beta_0}$:

$$W_{\text{c}} = \frac{1}{2} b_0 A^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_1),$$

$$W_{\text{p}} = \frac{1}{2} \beta_0 A^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_1) = \frac{1}{2} b_0 A^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_1).$$

L'énergie mécanique totale des oscillations harmoniques du système est:

$$W = \frac{1}{2} b_0 A^2 \omega_0^2 = \text{const.}$$

EXEMPLE 1. *Pendule à ressort:* corps effectuant des oscillations rectilignes le long d'un axe Ox sous l'action d'une force élastique $F = -ax$ (a est le coefficient d'élasticité); $\beta_0 = a$, $W_{\text{c}} = \frac{1}{2} m\dot{x}^2$ et $b_0 = m$ est la masse du corps. La pulsation et la période sont:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{a}{m}}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{a}}.$$

EXEMPLE 2. *Pendule simple:* point matériel M suspendu à un point par un fil (une tige) inextensible de masse négligeable et

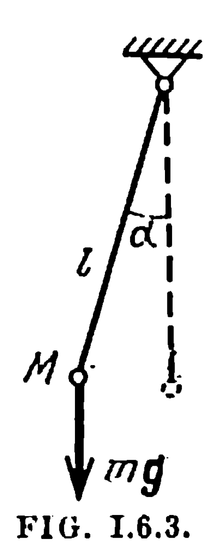


FIG. I.6.3.

oscillant dans un plan vertical sous l'action de la pesanteur (fig. I.6.3):

$$W_c = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\alpha}^2, \quad b_0 = ml^2,$$

$$W_p = mgl(1 - \cos \alpha) = 2mgl \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Pour les petites oscillations $\sin \frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2}$,

$$W_p \approx \frac{mgl\alpha^2}{2}, \quad \beta_0 = mgl.$$

La période est:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Pour des valeurs arbitraires de l'angle d'écart α, les oscillations du pendule simple sont non linéaires (p. 141).

EXEMPLE 3. *Pendule cycloïdal:* point matériel M se mouvant sous l'action de la pesanteur suivant une cycloïde dont l'axe est vertical et la convexité orientée vers le bas (fig. I.6.4). Si l'on adopte comme origine de l'énergie potentielle du point sa valeur au sommet O' de la cycloïde et comme coordonnée généralisée la longueur s de l'arc de la cycloïde comptée à partir du point O', on a:

$$W_c = \frac{1}{2} m\dot{s}^2 \quad \text{et} \quad W_p = \frac{mg}{8a} s^2,$$

de sorte que

$$b_0 = m \quad \text{et} \quad \beta_0 = \frac{mg}{4a},$$

où a est le paramètre de la cycloïde (le rayon de la circonférence génératrice). Les oscillations sont possibles si l'énergie totale du pendule est $W = W_c + W_p < 2mga$. Les oscillations du pendule cycloïdal sont *isochrones*, autrement dit, leur période ne dépend pas de l'amplitude et est toujours

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{4a}{g}}.$$

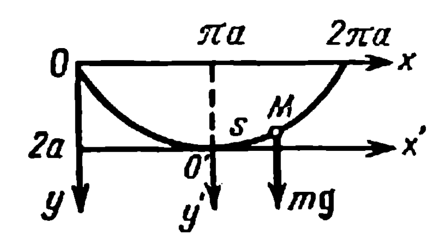


FIG. I.6.4.

EXEMPLE 4. *Pendule composé:* solide parfait oscillant sous l'action de la pesanteur autour d'un axe horizontal fixe O, qui ne passe pas par son centre de gravité C (fig. I.6.5):

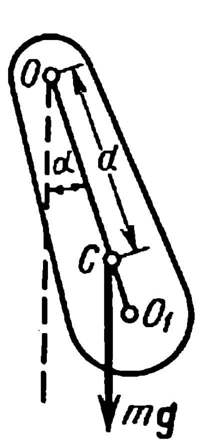


FIG. I.6.5.

$$W_c = \frac{1}{2} J\dot{\alpha}^2, \quad b_0 = J,$$

$$W_p = mg\, d(1 - \cos\alpha) = 2mg\, d \sin^2 \frac{\alpha}{2};$$

où α est l'angle d'écart de la position d'équilibre, J le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe de balancement O, d la distance de l'axe O au centre de gravité C.

Pour les petites oscillations $\sin\frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2}$, $W_p \approx \frac{1}{2} mg\, d\alpha^2$ et $\beta_0 = mg\, d$. La période est:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mg\,d}}.$$

On appelle *longueur synchrone* l_s du pendule composé la longueur d'un pendule simple ayant la même période: $l_s = \frac{J}{md} > d$, étant donné qu'en vertu du théorème de Steiner (p. 77) $J = J_c + md^2 > md^2$. Le point O_1, situé sur la ligne OC à la distance $OO_1 = l_s$, est appelé *centre de balancement* du pendule composé. Le point de suspension O et le centre de balancement O_1 sont réciproques: lors de la translation du point de suspension au point O_1, le point O devient centre de balancement, de sorte que la période des oscillations du pendule ne change pas.

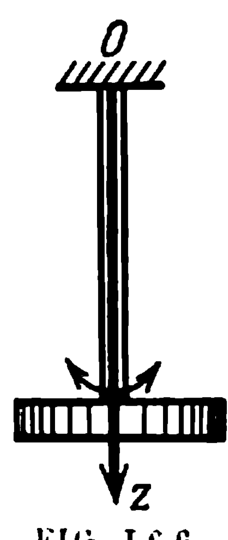


FIG. I.6.6.

EXEMPLE 5. *Pendule de torsion:* solide suspendu à une tige verticale, élastique, de masse négligeable, dont l'extrémité supérieure est encastrée, l'axe Oz coïncide avec l'un des axes libres du corps (fig. I.6.6). Les oscillations de torsion sont conditionnées par les forces élastiques qui se manifestent dans la tige lorsqu'elle tourne autour de l'axe Oz.

Pour les petites oscillations $W_c = \frac{1}{2} J\dot{\alpha}^2$ et $W_p = \frac{1}{2} c\alpha^2$, de sorte que $b_0 = J$ et $b_0 = c$, où α est l'angle de rotation du pendule autour de l'axe

Oz à partir de la position d'équilibre, J le moment d'inertie du pendule par rapport à l'axe Oz, et c la rigidité à la torsion.

La période est:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{c}} .$$

Dans le cas d'une tige ronde homogène $c = \pi d^4\, G/32l$, où d et l sont le diamètre et la longueur de la tige et G le module de rigidité (p. 296) du matériau dont la tige est faite.

B. OSCILLATIONS AMORTIES

1° On appelle *oscillations amorties* les oscillations dont l'énergie décroît avec le temps. L'amortissement des oscillations libres d'un système mécanique est dû à la dissipation de son énergie sous l'action des forces de résistance (de frottement) non potentielles.

S'il n'y a pas de frottement à sec (p. 58) dans le système, on peut admettre dans le cas de petites oscillations que la force généralisée de frottement est $F_{fr} = -r\dot{x}$, où $r > 0$ est le coefficient généralisé de frottement. L'équation différentielle des petites oscillations amorties du système s'écrit alors:

$$b_0\ddot{x} + r\dot{x} + \beta_0 x = 0$$

ou bien

$$\ddot{x} = 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

où $\delta = r/2b_0$ est le *coefficient d'amortissement* et $\omega_0 = \sqrt{\beta_0/b_0}$ la pulsation des oscillations libres du système en l'absence de frottement.

2° Si $\delta > \omega_0$, il y a *amortissement apériodique:*

$$x = C_1 e^{-\left(\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\right)t} + C_2 e^{-\left(\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\right)t} .$$

La grandeur x décroît de façon monotone avec l'accroissement de t. Le système écarté de sa position d'équilibre y revient asymptotiquement, c'est-à-dire quand $t \to \infty$.

3° Si $\delta < \omega_0$, le système effectue des oscillations amorties:

$$x = A_0 e^{-\delta t} \sin (\omega t + \varphi_0),$$

où A_0 et φ_0 sont des grandeurs constantes déterminées par les conditions initiales et $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ est la pulsation propre des oscillations du système dissipatif. La grandeur $A(t) = A_0 e^{-\delta}$

est l'amplitude des oscillations amorties. Les valeurs de l'amplitude aux instants t, $t+\Delta t$, $t+2\Delta t$, etc., varient en progression géométrique décroissante dont la raison est $e^{-\delta\Delta t}$. La dépendance entre x et t est représentée fig. I. 6.7.

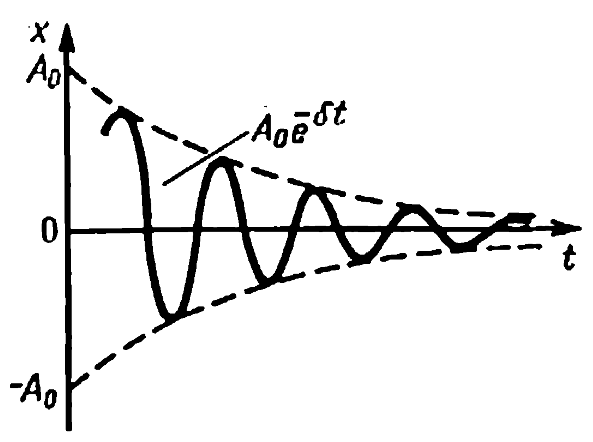


FIG. I.6.7.

4° On appelle *pseudo-période* (période conventionnelle des oscillations amorties[1]) l'intervalle de temps entre deux états successifs du système, lors desquels la grandeur oscillante x passe par sa valeur d'équilibre variant dans un même sens (par exemple, croissant):

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}}.$$

5° On appelle *décrément logarithmique d'amortissement* le logarithme népérien du quotient des amplitudes des oscillations aux instants t et $t+T$:

$$\vartheta=\ln\frac{A(t)}{A(t+T)}=\delta T.$$

Le décrément logarithmique d'amortissement est la valeur inverse du nombre N des oscillations, après lesquelles l'amplitude décroît de e fois: $\nu=1/N$. L'intervalle de temps τ nécessaire dans ce cas est appelé *temps de relaxation:* $\tau=NT=1/\delta$.

6° La dépendance de l'énergie mécanique totale vis-à-vis du temps est de la forme:

$$W(t)=\frac{1}{2}b_0A_0^2e^{-2\delta t}[\omega_0^2-\delta^2\cos(2\omega t+2\varphi_0)-\delta\omega\sin(2\omega t+2\varphi_0)],$$

$$\frac{dW}{dt}=-r\dot{x}^2=-2\Phi,$$

où $\Phi=\frac{1}{2}r\dot{x}^2$ est la fonction dissipative.

7° Si l'amortissement des oscillations mécaniques d'un système est dû au frottement à sec et $|\mathbf{F}_{fr}|=\text{const}$, la pulsation ω des oscillations amorties coïncide avec la pulsation ω_0 des oscillations

[1]) Les oscillations amorties ne sont pas périodiques (p. 116). Aussi ne peut-on pas appliquer à celles-ci les notions habituelles de période et de pulsation.

libres du même système en l'absence de frottement ($\omega_0 = \sqrt{\beta_0/b_0}$). La décroissance de l'amplitude suit la loi de la progression arithmétique: à chaque moitié d'un cycle d'oscillation l'amplitude diminue d'une même grandeur $2\,|\mathbf{F}_{fr}|/\beta_0$. Les oscillations s'arrêtent dès que l'amplitude devient plus petite que $|\mathbf{F}_{fr}|/\beta_0$.

C. OSCILLATIONS FORCÉES

1° L'équation différentielle des *petites* oscillations forcées s'écrit de la manière suivante:

$$b_0\ddot{x} + r\dot{x} + \beta_0 x = F(t)$$

ou bien

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{1}{b_0} F(t),$$

où $F(t)$ est la force extérieure périodique généralisée, conjuguée à la coordonnée généralisée x. La force $F(t)$ conditionnant les oscillations forcées du système est appelée *force perturbatrice.*

2° La solution générale de cette équation est la somme de la solution particulière x_1 et de la solution générale x_2 de l'équation homogène correspondante (c'est-à-dire quand $F(t) = 0$):

$$x = x_1 + x_2.$$

La solution: $x_2 = A_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi_0)$ caractérise les oscillations amorties libres du système (p. 124), $\lim_{t\to\infty} x_2 = 0$. Aussi peut-on, un certain laps de temps passé après le commencement des oscillations forcées correspondant à un régime transitoire, négliger la grandeur x_2 et admettre que lors des oscillations forcées établies $x = x_1$.

3° Si la force perturbatrice varie harmoniquement

$$F(t) = F_0 \cos \Omega t,$$

les oscillations forcées établies sont aussi harmoniques et ont lieu avec la même pulsation Ω:

$$x = A \cos(\Omega t + \varphi_1),$$

où

$$A = \frac{F_0}{b_0\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}}$$

et

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = -\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}.$$

Les courbes représentant l'amplitude A et l'angle de déphasage φ_1 en tant que fonctions de Ω des oscillations forcées sont données fig. I.6.8 et I.6.9. Lorsque $\Omega \ll \omega_0$, l'amplitude $A \approx A_{st} = F_0/b_0\omega_0^2 = F_0/\beta_0$ est la déformation statique du système sous l'action d'une force constante F_0. Si $\Omega \gg \omega_0$, on a $A = F_0/b_0\Omega^2$. La valeur maximale de l'amplitude A_{max} correspond à la pulsation:

$$\Omega_0 = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2},$$

qui est un peu plus petite que la pulsation propre ω des oscillations du système $(\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2})$,

$$A_{max} = \frac{F_0}{2\,\delta b_0\,\omega}.$$

Il suit de cette formule que $A_{max} \to \infty$ quand $\delta \to 0$. Cependant une telle extrapolation n'est pas juste, puisqu'avec l'accroissement de l'amplitude les oscillations cessent d'être petites et la théorie considérée ci-dessus ne leur est plus applicable.

4° Le phénomène d'accroissement brusque de l'amplitude des oscillations forcées du système, quand la pulsation de la force perturbatrice approche de la valeur Ω_0, est appelé ***résonance***, et la grandeur Ω_0 ***pulsation de résonance***. Les courbes qui représentent la dépendance de l'amplitude A vis-à-vis de Ω (fig. I.6.8) sont nommées ***courbes de résonance***.

L'accroissement du coefficient d'amortissement δ entraîne le lissage des courbes de résonance et la baisse de A_{max}, c'est-à-dire l'affaiblissement considérable des phénomènes de résonance. Quand $\delta \gg \omega_0/\sqrt{2}$, la résonance disparaît entièrement.

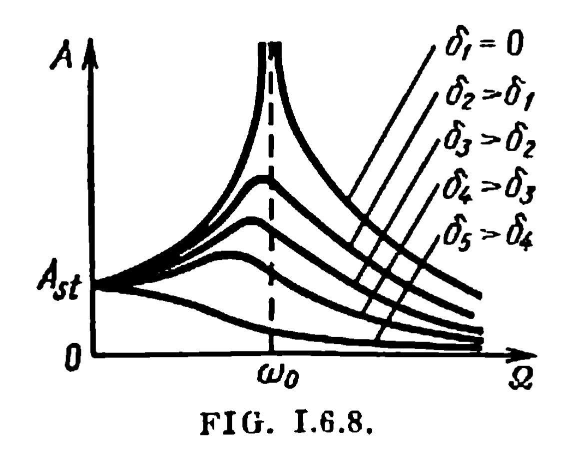


FIG. I.6.8.

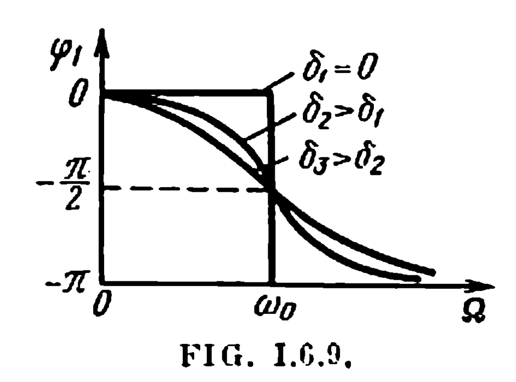


FIG. I.6.9.

Pour les systèmes avec un amortissement faible, on peut admettre dans les calculs approximatifs de la résonance que $\Omega_0 \approx \omega_0$.

5° La dépendance de l'énergie totale du système mécanique vis-à-vis du temps est de la forme:

$$\frac{dW}{dt} = -2\Phi + \dot{x}F_0 \cos \Omega t,$$

où $\Phi = r\dot{x}^2/2$ est la fonction dissipative et $\dot{x}F_0 \cos \Omega t$ la puissance de la source d'énergie extérieure conditionnant les oscillations forcées du système.

6° Si le système est sollicité par une force perturbatrice $F(t)$ arbitraire de période T, cette force peut être décomposée en série de Fourier (p. 118), c'est-à-dire représentée sous la forme d'une somme d'harmoniques dont les pulsations sont des multiples entiers de la pulsation fondamentale $2\pi/T$. Les oscillations forcées du système conditionnées par la force $F(t)$ sont le résultat de la superposition des oscillations du système sous l'influence de chacun de ces harmoniques. Les harmoniques dont les pulsations sont proches de la pulsation de résonance Ω_0 du système agissent de la façon la plus intense sur le système.

3. Petites oscillations d'un système à plusieurs degrés de liberté

A. OSCILLATIONS LIBRES D'UN SYSTÈME CONSERVATIF

1° Si le système possède s degrés de liberté, sa position est entièrement déterminée par rapport au système de référence avec s coordonnées q_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$ généralisées indépendantes. A l'état d'équilibre stable $(q_i = q_{i0})$ l'énergie potentielle W_p du système est minimum W_{p0}. L'origine de W_p étant arbitraire, la valeur de W_{p0} est admise égale à zéro. Dans le cas de petites oscillations du système autour d'une position d'équilibre stable, son énergie potentielle s'exprime par la forme quadratique définie positive[1] des coordonnées généralisées:

$$W_p = \frac{1}{2} \sum_{i, k=1}^{s} \beta_{ik}\, x_i\, x_k,$$

---

[1]) La forme quadratique $\sum_{i, k=1}^{s} \beta_{ik} x_i x_k$ est dite définie positive si elle s'annule seulement quand tous les x_i sont simultanément nuls et qu'elle admette des valeurs positives pour toutes autres valeurs des variables x_i.

où $x_i = q_i - q_{io}$, $x_k = q_k - q_{ko}$ et β_{ik} sont des coefficients réels constants:

$$\beta_{ik} = \beta_{ki}\left(\frac{\partial^2 W_p}{\partial x_i\ \partial x_k}\right)_{x_1 = x_2 = \ldots = x_s = 0}.$$

L'énergie cinétique W_c du système est exprimée également par une forme quadratique définie positive des vitesses généralisées:

$$W_c = \frac{1}{2}\sum_{i,\ k=1}^{s} b_{ik}\ \dot{x}_i\ \dot{x}_k,$$

où b_{ik} sont des coefficients réels constants:

$$b_{ik} = b_{ki} = \left(\frac{\partial^2 W_c}{\partial \dot{x}_i\ \partial \dot{x}_k}\right)_{x_1 = x_2 = \ldots = x_s = 0}.$$

2° La fonction de Lagrange (p. 97) du système est:

$$L = W_c - W_p = \frac{1}{2}\sum_{i,\ k=1}^{s} (b_{ik}\ \dot{x}_i\ \dot{x}_k - \beta_{ik}\ x_i\ x_k).$$

Le mouvement du système est décrit par s équations de Lagrange de seconde espèce (p. 99), qui sont de la forme:

$$\sum_{k=1}^{s} (b_{ik}\ \ddot{x}_k + \beta_{ik}\ x_k) = 0 \quad (i = 1,\ 2, \ldots, s) \qquad (*)$$

3° Il convient de rechercher les fonctions inconnues du temps x_k:

$$x_k = A_k e^{i\omega t},$$

où $i = \sqrt{-1}$.

Les relations entre les coefficients constants A_k sont déterminées du système d'équations algébriques linéaires homogènes:

$$\sum_{k=1}^{s} (\beta_{ik} - \omega^2 b_{ik})\ A_k = 0 \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ s). \qquad (**)$$

Pour que les solutions de ce système soient différentes de zéro, il faut et il suffit que le déterminant de ce système soit nul:

$$\begin{vmatrix} \beta_{11} - \omega^2 b_{11} & \beta_{12} - \omega^2 b_{12} \ldots \beta_{1s} - \omega^2 b_{1s} \\ \beta_{21} - \omega^2 b_{21} & \beta_{22} - \omega^2 b_{22} \ldots \beta_{2s} - \omega^2 b_{2s} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \beta_{s1} - \omega^2 b_{s1} & \beta_{s2} - \omega^2 b_{s2} \ldots \beta_{ss} - \omega^2 b_{ss} \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation d'ordre s par rapport à ω^2 est appelée *caractéristique* ou *séculaire*. Elle a s racines positives réelles ω_l^2 ($l = 1, 2, \ldots, s$). Les grandeurs ω_l sont appelées *pulsations propres du système*.

4° On peut trouver pour chaque racine ω_l^2 à partir des équations(**) un système correspondant de valeurs de A_k[1]: $A_k = A_k(\omega_l^2)$. La solution générale du système (*) est de la forme:

$$x_k = \sum_{l=1}^{s} A_k(\omega_l^2)\, C_l \cos(\omega_l t + \varphi_l) \qquad (k = 1, 2, \ldots, s), \qquad (***)$$

où C_l, φ_l sont des constantes réelles indépendantes, déterminées par les conditions initiales:

$$\left.\begin{aligned} x_k(0) &= \sum_{l=1}^{s} A_k(\omega_l^2)\, C_l \cos\varphi_l, \\ \dot{x}_k(0) &= -\sum_{l=1}^{s} A_k(\omega_l^2)\, C_l\, \omega_l \sin\varphi_l \end{aligned}\right\} \quad (k = 1, 2, \ldots, s).$$

Il suit de (***) que les oscillations de la coordonnée généralisée x_k résultent de la superposition de s oscillations harmoniques, dont chacune a des amplitudes et des phases initiales arbitraires, mais des pulsations ω_l déterminées.

5° Les expressions $\theta_l = C_l \cos(\omega_l t + \varphi_l)$, où $l = 1, 2, \ldots, s$, sont appelées *coordonnées normales* ou *principales* du système mécanique. Elles sont liées aux coordonnées x_k par la transformation linéaire homogène

$$x_k = \sum_{l=1}^{s} A_k(\omega_l^2)\, \theta_l \qquad (k = 1, 2, \ldots, s).$$

A son tour

$$\theta_l = \sum_{l=1}^{s} a_{lk}\, x_k \qquad (l = 1, 2, \ldots, s),$$

où a_{lk} sont des coefficients réels constants.

---

[1]) Si toutes les racines ω_l^2 sont différentes, l'un des coefficients A_k peut être choisi arbitrairement. Dans le cas de racines multiples, le nombre de coefficients A_k arbitraires croît.

Les énergies cinétique et potentielle du système, exprimées en coordonnées normales, ont la forme de sommes de carrés:

$$W_p = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{s} \beta_l \theta_l^2, \qquad W_C = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{s} b_l \dot{\theta}_l^2.$$

La fonction de Lagrange est:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{s} (b_l \dot{\theta}_l^2 - \beta_l \theta_l^2) = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{s} b_l (\dot{\theta}_l^2 - \omega_l^2 \theta_l^2),$$

où $\omega_l = \sqrt{\beta_l / b_l}$ est la pulsation propre du système correspondant à la coordonnée normale θ_l. Habituellement, on utilise au lieu des coordonnées normales les coordonnées *normales normées* $Q_l = \sqrt{b_l \theta_l}$. Alors $L = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{s} (\dot{Q}_l^2 - \omega_l^2 Q_l^2)$. Les équations différentielles du mouvement du système sont de la forme:

$$\ddot{Q}_l + \omega_l^2 Q_l = 0 \qquad (l = 1, 2, \ldots, s).$$

6° Pour un système à deux degrés de liberté correspondant aux coordonnées généralisées x_1 et x_2,

$$W_c = \frac{1}{2} (b_{11} \dot{x}_1^2 + 2 b_{12} \dot{x}_1 \dot{x}_2 + b_{22} \dot{x}_2^2),$$

$$W_p = \frac{1}{2} (\beta_{11} x_1^2 + 2 \beta_{12} x_1 x_2 + \beta_{22} x_2^2).$$

Les coordonnées normales (non normées) du système θ_1 et θ_2 sont liées à x_1 et x_2 par les relations

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \gamma_1 \theta_1 + \gamma_2 \theta_2, \\ x_2 &= \theta_1 + \theta_2, \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{x_1 - \gamma_2 x_2}{\gamma_1 - \gamma_2}, \\ \theta_2 &= \frac{x_1 - \gamma_1 x_2}{\gamma_2 - \gamma_1}, \end{aligned}\right\}$$

où γ_1 et γ_2 satisfont aux équations:

$$\left.\begin{aligned} b_{11} \gamma_1 \gamma_2 + b_{12} (\gamma_1 + \gamma_2) + b_{22} &= 0, \\ \beta_{11} \gamma_1 \gamma_2 + \beta_{12} (\gamma_1 + \gamma_2) + \beta_{22} &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Les énergies cinétique et potentielle du système, exprimées en coordonnées normales θ_1 et θ_2, sont de la forme:

$$W_c = \frac{1}{2}\left(b_1\,\dot\theta_1^2 + b_2\,\dot\theta_2^2\right),$$

$$W_p = \frac{1}{2}\left(\beta_1\,\theta_1^2 + \beta_2\,\theta_2^2\right),$$

où

$$\left.\begin{aligned} b_l &= b_{11}\,\gamma_l^2 + 2b_{12}\,\gamma_l + b_{22},\\ \beta_l &= \beta_{11}\,\gamma_l^2 + 2\beta_{12}\,\gamma_l + \beta_{22}.\end{aligned}\right\}\quad (l = 1,\ 2).$$

Les carrés des pulsations propres du système sont égaux à

$$\omega_l^2 = \frac{\beta_l}{b_l} = \frac{\beta_{11}\,\gamma_l^2 + 2\beta_{12}\,\gamma_l + \beta_{22}}{b_{11}\,\gamma_l^2 + 2b_{12}\,\gamma_l + b_{22}}\qquad (l = 1,\ 2).$$

EXEMPLE 1. *Pendule plan double* (fig. I.6.10). Energie potentielle:

$$W_p = m_1\,gl_1\,(1 - \cos\alpha_1) + m_2\,g\,[l_1\,(1 - \cos\alpha_1) + l_2\,(1 - \cos\alpha_2)].$$

Dans le cas de petites oscillations

$$\sin\frac{\alpha_1}{2} \approx \frac{\alpha_1}{2}\ \text{et}\ \sin\frac{\alpha_2}{2} \approx \frac{\alpha_2}{2},$$

$$W_p = \frac{m_1 + m_2}{2}\,gl_1\,\alpha_1^2 + \frac{m_2}{2}\,gl_2\,\alpha_2^2,$$

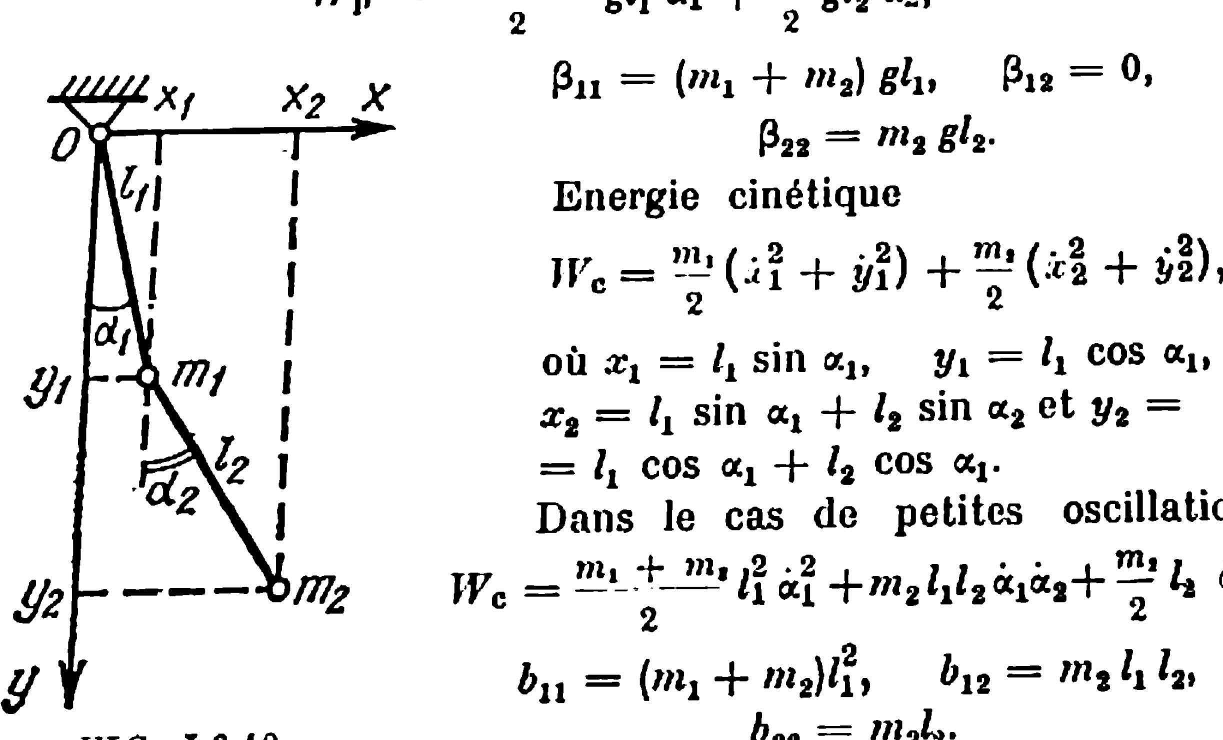


FIG. I.6.10.

$$\beta_{11} = (m_1 + m_2)\,gl_1,\qquad \beta_{12} = 0,$$

$$\beta_{22} = m_2\,gl_2.$$

Energie cinétique

$$W_c = \frac{m_1}{2}\left(\dot x_1^2 + \dot y_1^2\right) + \frac{m_2}{2}\left(\dot x_2^2 + \dot y_2^2\right),$$

où $x_1 = l_1\sin\alpha_1$, $y_1 = l_1\cos\alpha_1$, $x_2 = l_1\sin\alpha_1 + l_2\sin\alpha_2$ et $y_2 = l_1\cos\alpha_1 + l_2\cos\alpha_1$.

Dans le cas de petites oscillations

$$W_c = \frac{m_1 + m_2}{2}\,l_1^2\,\dot\alpha_1^2 + m_2 l_1 l_2\,\dot\alpha_1\dot\alpha_2 + \frac{m_2}{2}\,l_2\,\dot\alpha_2^2,$$

$$b_{11} = (m_1 + m_2)l_1^2,\qquad b_{12} = m_2\,l_1\,l_2,$$

$$b_{22} = m_2 l_2.$$

Les équations de Lagrange pour les petites oscillations sont de la forme:

$$\left.\begin{aligned}(m_1+m_2)l_1\ddot{\alpha}_1+m_2l_2\ddot{\alpha}_2+(m_1+m_2)g\alpha_1=0,\\ l_1\ddot{\alpha}_1+l_2\ddot{\alpha}_2-g\alpha_2=0.\end{aligned}\right\}$$

L'équation caractéristique est:

$$\begin{vmatrix}(m_1+m_2)gl_1-\omega^2(m_1+m_2)l_1^2 & -\omega^2m_2l_1l_2\\ -\omega^2m_2l_1l_2 & m_2gl_2-\omega^2m_2l_2^2\end{vmatrix}=0.$$

Les carrés des pulsations propres ω_1 et ω_2 sont égaux à

$$\omega_{1,2}^2=\frac{g}{2ml_1l_2}\{(m_1+m_2)(l_1+l_2)\pm$$
$$\pm\sqrt{(m_1+m_2)[(m_1+m_2)(l_1+l_2)^2-4m_1l_1l_2]}\}.$$

La solution générale est de la forme:

$$\alpha_1=\left(\frac{g}{\omega_1^2l_1}-\frac{l_2}{l_1}\right)C_1\cos(\omega_1t+\varphi_1)+\left(\frac{g}{\omega_2^2l_1}-\frac{l_2}{l_1}\right)C_2\cos(\omega_2t+\varphi_2),$$

$$\alpha_2=C_1\cos(\omega_1t+\varphi_1)+C_2\cos(\omega_2t+\varphi_2).$$

EXEMPLE 2. Mouvement plan d'un point matériel sous l'action de deux forces quasi élastiques $\mathbf{F}_1$ et $\mathbf{F}_2$, réciproquement perpendiculaires. Dans le système rectangulaire de coordonnées cartésiennes xOy dont l'origine coïncide avec la position d'équilibre du point matériel et dont les axes Ox et Oy sont dirigés suivant les lignes d'action de $\mathbf{F}_1$ et de $\mathbf{F}_2$ respectivement, les équations du mouvement du point sont de la forme:

$$\left.\begin{aligned}m\ddot{x}+\beta_1x=0,\\ m\ddot{y}+\beta_2y=0,\end{aligned}\right\}$$

où β_1 et β_2 sont les coefficients des forces quasi élastiques $\mathbf{F}_1$ et $\mathbf{F}_2$. Les coordonnées x et y sont des coordonnées normales. Leur dépendance vis-à-vis du temps est de la forme:

$$x=A_1\cos(\omega_1t+\varphi_1)\quad\text{et}\quad y=A_2\cos(\omega_2t+\varphi_2),$$

où $\omega_1=\sqrt{\beta_1/m}$ et $\omega_2=\sqrt{\beta_2/m}$ sont les pulsations propres.

Ainsi, le mouvement d'un point est le résultat de la superposition de deux oscillations harmoniques réciproquement perpendiculaires. La trajectoire du point est comprise à l'intérieur d'un rectangle dont les côtés sont parallèles aux axes Ox et Oy et res-

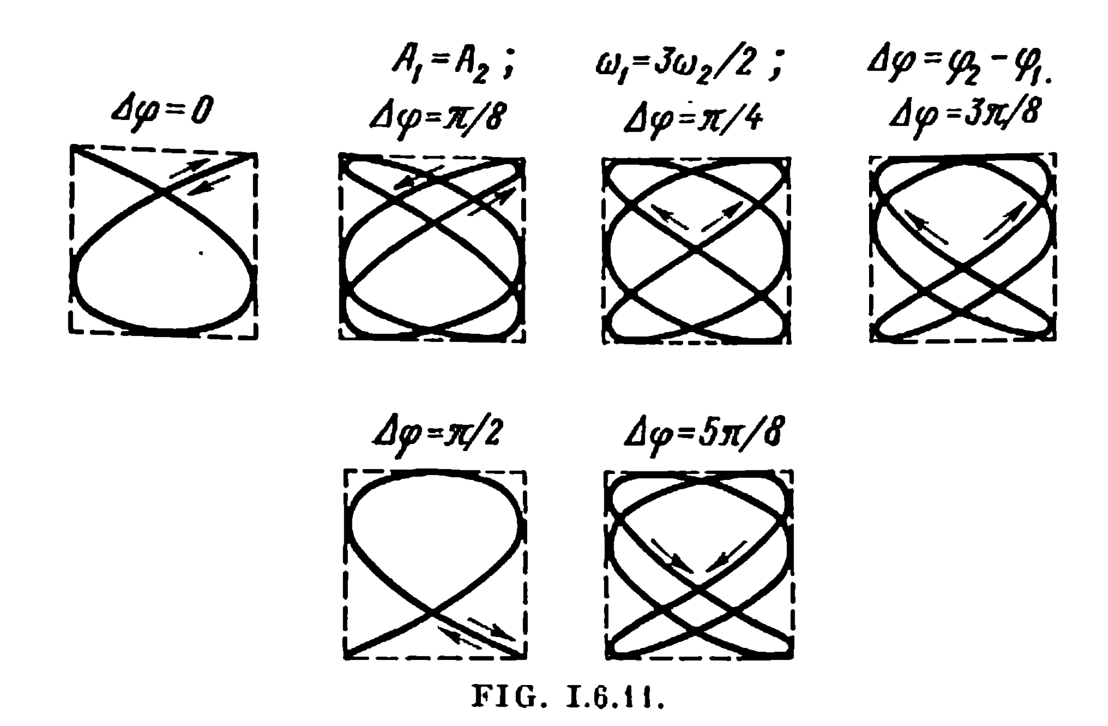


FIG. I.6.11.

pectivement égaux à $2A_1$ et $2A_2$ et dont le centre coïncide avec le point O. Dans le cas d'un quotient rationnel des pulsations ω_1 et ω_2, les trajectoires sont fermées. Elles sont appelées *courbes de Lissajous*. L'aspect des courbes de Lissajous dépend de ω_2/ω_1, A_2/A_1 et $\varphi_2 - \varphi_1$ (fig. I.6.11). Le quotient des pulsations ω_2/ω_1 est égal au quotient du nombre des attouchements de la courbe de Lissajous avec les côtés horizontal et vertical du rectangle dans lequel elle est inscrite.

Si $\omega_1 = \omega_2$, les courbes de Lissajous ont la forme d'une ellipse:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1A_2} \cos\ (\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2 (\varphi_2 - \varphi_1).$$

On considère de telles oscillations comme *oscillations polarisées elliptiquement*. On montre fig. I.6.12 les cas particuliers d'oscillations polarisées elliptiquement. Quand $\varphi_2 - \varphi_1 = (2k + 1) \times \frac{\pi}{2}$ $(k = 0;\ \pm 1;\ \ldots)$, l'ellipse est réduite aux axes Ox et Oy. Si, de plus, $A_1 = A_2$, la trajectoire du point a la forme d'une circonférence. Ces oscillations sont appelées *oscillations polarisées circulairement*. Si $\varphi_2 - \varphi_1 = k\pi$ $(k = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots)$, l'ellipse dégénère en segment de droite et les oscillations sont nommées *oscillations polarisées rectilignement*.

EXEMPLE 3. Deux pendules composés identiques à liaison élastique (fig. I.6.13). Si la masse du ressort peut être négligée, dans le cas de petites oscillations:

$$W_c = \frac{ml^2}{2}(\dot\alpha_1^2 + \dot\alpha_2^2)$$

et

$$W_p = \frac{mgl}{2}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) + \\ + \frac{1}{2}al^2(\alpha_2 - \alpha_1)^2,$$

où a est le coefficient d'élasticité du ressort, m la masse des pendules.

Effectuant le changement des variables $\theta_1 = \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2}$ et $\theta_2 = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}$, on obtient:

$$W_c = ml^2(\dot\theta_1^2 + \dot\theta_2^2) \text{ et}$$

$$W_p = mgl(\theta_1^2 + \theta_2^2) + 2al^2\theta_2^2.$$

Les coordonnées θ_1 et θ_2 sont normales. Les équations de Lagrange sont de la forme:

$$\left.\begin{aligned} \ddot\theta_1 + \omega_0^2\theta_1 &= 0,\\ \ddot\theta_2 + \left(\omega_0^2 + \frac{2a}{m}\right)\theta_2 &= 0, \end{aligned}\right\}$$

où $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ est la pulsation des oscillations de pendules libres. Les pulsations propres du système sont égales à ω_0 et $\sqrt{\omega_0^2 + \frac{2a}{m}}$;

$$\theta_1 = A_1\cos(\omega_0 t + \varphi_1) \text{ et}$$

$$\theta_2 = A_2\cos\left(\omega_0\sqrt{1 + \frac{2a}{m\omega_0^2}}\,t + \varphi_2\right).$$

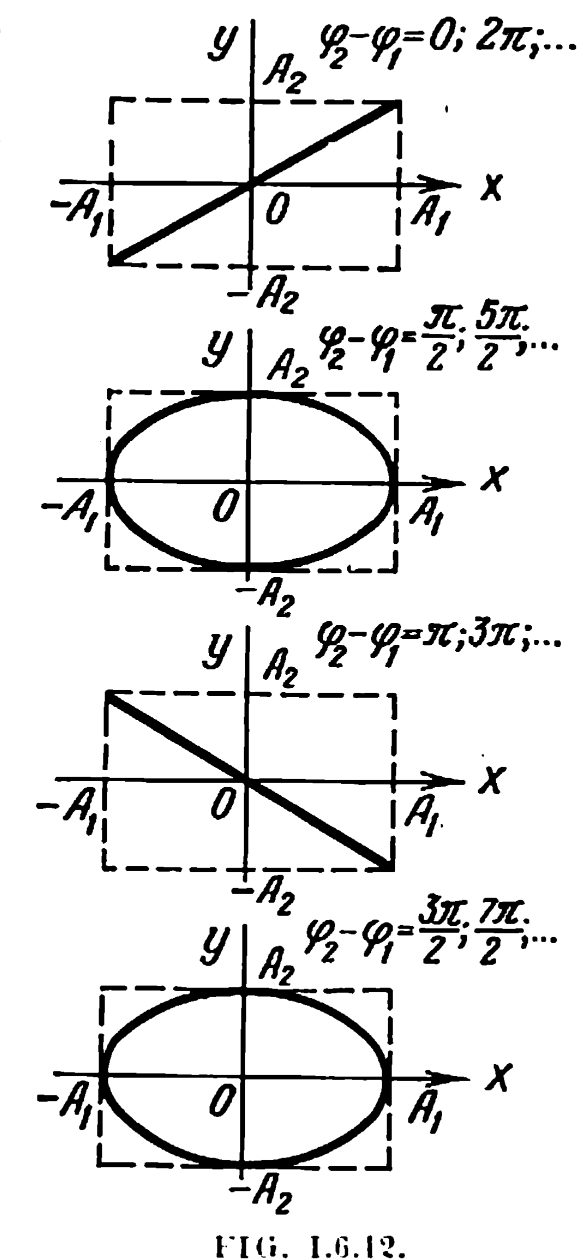


FIG. I.6.12.

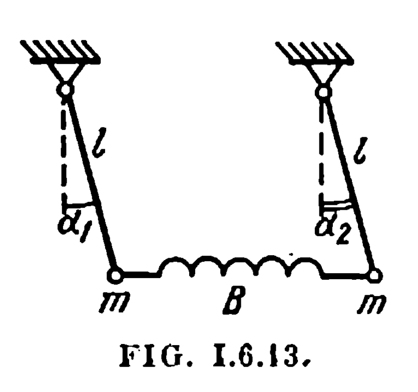


FIG. I.6.13.

B. OSCILLATIONS AMORTIES

1° S'il n'y a pas de frottement à sec dans le système (p. 58), on admet dans le cas de petites oscillations que les forces de frottement généralisées F_{fr_i}, correspondant aux coordonnées généralisées q_i, sont des fonctions linéaires des vitesses généralisées:

$F_{fr_i} = -\sum_{k=1}^{s} \alpha_{ik}\, \dot{x}_k$, où s est le nombre de degrés de liberté du système, x_k l'écart de ses coordonnées généralisées q_k par rapport à leurs valeurs d'équilibre q_{k0}, α_{ik} les coefficients de frottement généralisés ($\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$), que l'on peut considérer comme constants.

La dépendance entre l'énergie mécanique totale W du système et le temps est de la forme:

$$\frac{dW}{dt} = -2\Phi,$$

où $\Phi = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{s} \alpha_{ik}\, \dot{x}_i\, \dot{x}_k$ est la fonction dissipative du système, qui est définie positive, l'énergie W décroissant continuellement au cours du mouvement.

2° Les équations de Lagrange pour le système sont de la forme:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = F_{fr_i} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, s).$$

Utilisant pour la fonction de Lagrange l'expression p. 129, on obtient:

$$\sum_{k=1}^{s} (b_{ik}\, \ddot{x}_k + \alpha_{ik}\, \dot{x}_k + \beta_{ik}\, x_k) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, s). \qquad (*)$$

3° La solution de ce système d'équations différentielles linéaires homogènes du second ordre est analogue à celle du système (*) p. 129; il convient de rechercher les fonctions inconnues $x_k(t)$ sous la forme $x_k = A_k\, e^{\lambda t}$. Les relations entre les coefficients A_k sont définies du système d'équations algébriques linéaires homogènes

$$\sum_{k=1}^{s} (\beta_{ik} + \alpha_{ik}\lambda + b_{ik}\lambda^2) A_k = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, s). \quad (**)$$

L'équation caractéristique pour déterminer les valeurs de λ est de la forme:

$$\begin{vmatrix} \beta_{11} + \lambda\alpha_{11} + \lambda^2 b_{11} & \beta_{12} + \lambda\alpha_{12} + \lambda^2 b_{12} & \dots & \beta_{1s} + \lambda\alpha_{1s} + \lambda^2 b_{1s} \\ \beta_{21} + \lambda\alpha_{21} + \lambda^2 b_{21} & \beta_{22} + \lambda\alpha_{22} + \lambda^2 b_{22} & \dots & \beta_{2s} + \lambda\alpha_{2s} + \lambda^2 b_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{s1} + \lambda\alpha_{s1} + \lambda^2 b_{s1} & \beta_{s2} + \lambda\alpha_{s2} + \lambda^2 b_{s2} & \dots & \beta_{ss} + \lambda\alpha_{ss} + \lambda^2 b_{ss} \end{vmatrix} = 0.$$

Elle possède $2s$ racines λl $(l = 1, 2, \ldots, 2s)$ qui sont, les coefficients β_{ik}, α_{ik} et b_{ik} étant réels, soit réelles, soit complexes conjuguées par deux, c'est-à-dire $\lambda_l = \mu_l + i\omega_l$ et $\lambda^*_l = \mu_l - i\omega_l$, où $\mu_l < 0$ et $\omega_l \geqslant 0$. Les valeurs de $A_k = A_k(\lambda_l)$ obtenues du système (**) pour chaque couple de racines complexes conjuguées sont également complexes conjuguées:

$$A_k(\lambda_l) = \gamma_{kl} + i\delta_{kl}, \quad A_k(\lambda^*_l) = \gamma_{kl} - i\delta_{kl} = A^*_k(\lambda\ ).$$

La solution générale du système (*) dans le cas où toutes les racines λ_l sont différentes et complexes conjuguées est de la forme:

$$x_k = \sum_{l=1}^{s} e^{\mu_l t} \operatorname{Re}\left\{ A_k(\lambda_l) C_l e^{i\omega l t} \right\},$$

où C_l sont les constantes d'intégration complexes, définies par les conditions initiales (c'est-à-dire par les valeurs de x_k et $\dot{x}_k$ quand $t = 0$), et le symbole Re signifie la partie réelle de la fonction complexe mise entre accolades.

Si la racine λ_l est réelle $(\omega_l = 0)$, une composante apériodique $e^{\lambda_l t} A_k(\lambda_l) \operatorname{Re}\{C_l\}$ lui correspond dans l'expression de $x_k(t)$. Si toutes les racines λ_l sont réelles, le mouvement du système est entièrement apériodique.

C. OSCILLATIONS FORCÉES D'UN SYSTÈME NON DISSIPATIF

1° En coordonnées normales normées Q_l (p. 131) les équations différentielles du mouvement du système se décomposent en s équations indépendantes pour les oscillations forcées à une dimension, correspondant à chacune des coordonnées normales Q_l:

$$\ddot{Q}_l + \omega_l^2 Q_l = f_l(t) \qquad (l = 1, 2, \ldots, s),$$

où ω_l et $f_l(t) = \sum_{k=1}^{s} F_k(t) \frac{A_k(\omega_l^2)}{\sqrt{b_l}}$ sont la pulsation propre des os-

cillations du système et la force extérieure généralisée correspondant à la coordonnée normale Q_l, $F_k(t)$ la force extérieure (perturbatrice) généralisée, conjuguée à la coordonnée généralisée x_k; $A_k(\omega_l^2)$ et b_l ont la même signification que celle indiquée pp. 130-131.

La condition nécessaire pour qu'il y ait résonance est la présence, parmi les harmoniques, d'une force $f_l t$ dont la pulsation est voisine de ω_l.

2° Pour un système à deux degrés de liberté correspondant aux coordonnées généralisées x_1 et x_2, la relation entre les forces perturbatrices $F_k(t)$ et $f_l(t)$ est de la forme:

$$f_1(t) = \frac{\gamma_1 F_1(t) + F_2(t)}{\sqrt{b_1}},$$

$$f_2(t) = \frac{\gamma_2 F_1(t) + F_2(t)}{\sqrt{b_2}},$$

où γ_l et b_l ont la même signification que celle indiquée p. 132.

EXEMPLE. *Pendule à ressort double* (fig. I.6.14). Les oscillations ont lieu sous l'action d'une force perturbatrice $F(t)$. Les énergies cinétique et potentielle sont:

$$W_c = \frac{1}{2}(m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2),$$

$$W_p = \frac{1}{2}[a_1 x_1^2 + a_2 (x_2 - x_1)^2],$$

où x_1 et x_2 sont les écarts des points matériels m_1 et m_2 de leurs positions d'équilibre stable;

$$b_{11} = m_1, \quad b_{12} = 0, \quad b_{22} = m_2;$$

$$\beta_{11} = a_1 + a_2, \quad \beta_{12} = \beta_{21} = -a_2, \quad \beta_{22} = a_2.$$

Des équations citées p. 132 suit:

$$\gamma_1 = k + \sqrt{k^2 + \frac{m_2}{m_1}}, \quad \gamma_2 = k - \sqrt{k^2 + \frac{m_2}{m_1}},$$

où $k = \frac{1}{2} - \frac{m_2}{m_1} \; \frac{a_1 + a_2}{2a_2}$;

$$b_1 = m_1 p_1, \quad b_2 = m_2 p_2, \quad \beta_1 = a_1 n_1,$$

$$\beta_2 = a_2 n_2,$$

a_1
m_1
a_2
m_2
$F(t) = F_0 \cos \Omega t$

FIG. I.6.14.

où

$$p_1 = 2\left(k^2 + \frac{m_2}{m_1} + k\sqrt{k^2 + \frac{m_2}{m_1}}\right),$$

$$p_2 = 2\left(k^2 + \frac{m_2}{m_1} - k\sqrt{k^2 + \frac{m_2}{m_1}}\right),$$

$$n_1 = \left(1 + \frac{a_2}{a_1}\right)\left(2k^2 + \frac{m_2}{m_1} + 2k\sqrt{k^2 + \frac{m_2}{m_1}}\right) + \frac{a_2}{a_1}\left(1 - 2k - 2\sqrt{k^2 + \frac{m_2}{m_1}}\right),$$

$$n_2 = \left(1 + \frac{a_2}{a_1}\right)\left(2k^2 + \frac{m_2}{m_1} - 2k\sqrt{k^2 + \frac{m_2}{m_1}}\right) + \frac{a_2}{a_1}\left(1 - 2k + 2\sqrt{k^2 + \frac{m_2}{m_1}}\right).$$

Les carrés des pulsations propres sont égaux à

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 \frac{n_1}{p_1}, \qquad \omega_2^2 = \omega_0^2 \frac{n_2}{p_2},$$

où $\omega_0^2 = \frac{a_1}{m_1}$. Etant donné que $F_1(t) = 0$ et $F_2(t) = F(t) = F_0 \cos \Omega t$, on a:

$$f_1(t) = \frac{F_0}{\sqrt{m_1 p_1}} \cos \Omega t, \qquad f_2(t) = \frac{F_0}{\sqrt{m_1 p_2}} \cos \Omega t.$$

Les équations du mouvement en coordonnées normales normées sont:

$$\ddot{Q}_l + \omega_l^2 Q_l = \frac{F_0}{\sqrt{m_1 p_l}} \cos \Omega t \qquad (l = 1, 2).$$

La solution générale est de la forme:

$$Q_l = A_l \cos(\Omega t + \varphi_l) + B_l \cos(\omega_l t + \psi_l),$$

où le second terme caractérise les oscillations libres du système, alors que A_l et φ_l conformément aux formules des oscillations forcées à une dimension (p. 127) sont égales à

$$A_l = \frac{F_0}{\sqrt{m_1 p_l}\,(\omega_l^2 - \Omega^2)}, \qquad \operatorname{tg} \varphi_l = 0.$$

Les fonctions inconnues $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont égales à

$$x_1 = \frac{\gamma_1 Q_1}{\sqrt{m_1 p_1}} + \frac{\gamma_2 Q_2}{\sqrt{m_1 p_2}}, \qquad x_2 = \frac{Q_1}{\sqrt{m_1 p_1}} + \frac{Q_2}{\sqrt{m_1 p_2}}.$$

4. Oscillations d'un système non linéaire à un degré de liberté

A. DÉEINITIONS FONDAMENTALES

1° L'équation différentielle des oscillations d'un système non linéaire, dans le cas général, est de la forme:

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}, t) = 0.$$

2° Le système oscillant est dit *autonome* si le temps n'entre pas de façon explicite dans l'équation du mouvement:

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0. \qquad (*)$$

L'équation différentielle des oscillations du système *conservatif autonome* ne contient pas la vitesse généralisée $\dot{x}$:

$$\ddot{x} + f(x) = 0 \qquad (**)$$

et décrit les oscillations libres.

Le système *non conservatif autonome* est *dissipatif* si son mouvement représente des oscillations amorties. Si le système non conservatif autonome peut effectuer des oscillations périodiques, il est appelé système *autooscillant* et ses oscillations *autooscillations*. L'amplitude et la fréquence des autooscillations sont déterminées uniquement par les propriétés du système même.

3° Le système oscillant est *non autonome* si le temps entre explicitement dans l'équation différentielle du mouvement. Les oscillations forcées d'un système non autonome sont les processus ayant lieu dans ce système à condition que la fonction périodique donnée du temps $F(t)$ entre dans l'équation différentielle du mouvement en tant que terme:

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = F(t).$$

Le second membre de l'équation est appelé *force perturbatrice réduite*. Suivant la forme de la fonction $f(x, \dot{x})$ on distingue les oscillations forcées des systèmes non dissipatifs, dissipatifs ou autooscillants.

Les oscillations *paramétriques* sont des oscillations décrites par les équations différentielles de la forme:

$$\ddot{x} + [a + P(t)]x = 0,$$

où $P(t)$ est une fonction périodique donnée du temps.

B. OSCILLATIONS LIBRES D'UN SYSTÈME CONSERVATIF

1° Dans l'équation différentielle (**) (p. 140) $f(x)$ représente la force de rappel rapportée à l'unité de masse du système et dépendant non linéairement de la coordonnée x du système.

La dépendance $f(x)$ est appelée *caractéristique quasi élastique* du système. Quand $f(x) = -f(-x)$, la caractéristique quasi élastique est *symétrique*. Suivant le signe de la dérivée seconde $\frac{d^2f}{dx^2}$, la caractéristique quasi élastique symétrique est appelée

rigide si pour $x > 0$, on a $\frac{d^2f}{dx^2} > 0$ (fig. I.6.15, *a*),

non rigide si pour $x > 0$, on a $\frac{d^2f}{dx^2} < 0$ (fig. I.6.15, *b*).

2° Les oscillations libres d'un système conservatif sont périodiques mais anharmoniques. La période des oscillations libres dépend de l'amplitude des oscillations et, pour une caractéristique quasi élastique symétrique, elle est égale à

$$T = 2\sqrt{2}\int_0^A \frac{dx}{\sqrt{\int_x^A f(x)\,dx}},$$

où A est l'amplitude des oscillations.

EXEMPLE 1. La caractéristique quasi élastique cubique est $f(x) = x^3$. La période est:

$$T = 4\sqrt{2}\int_0^A \frac{dx}{\sqrt{A^4 - x^4}} = \frac{7{,}316}{A}.$$

EXEMPLE 2. Pendule simple avec de grands angles d'écart α (voir fig. I.6.3). La caractéristique quasi élastique est:

$$f(\alpha) = \frac{g}{l}\sin\alpha.$$

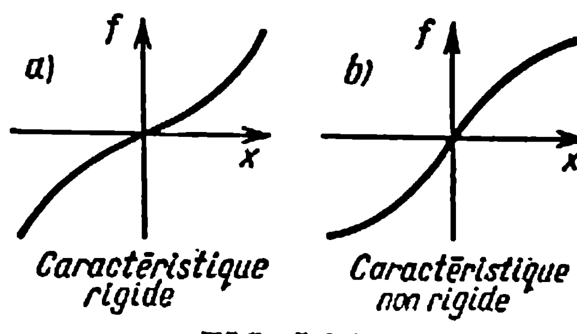


FIG. I.6.15.

La période est représentée par l'intégrale elliptique:

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^A \frac{d\alpha}{\sqrt{\sin^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}},$$

où A est le plus grand angle d'écart (l'amplitude des oscillations). La période T peut être représentée sous forme d'une série exponentielle:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\frac{A}{2} + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \sin^4\frac{A}{2} + \dots\right].$$

3° La formule approximative de la période des oscillations libres pour une forme arbitraire de la caractéristique quasi élastique symétrique est:

$$T = 2\pi A^2\sqrt{\frac{A}{5\int_0^A f(x)\, x^3\, dx}}.$$

C. OSCILLATIONS LIBRES DU SYSTÈME DISSIPATIF

1° Quand la dissipation d'énergie mécanique n'est pas trop grande, la pseudo-période des oscillations amorties libres est à peu près égale à la période $2\pi/\omega_0$ des oscillations libres du système conservatif correspondant, et le mouvement du système au cours d'une période se décrit approximativement par l'équation

$$x = A \cos \omega_0 t,$$

où A est l'amplitude des oscillations, fonction du temps. La courbe $A = A(t)$ représente l'enveloppe du graphique des oscillations.

2° Lors d'un frottement visqueux non linéaire la force de résistance non élastique réduite est de la forme:

$$R = k\,|\dot{x}|^{n-1}\,\dot{x},$$

où k et $n \neq 1$ sont des constantes du système. L'équation de l'enveloppe pour un système avec une caractéristique quasi élastique linéaire est:

$$A = \frac{A_0}{\sqrt[n-1]{1 + \frac{n-1}{2\pi} k\, S(\omega_0 A_0)^{n-1}}},$$

où A_0 est l'écart du système quand $t = 0$,

$$S = 2 \int_0^{\pi} \sin^{n+1} \psi \, d\psi.$$

Les valeurs de S sont données au tableau ci-après:

n	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
S	4,000	3,500	3,142	2,874	2,666	2,498	2,356

3° Le frottement interne de la substance lors d'une déformation cyclique est caractérisée par le phénomène *d'hystérésis* (fig. I.6.16). La *force de résistance non élastique réduite* est:

$$R = \pm bA^n \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}},$$

où b et n sont des constantes du système, et les signes plus et moins correspondent aux branches ascendante et descendante du cycle d'hystérésis. Quand $n = 1$, l'équation de l'enveloppe des oscillations amorties prend la forme:

$$A = A_0 e^{-\frac{bt\omega_0}{2\pi}};$$

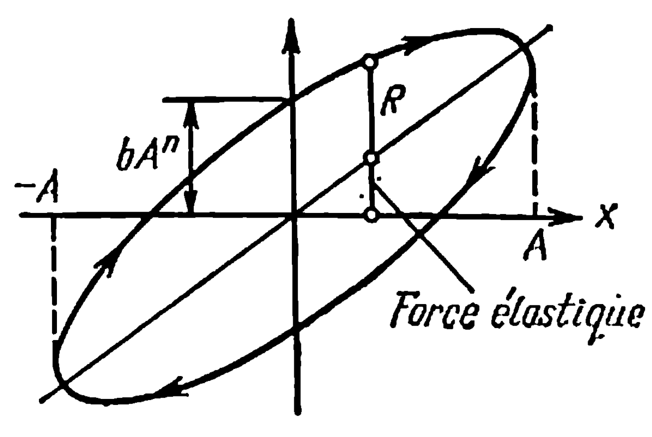


FIG. I.6.16.

quand $n \neq 1$, l'équation de l'enveloppe des oscillations amorties est:

$$A = \frac{A_0}{\sqrt[n-1]{1 + (n-1) b A_0^{n-1} \frac{\omega_0 t}{2\pi}}}.$$

D. OSCILLATIONS FORCÉES D'UN SYSTÈME NON DISSIPATIF

1° L'équation différentielle des oscillations d'un système non dissipatif conditionnées par l'action d'une force perturbatrice harmonique est de la forme:

$$\ddot{x} + f(x) = F_0 \sin \Omega t,$$

où F_0 est l'amplitude de la force perturbatrice par unité de masse, Ω la pulsation.

2° Pour une caractéristique quasi élastique symétrique cubique

$$f(x) = \omega_0^2 x + \beta x^3$$

l'équation

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = F_0 \sin \Omega t$$

a une solution approchée

$$x = A \sin \Omega t + \frac{\beta A^3}{32 \omega_0^2} (\sin \Omega t - \sin 3\Omega t),$$

qui contient, outre l'harmonique fondamental, un harmonique de pulsation triple. L'amplitude des oscillations est déterminée de l'équation cubique

$$(\Omega^2 - \omega_0^2) A - \frac{3}{4} \beta A^3 + F_0 = 0.$$

Pour de petites valeurs de la pulsation Ω, l'équation possède une racine réelle, pour de grandes pulsations, trois racines réelles à chacune desquelles correspondent des oscillations d'amplitude déterminée. La multivalence des solutions signifie que pour une pulsation donnée de la force perturbatrice sont possibles des oscillations avec des amplitudes différentes. Notons cependant que certaines oscillations ne sont pas stables. La dépendance entre les amplitudes des oscillations forcées et la pulsation de la force perturbatrice pour $\beta > 0$ est représentée fig. I.6.17, *a*. On a indiqué en pointillé les solutions instables, dépourvues de sens physique.

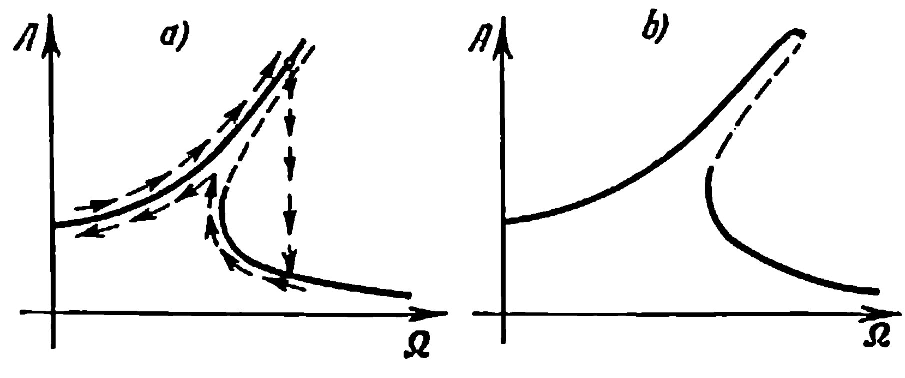


FIG. I.6.17.

La succession des variations de l'amplitude des oscillations forcées lors d'une variation lente de la pulsation de la force perturbatrice est indiquée par des flèches sur la figure I.6.17, *a*. Avec l'accroissement de Ω, l'amplitude des oscillations croît suivant la branche supérieure du graphique. Dès que la pulsation Ω commence à décroître, l'amplitude «se détache» brusquement de la branche supérieure et «saute» sur la branche inférieure du graphique. La décroissance ultérieure de Ω conduit à un nouveau «saut» de l'amplitude sur la branche supérieure du graphique.

3° Dans les systèmes non linéaires, en plus des oscillations de pulsations Ω, $3\,\Omega$, etc. (Ω est la pulsation de la force perturbatrice), sont possibles des oscillations *subharmoniques* dont les pulsations sont égales au quotient de la pulsation de la force perturbatrice par un nombre entier.

4° Sous l'action d'une *force perturbatrice polyharmonique* de type $F_1 \sin \Omega_1 t + F_2 \sin \Omega_2 t$ apparaissent, en plus des oscillations de pulsations Ω_1 et Ω_2, des oscillations de *pulsations combinatoires* $\Omega_1 + \Omega_2$ et $\Omega_1 - \Omega_2$. Les oscillations combinatoires de basse fréquence, correspondant à la pulsation $\Omega_1 - \Omega_2$ (parfois on les appelle également oscillations subharmoniques), ont la plus grande importance.

E. OSCILLATIONS FORCÉES D'UN SYSTÈME DISSIPATIF

1° L'équation différentielle des oscillations forcées d'un système non linéaire visqueux, ayant une caractéristique quasi élastique cubique, est de la forme:

$$x + \mu\dot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = F_0 \sin \Omega t.$$

2° On trouve la valeur approchée de l'amplitude des oscillations de l'équation

$$(\Omega^2 - \omega_0^2)\, A - \beta A^3 \pm F_0 \sqrt{1 - \frac{\mu^2}{F_0^2}(A\,\Omega)^2} = 0.$$

La dépendance de $A(\Omega)$ pour $\beta > 0$ est représentée fig. I.6.17, *b*. Les solutions non stables sont données en pointillé.

F. AUTOOSCILLATIONS

1° On utilise pour l'étude du mouvement des systèmes complexes (en particulier, autooscillants) la notion de plan des phases: plan des variables x et $v = \dot{x}$. A chaque état instantané du système, caractérisé par les grandeurs x et v, correspond sur le plan des phases un point figuratif (point des phases). A chaque processus de mouvement du système correspond une trajectoire des phases.

2° Les trajectoires des phases représentent les courbes intégrales de l'équation

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{f(x,\, v)}{v},$$

dans laquelle $f(x, v) = f(x, \dot{x})$ est la fonction appartenant à l'équation différentielle (*) du mouvement du système autonome (p. 140). Les points du plan des phases en lesquels $f(x, v) = 0$ et $v = 0$ sont dits *points singuliers*. Aux points singuliers correspondent les positions d'équilibre du système. Tous les autres points du plan des phases sont des *points simples*. Par chaque point simple passe une trajectoire des phases et une seule.

3° Le point singulier par lequel ne passe aucune des trajectoires des phases et qu'entourent des trajectoires des phases fermées est appelé *centre* (fig. I.6.18); au centre correspond une position d'équilibre stable.

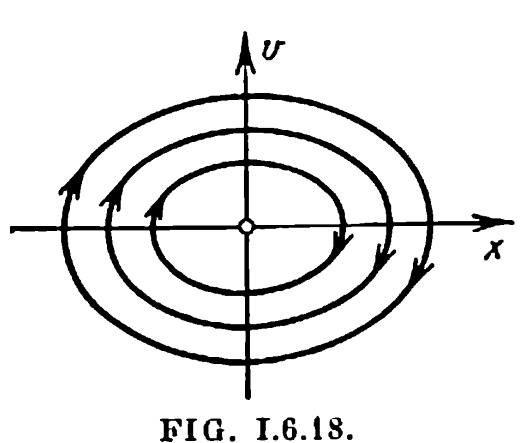


FIG. I.6.18.

Si, au voisinage d'un point singulier, les trajectoires des phases sont des hyperboles, et si, par le point singulier, ne passent que deux trajectoires des phases, un tel point est nommé *col* (fig. I.6.19); au col correspond une position d'équilibre instable.

Si, au voisinage d'un point singulier, les trajectoires des phases ont

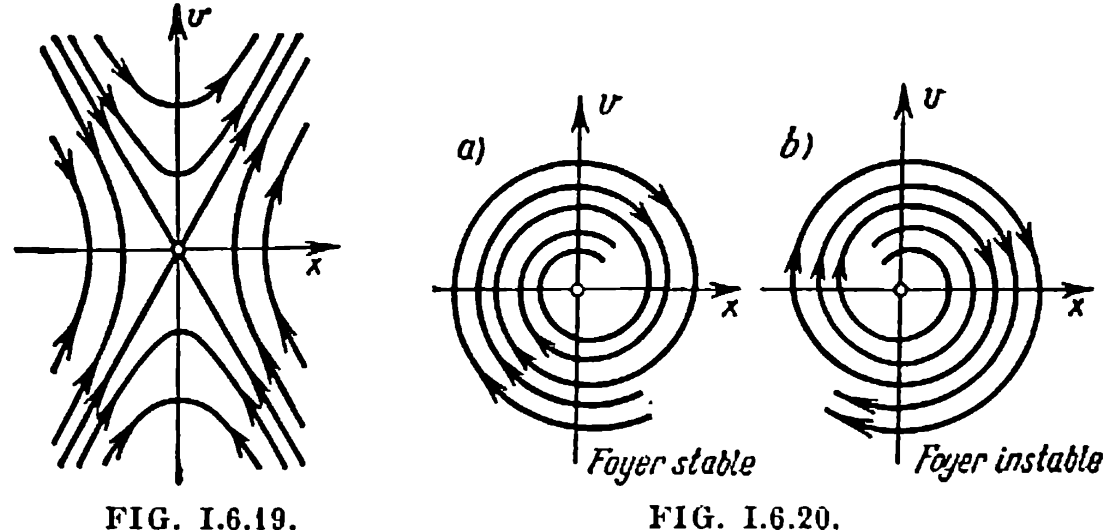


FIG. I.6.19. FIG. I.6.20.

la forme de spirales s'enroulant sur ce point ou se déroulant à partir de celui-ci, ce point est appelé *foyer*, dans le premier cas (fig. I.6.20,*a*) l'équilibre est stable et dans le second (fig. I.6.20, *b*), instable.

Si, au voisinage d'un point singulier, les trajectoires des phases sont des paraboles et passent toutes par ce point, un tel point est appelé *nœud* (fig. I.6.21). Lorsque les trajectoires des phases entrent dans le nœud, une position d'équilibre stable correspond à celui-ci; lorsque les trajectoires des phases sortent du nœud, il lui correspond une position d'équilibre instable.

EXEMPLE. Mouvement du pendule simple pour des conditions initiales arbitraires. Les trajectoires des phases sont représentées fig. I.6.22. Les points de l'axe d'abscisses 0; $\pm\ 2\pi$ représentent des centres, les points $\pm\ \pi$, des cols. A des vitesses initiales suffisamment grandes, les trajectoires des phases ont la forme d'onde et ne coupent en aucun point l'axe d'abscisses; à ces trajectoires correspondent des mouvements fuyants du pendule, c'est-à-dire un accroissement illimité de l'angle d'écart du pendule.

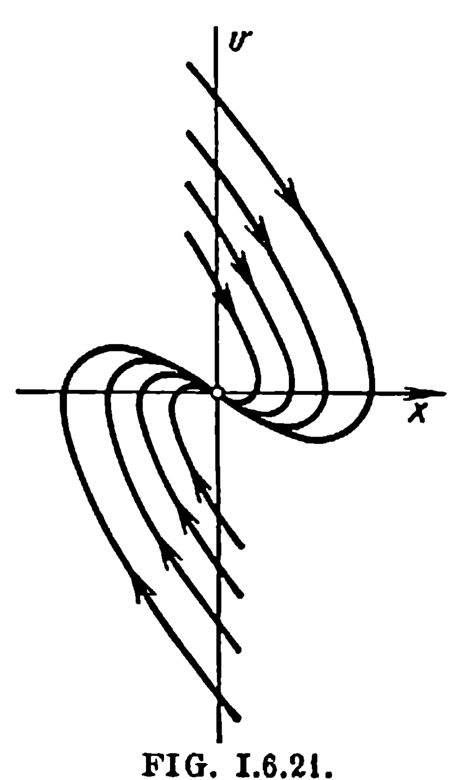


FIG. I.6.21.

4° On appelle *cycle limite* la courbe fermée C autour de laquelle s'enroulent ou bien à partir de laquelle se déroulent les trajectoires des phases en spirale, situées au voisinage de la courbe C. Si les trajec-

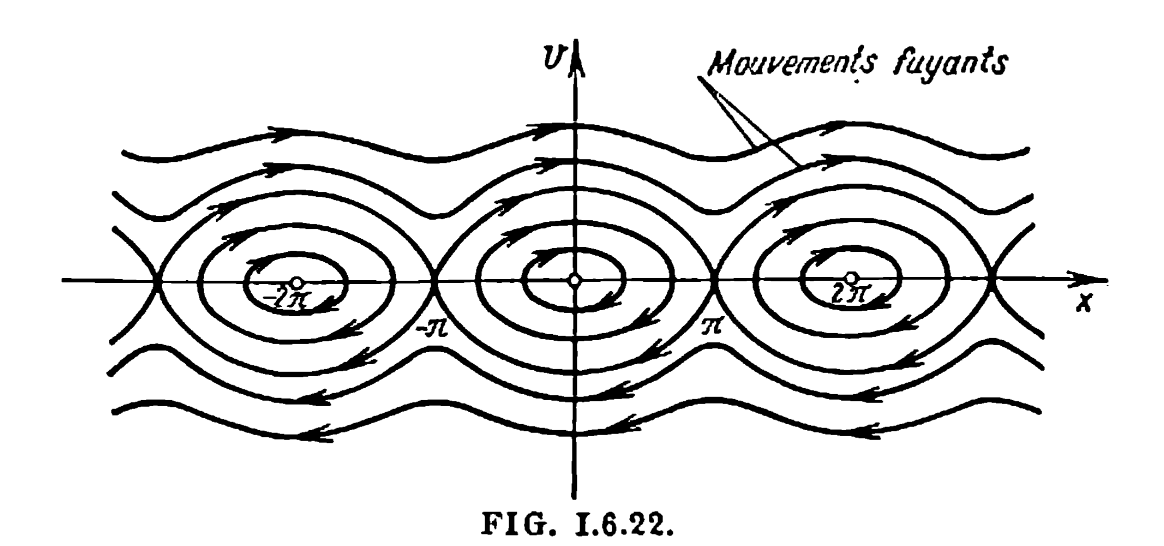


FIG. I.6.22.

toires des phases voisines s'enroulent autour de la courbe C, celle-ci est un *cycle limite stable* (fig. I.6.23); si elles se déroulent à partir de la courbe C, elle est un *cycle limite instable*. Si les trajectoires des phases se trouvant d'un côté de la courbe C s'enroulent autour de celle-ci, alors que celles présentes d'un autre côté se déroulent à partir d'elle, cette courbe est un *cycle limite mi-stable*.

5° Différences entre les cycles limites des systèmes non linéaires autonomes et les trajectoires des phases fermées décrivant les oscillations des systèmes conservatifs et entourant le point singulier de type centre sont comme suit: 1) les cycles limites sont des courbes isolées, alors que les trajectoires des phases fermées des systèmes conservatifs constituent une famille continue; 2) le mouvement suivant un cycle limite ne dépend pas des conditions initiales; le «choix» de telle ou telle trajectoire des phases de la famille continue dépend précisément des conditions initiales des systèmes conservatifs.

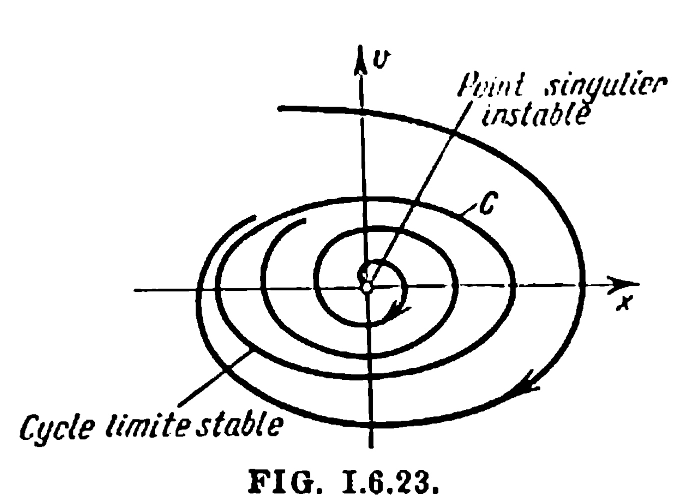


FIG. I.6.23.

6° Si plusieurs cycles limites forment un système concentrique, les cycles limites stables alternent avec les cycles limites instables; dans ce cas le point singulier, situé à l'intérieur de la famille de cycles limites, peut être considéré comme un cycle limite convergé en un point.

7° On appelle ***autoexcitation molle*** le passage du système de l'état d'équilibre instable à un mouvement suivant un cycle limite stable (fig. I.6.23). On appelle ***autoexcitation rigide*** le passage du système de l'état d'équilibre stable à un mouvement suivant un cycle limite stable; dans ce cas une perturbation initiale suffisamment grande est nécessaire pour faire «sauter» le point figuratif initial en dehors du contour d'un cycle limite instable, situé entre un point singulier stable et un cycle limite stable (fig. I.6.24).

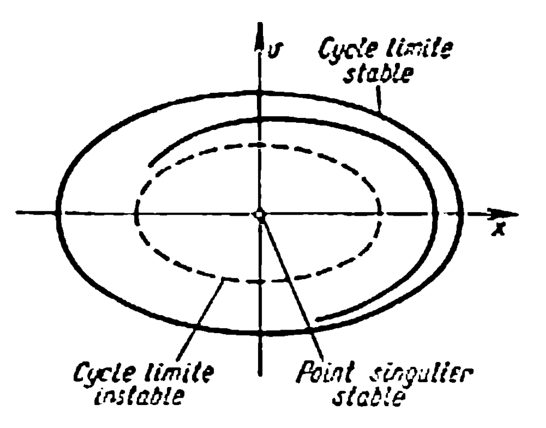


FIG. I.6.24.

8° On appelle ***quasi linéaires*** les systèmes mécaniques dont le mouvement est décrit par l'équation différentielle

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \mu f_1\left(x, \frac{dx}{dt}\right),$$

contenant un petit paramètre μ. Le passage au «temps sans dimension» $\tau = \omega_0 t$ conduit à l'équation différentielle

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + x = \mu f\left(x, \frac{dx}{d\tau}\right), \qquad (*)$$

dans laquelle

$$f\left(x, \frac{dx}{d\tau}\right) = \frac{1}{\omega_0^2} f_1\left(x, \frac{dx}{dt}\right).$$

La solution approchée de l'équation (*) est:

$$x = \rho \cos(\tau - \theta),$$

où ρ et θ sont des fonctions à variation lente du temps, déterminées par les ***équations d'établissement***

$$\frac{d\rho}{d\tau} = \mu\Phi(\rho), \qquad \frac{d\theta}{d\tau} = \mu\Psi(\rho),$$

dans lesquelles

$$\left.\begin{aligned} \Phi(\rho) &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\rho\cos\xi, -\rho\sin\xi)\sin\xi\, d\xi, \\ \Psi(\rho) &= \frac{1}{2\pi\rho}\int_0^{2\pi} f(\rho\cos\xi, -\rho\sin\xi)\cos\xi\, d\xi. \end{aligned}\right\} \qquad (**)$$

Ici $f(\rho\cos\xi, -\rho\sin\xi)$ est le résultat de la substitution à x de l'expression $\rho\cos\xi$ et à $\frac{dx}{d\tau}$ de l'expression $-\rho\sin\xi$ dans la fonction $f\left(x, \frac{dx}{d\tau}\right)$.

EXEMPLE. *Equation de Van der Pohl:*

$$\ddot{x} + x = \mu(1 - x^2)\dot{x}.$$

En vertu des formules (**) on trouve:

$$\Phi(\rho) = \frac{\rho}{8}(4 - \rho^2), \qquad \Psi(\rho) = 0.$$

Les équations d'établissement sont de la forme:

$$\frac{d\rho}{d\tau} = \frac{\mu\rho}{8}(4 - \rho^2), \qquad \frac{d\theta}{d\tau} = 0.$$

La loi de la variation de l'amplitude ρ dans le temps est:

$$\rho = \frac{2}{\sqrt{1 + Ce^{-\mu\tau}}},$$

où C est la constante dépendant des conditions initiales. Quand $t \to \infty$, la grandeur ρ tend vers la valeur $\rho = 2$ et le mouvement établi a lieu suivant un cycle limite.

La loi du mouvement est:

$$x = 2\cos\tau.$$

DEUXIÈME PARTIE

Éléments de thermodynamique et de physique moléculaire

CHAPITRE PREMIER

Notions fondamentales

1° La *physique moléculaire* est la science qui étudie les propriétés physiques et les états d'agrégation des corps en fonction de leur structure moléculaire, des forces d'interaction entre les particules les constituant et du caractère de l'agitation thermique de ces particules. On utilise pour l'étude théorique des problèmes cités deux méthodes qui se complètent mutuellement: la méthode statistique et la méthode thermodynamique.

2° La *méthode statistique* consiste à étudier les propriétés des systèmes macroscopiques à l'aide des méthodes de statistique mathématique, en se fondant sur les lois de l'agitation thermique d'un grand nombre de microparticules formant ces systèmes.

3° La *méthode thermodynamique* consiste à étudier les propriétés du système de corps en interaction par analyse des conditions et des relations quantitatives des transformations d'énergie se produisant dans le système. Ces questions sont examinées à la section de physique théorique appelée *thermodynamique.* La méthode thermodynamique, à la différence de la méthode statistique, n'est liée à aucune représentation concrète de la structure interne des corps et du caractère du mouvement des particules les constituant. La thermodynamique opère avec les caractéristiques macroscopiques des objets qu'elle considère en se basant sur quelques lois établies expérimentalement: les *principes de la thermodynamique.* Aussi utilise-t-on la méthode thermodynamique pour l'analyse théorique des lois générales des phénomènes les plus divers.

4° Le *système thermodynamique* est l'ensemble d'objets macroscopiques (corps et champs) échangeant d'énergie sous forme de travail et de chaleur (p. 63) aussi bien les uns avec les autres

qu'avec le milieu ambiant, c'est-à-dire avec les corps et les champs extérieurs au système.

Le système thermodynamique est *fermé* (ou *isolé*) s'il n'y a aucun échange d'énergie entre ce système et le milieu ambiant. Le système est *thermiquement isolé* ou *adiabatiquement isolé* s'il n'y a pas d'échange de chaleur entre ce système et l'extérieur. Le système thermodynamique qui échange de chaleur avec le milieu ambiant est *mécaniquement isolé*.

5° On appelle *homogène* le système thermodynamique à l'intérieur duquel il n'y a pas d'interfaces séparant les parties macroscopiques du système différentes en propriétés et en composition. Le système thermodynamique qui ne satisfait pas à cette condition est appelé *hétérogène*. Les mélanges de gaz, les solutions liquides et solides, ainsi que tout corps chimiquement homogène qui se trouve en état d'agrégation quelconque sont des systèmes homogènes. La glace fondante, la vapeur humide, beaucoup d'alliages et de roches sont des systèmes hétérogènes. Le système est *physiquement homogène* si la composition et les propriétés physiques de toutes ses parties macroscopiques de même volume sont identiques. Comme exemple d'un tel système peut servir le gaz sur lequel n'agit aucun champ extérieur.

La *phase* est l'ensemble de toutes les parties homogènes du système thermodynamique, qui, en l'absence des forces extérieures, sont physiquement homogènes. La vapeur humide, par exemple, est constituée de deux phases: liquide bouillant et vapeur saturée sèche.

On appelle *constituants (indépendants)* du système thermodynamique les différentes substances, le nombre minimum desquelles est suffisant pour former toutes les phases du système.

La *solution* est un système homogène (solide, liquide ou gazeux) composé de deux ou plusieurs corps chimiquement purs. L'un des constituants (celui qui est présent en plus grande quantité) est appelé *solvant* et les autres constituants, *solutés*.

6° L'état du système thermodynamique est déterminé par l'ensemble des *paramètres thermodynamiques (paramètres d'état)* qui représentent toutes les grandeurs physiques caractérisant les propriétés macroscopiques de ce système (densité, énergie, viscosité, polarisation, aimantation, etc.). Deux états du système sont dits différents si les valeurs numériques d'au moins un de leurs paramètres thermodynamiques ne sont pas les mêmes. L'état du système est *stationnaire* s'il est invariable dans le temps. L'état stationnaire du système peut être *équilibré* si son invariance dans le temps n'est pas due à l'évolution d'un processus extérieur au système.

Les paramètres thermodynamiques du système sont liés entre

eux. C'est pourquoi l'état d'équilibre du système peut être déterminé de façon univoque, par donnée des valeurs d'un nombre limité de ces paramètres (p. 207). Les *paramètres fondamentaux* d'état sont la pression, la température et le volume spécifique (ou molaire).

En thermodynamique, on distingue les paramètres extérieurs et intérieurs de l'état du système. Les *paramètres extérieurs* dépendent uniquement des coordonnées généralisées (p. 95) des corps extérieurs avec lesquels le système entre en interaction. Un exemple de paramètre extérieur pour le gaz est son volume, qui est fonction de la position des corps extérieurs (les parois du récipient). Pour le gaz se trouvant dans un champ de gravitation ou dans un autre champ de forces quelconque, ce champ est également un paramètre extérieur. Les *paramètres intérieurs* dépendent aussi bien des coordonnées généralisées des corps extérieurs que des valeurs moyennes des coordonnées et des vitesses des particules formant le système. La pression et l'énergie du système, par exemple, sont des paramètres intérieurs.

7° On appelle *pression* la grandeur physique p égale à la limite du quotient de la valeur numérique de la force normale ΔE_n, agissant sur un élément de surface ΔS du corps, par la grandeur ΔS quand ΔS tend vers zéro:

$$p = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta F_n}{\Delta S} = \frac{dF_n}{dS}.$$

On appelle *volume spécifique* v la grandeur inverse de la densité ρ (p. 41) : $v = 1/\rho$. Pour un corps homogène, le volume spécifique est égal au quotient de son volume par sa masse, autrement dit, il est numériquement égal au volume de l'élément de ce corps dont la masse est égale à l'unité.

La *molécule-gramme* ou *mole (molécule-kilogramme* ou *kmole)* est une quantité de corps chimiquement pur dont la masse, exprimée en grammes (kilogrammes), est numériquement égale à sa masse moléculaire μ. Le volume V_μ d'une mole de substance est appelé son *volume molaire:*

$$V_\mu = \mu v = \frac{\mu}{\rho}.$$

L'*atome-gramme (atome-kilogramme)* est une quantité de corps chimiquement simple (élément) dont la masse, exprimée en grammes (kilogrammes), est égale à son poids atomique. Le nombre de molécules contenues dans la molécule-gramme, ainsi que le nombre d'atomes renfermés dans l'atome-gramme, est le même pour toutes les substances. Ce nombre est appelé *nombre d'Avogadro* N_A($N_A = 6{,}023 \cdot 10^{23}$ mole^{-1}).

8° On appelle *température* une grandeur physique caractérisant le degré d'échauffement du corps (cf. également pp. 216 et 243). A l'état d'équilibre thermodynamique du système, la témpérature de tous les corps constituant le système est la même. La mesure de la température n'est possible qu'indirectement en se fondant sur la dépendance entre la température et les propriétés des corps, mesurables directement. Les corps utilisés à cet effet sont appelés *thermométriques* et l'échelle de température établie à leur aide, *échelle empirique.*

Le défaut principal des échelles empiriques de température consiste en leur dépendance des particularités spécifiques des corps thermométriques concrets (sur la possibilité de la construction d'une échelle de température thermodynamique universelle voir p. 177). En tant que valeurs initiales servant à construire l'échelle de température pour établir son origine et son unité, le *degré*, on utilise les températures de passage des corps chimiquement purs d'un état d'agrégation à un autre, par exemple la température de fusion de la glace (t_0) et la température d'ébullition de l'eau ($t_é$) sous pression atmosphérique normale de 760 mm Hg. Les grandeurs t_0 et $t_é$ en fonction du type de l'échelle ont les valeurs suivantes:

a) *échelle Celsius* (échelle centésimale: $t_0 = 0$ °C, $t_é = 100$ °C;

b) *échelle Fahrenheit:* $t_0 = 32$ °F, $t_é = 212$ °F.

La relation qui lie les températures exprimées en degrés Celsius et en degrés Fahrenheit est de la forme:

$$\frac{t\,°C}{100} = \frac{t\,°F - 32}{180}.$$

c) *échelle Kelvin* (cf. p. 177): la température T est comptée à partir du *zéro absolu* ($t = -273{,}15$ °C), elle est appelée *température absolue.* La relation entre les valeurs de la température d'après l'échelle Kelvin (T °K) et l'échelle Celsius (t °C) est de la forme:

$$T\,°K = t\,°C + 273{,}15\,°C.$$

9° Les paramètres intérieurs du système thermodynamique en état d'équilibre dépendent uniquement de ses paramètres extérieurs et de la température:

$$y_k = f(x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n,\ T), \qquad (*)$$

où y_k est le paramètre intérieur, $x_1, \ldots, x_n$ les paramètres extérieurs. L'état d'équilibre d'un système thermodynamique physiquement homogène, par exemple, conformément à la règle des phases de Gibbs (p. 207) est déterminé par deux paramètres. C'est pourquoi la pression d'équilibre de ce système est fonction de son volume et de sa température (la masse du système est sup-

posée fixe):

$$p = f_1(V, T). \qquad (**)$$

10° Si dans l'équation (*) y_k représente la force généralisée (p. 96) conjuguée à n'importe lequel des paramètres extérieurs $x_1, \ldots, x_n$, l'équation (*) est appelée *équation thermique de l'état du système (équation d'état du système)*. L'équation (**), par exemple, est une équation thermique d'état d'un système physiquement homogène.

L'équation (*), écrite pour l'énergie interne U du système (p. 161)

$$U = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, T),$$

est appelée *équation calorifique d'état du système*.

En thermodynamique, les équations d'état du système considéré sont supposées connues de l'expérience. La déduction théorique de ces équations est réalisée à l'aide des méthodes de physique statistique.

11° On appelle *transformation* ou *processus thermodynamique* chaque modification de l'état du système thermodynamique. Le processus thermodynamique lors duquel le système passe par une suite continue d'états équilibrés est dit *équilibré*. La transformation fermée (ou le *cycle*) est un processus thermodynamique lors duquel le système revient à son état initial après avoir subi telles ou telles modifications.

La transformation *isochore* est un processus qui se déroule à volume constant du système. La transformation *isobare* est un processus thermodynamique évoluant sous pression constante. La transformation qui se déroule à température constante est dite *isotherme*.

La transformation thermodynamique subie par le système sans échange de chaleur avec les corps extérieurs est considérée comme *adiabatique*.

On appelle *relaxation* le processus ramenant à son état d'équilibre thermodynamique le système sorti de cet état. La vitesse des processus de relaxation est caractérisée par le *temps de relaxation*, qui représente l'intervalle de temps au cours duquel l'écart d'un paramètre quelconque par rapport à sa valeur d'équilibre diminue de e fois.

12° On appelle *fonction d'état* une caractéristique physique du système dont la variation, lors du passage du système d'un état à l'autre, ne dépend pas du genre de processus thermodynamique correspondant à ce passage; elle est entièrement déterminée par les valeurs des paramètres des états initial et final. L'énergie interne

U (p. 161), l'enthalpie H (p. 163), l'entropie S (p. 183), le potentiel isochore-isotherme F (p. 189) et le potentiel isobare-isotherme Φ (p. 189) représentent des fonctions d'état fondamentales.

On entend par *grandeurs extensives* les fonctions d'état d'un système thermodynamique qui dépendent de la masse de celui-ci. Telles sont les fonctions énumérées ci-dessus. Dans les équations de thermodynamique on utilise souvent les valeurs des grandeurs extensives rapportées soit à l'unité de masse du système, soit à une mole.

On appelle *grandeurs intensives* les fonctions d'état d'un système thermodynamique qui ne dépendent pas de la masse de celui-ci. Telles sont la température, la densité, la viscosité, la perméabilité diélectrique, etc.

13° Les états d'équilibre d'un système physiquement homogène et les processus équilibrés dont il est le siège peuvent être représentés graphiquement par des points et par des courbes sur un plan des coordonnées rectangulaires cartésiennes en portant sur les axes les paramètres d'état du système ou les fonctions d'état reliées à ceux-ci de façon univoque. Une telle représentation graphique est appelée *diagramme thermodynamique*. Les diagrammes $V—p$, $S—T$ et $S—H$ (le premier symbole traduit la grandeur portée en abscisses, le second, celle portée en ordonnées) sont les diagrammes les plus utilisés.

CHAPITRE 2

Lois des gaz parfaits

1. Gaz parfaits

1° On appelle *gaz parfait* un gaz dans lequel font absence les forces d'interaction intermoléculaire. Avec une précision suffisante les gaz sont admis parfaits si leurs états sont considérés loin des domaines de transformations de phase.

2° Les gaz parfaits obéissent aux lois suivantes:

a) *loi de Boyle-Mariotte:* à température et masse constantes le produit de la pression par le volume du gaz est constant:

$$pV = \text{const.}$$

b) *loi de Gay-Lussac:* sous pression constante le volume d'une masse de gaz donnée est proportionnel à sa température absolue:

$$V = \alpha V_0 T = V_0 \frac{T}{T_0},$$

où V_0 est le volume du gaz à $T_0 = 273{,}15$ °K, $\alpha = 1/T_0$ est le *coefficient de dilatation volumétrique.*

c) *loi de Charles:* à volume constant la pression d'une masse de gaz donnée est proportionnelle à sa température absolue:

$$p = p_0 - \frac{T}{T_0},$$

où p_0 est la pression du gaz à $T_0 = 273{,}15$ °K.

d) *loi d'Avogadro:* les volumes égaux de tous les gaz parfaits pris dans les mêmes conditions de température et de pression renferment un même nombre de molécules ou, à mêmes pressions et températures les molécules-grammes de différents gaz parfaits occupent un même volume.

Ainsi, dans les conditions normales ($t = 0$ °C et $p = 101\ 325$ N/m^2 = 1 atm = 760 mm Hg) les molécules-grammes de tous les gaz parfaits occupent le volume $V_\mu = 22{,}414$ l. Le nombre de molécules contenu dans 1 cm^3 de gaz parfait dans les conditions normales est appelé *nombre de Loschmidt*; il est égal à $2{,}687 \cdot 10^{19}$ 1/cm^3.

3° L'équation d'état d'un gaz parfait est de la forme:

$$pV_\mu = RT,$$

où p, V_μ et T sont respectivement la pression, le volume molaire et la température absolue du gaz et R la *constante universelle des gaz*, numériquement égale au travail effectué par une mole de gaz parfait lorsqu'on le réchauffe isobariquement d'un degré:

$$R = 8{,}31 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kmole} \cdot \text{degré}} = 0{,}0821 \frac{\text{l} \cdot \text{atm}}{\text{mole} \cdot \text{degré}} = 0{,}848 \frac{\text{kgf} \cdot \text{m}}{\text{mole} \cdot \text{degré}} =$$

$$= 8{,}31 \cdot 10^7 \frac{\text{erg}}{\text{mole} \cdot \text{degré}} = 1{,}987 \frac{\text{cal}}{\text{mole} \cdot \text{degré}}.$$

Le volume d'une masse arbitraire M du gaz est $V = \frac{M}{\mu} V_\mu$ et son équation d'état est

$$pV = \frac{M}{\mu} RT.$$

Cette équation est appelée *équation de Mendéléev-Clapeyron*. Etant donné que $V/M = v$ est le volume spécifique du gaz, on a:

$$pv = \frac{R}{\mu} T = BT,$$

où $B = R/\mu$ est la *constante spécifique des gaz* dépendant du poids moléculaire du gaz.

4° Il suit de l'équation de Mendéléev-Clapeyron que le nombre n_0 de molécules contenu dans une unité de volume de gaz parfait est égal à

$$n_0 = \frac{N_A}{V_\mu} = \frac{pN_A}{RT} = \frac{p}{kT},$$

où $k = R/N_A = 1{,}38 \cdot 10^{28}$ J/degré $= 1{,}38 \cdot 10^{-16}$ erg/degré est la *constante de Boltzmann*, N_A le nombre d'Avogadro (p. 153).

2. Mélanges de gaz parfaits

1° Le *mélange de gaz* est l'ensemble de plusieurs gaz hétérogènes qui, dans des conditions données, n'entrent pas en réaction

chimique l'un avec l'autre. Le mélange de gaz représente un système thermodynamique homogène (p. 152).

On appelle ***concentration pondérale*** g_i ***(fraction gravimétrique, concentration de fraction gravimétrique)*** du i-ième gaz faisant partie du mélange le rapport de sa masse M_i à la masse M de tout le mélange

$$g_i = \frac{M_i}{M} = \frac{M_i}{\sum\limits_{i=1}^{N} M_i},$$

où N est le nombre total des gaz hétérogènes constituant le mélange.

On appelle ***concentration molaire*** x_i ***(fraction molaire, concentration de fraction molaire)*** du i-ième gaz le quotient du nombre de moles de ce gaz par le nombre de moles de tous les gaz du mélange:

$$x_i = \frac{\frac{M_i}{\mu_i}}{\sum\limits_{i=1}^{N} \frac{M_i}{\mu_i}},$$

où μ_i est le poids moléculaire du i-ième gaz.

2° On appelle ***pression partielle*** p_i du i-ième gaz du mélange la pression qu'exercerait ce gaz si tous les autres gaz étaient éliminés du mélange, le volume et la température étant les mêmes:

$$p_i = \frac{M_i}{\mu_i} \frac{RT}{V}, \qquad (*)$$

où V et T sont le volume et la température du mélange.

La *loi de Dalton:* la pression totale d'un mélange de gaz parfaits est la somme de leurs pressions partielles:

$$p = \sum_{i=1}^{N} p_i = \frac{RT}{V} \sum_{i=1}^{N} \frac{M_i}{\mu_i}. \qquad (**)$$

Il suit de la loi de Dalton que la pression partielle du i-ième gaz est égale au produit de la pression du mélange par la concentration molaire de ce gaz: $p_i = x_i p$.

3° On appelle ***volume partiel*** V_i du i-ième gaz du mélange le volume qu'occuperait ce gaz si tous les autres gaz étaient éliminés du mélange, la pression et la température étant les mêmes:

$$V_i = \frac{M_i}{\mu_i} \frac{RT}{p}. \qquad (***)$$

De (**) et (***) est déduite la *loi d'Amagat:* le volume d'un mélange de gaz parfaits est égal à la somme de leurs volumes partiels:

$$V = \sum_{i=1}^{N} V_i.$$

Le volume partiel du i-ième gaz est égal au produit du volume du mélange par la concentration molaire de ce gaz: $V_i = x_i V$.

4° Pour calculer les paramètres d'état d'un mélange de gaz parfaits, on peut utiliser l'équation de Mendéléev-Clapeyron écrite sous la forme:

$$pV = \frac{M}{\mu_m} RT$$

ou

$$pV = MB_m T,$$

où $\mu_m = \dfrac{1}{\sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{g_i}{\mu_i}}$ est le *poids moléculaire apparent du mélange,*

$B_m = \dfrac{R}{\mu_m} = R \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{g_i}{\mu_i}$ la constante spécifique des gaz du mélange.

CHAPITRE 3

Premier principe de la thermodynamique

1. Energie interne et enthalpie

1° On appelle *énergie interne U* l'énergie d'un système qui dépend uniquement de l'état thermodynamique de celui-ci. Pour un système qui n'est pas sollicité par des forces extérieures et qui se trouve en état de repos macroscopique l'énergie interne représente l'énergie totale du système. Dans quelques cas les plus simples l'énergie interne est égale à la différence entre l'énergie totale W du système et la somme de l'énergie cinétique W_c de son mouvement macroscopique et de l'énergie potentielle W_p^{ext} due à l'action des champs extérieurs sur le système:

$$U = W - (W_c + W_p^{ext}).$$

L'énergie interne du système comprend l'énergie du mouvement chaotique (thermique) de toutes les microparticules (molécules, atomes, ions, etc.), l'énergie d'interaction de ces particules, l'énergie des couches électroniques des atomes et ions, l'énergie intranucléaire, etc.

2° L'énergie interne est une fonction d'état univoque du système: sa variation ΔU, quand le système passe de l'état 1 à l'état 2, ne dépend pas du type de transformation: $\Delta U = U_2 - U_1$. Si le système est soumis à une transformation fermée (p. 155), la variation totale de son énergie interne est nulle:

$$\oint dU = 0.$$

3° L'énergie interne ne peut être déterminée qu'à la constante additive près U_0 que l'on ne peut trouver par les méthodes de la thermodynamique. Toutefois, ceci n'a aucune importance étant

donné que lors de l'analyse thermodynamique du système, on a affaire non aux valeurs absolues de son énergie interne, mais aux variations de cette énergie dans différents processus qui ne dépendent pas de U_0. C'est pourquoi on suppose généralement que $U_0 = 0$ et on ne comprend sous l'énergie interne du système que sa partie variable. Pour des températures non très élevées, par exemple, on peut admettre l'énergie interne du gaz parfait égale à la somme des énergies cinétiques du mouvement chaotique de ses molécules.

4° L'énergie interne du système homogène est une grandeur additive: elle est la somme des énergies internes de toutes les parties macroscopiques du système, autrement dit, elle est proportionnelle à sa masse. L'énergie interne d'un système hétérogène comprend non seulement la somme des énergies internes de toutes les parties homogènes du système mais aussi l'énergie de l'interaction moléculaire de leurs couches superficielles. Néanmoins on peut également admettre, dans la plupart des cas, que l'énergie interne du système hétérogène est une grandeur additive égale à la somme des énergies internes de toutes les phases du système. Cette admission n'est pas applicable, par exemple, aux systèmes hétérogènes finement dispersés.

5° L'énergie interne d'un gaz parfait dépend uniquement de sa température absolue T (p. 154), elle est proportionnelle à la masse M du gaz:

$$U = \int_0^T C_V \, dT + U_0 = M \left[\int_0^T c_V \, dT + u_0 \right],$$

où C_V et $c_V = C_V/M$ sont la capacité calorifique (p. 164) et la chaleur spécifique (p. 165) du gaz dans un processus isochore, $u_0 = U_0/M$ l'énergie interne d'une unité de masse de gaz quand $T = 0°$K. Pour les gaz monoatomiques, dans le cas de températures non très élevées, C_V ne dépend pas de la température et $U = C_V T + U_0$.

L'énergie interne d'un mélange de N gaz parfaits est la somme des énergies internes des gaz entrant dans la composition du mélange:

$$U = \sum_{i=1}^{N} U_i = \sum_{i=1}^{N} \left[\int_0^T C_{V_i} dT + U_{0i} \right],$$

où C_{V_i} est la capacité calorifique du i-ième constituant du mélange dans une transformation isochore.

L'énergie interne du gaz de Van der Waals (p. 256) est égale à

$$U = \int_0^T C_V dT - \frac{M^2}{\mu^2}\frac{a}{V} + U_0,$$

où M est la masse du gaz, μ son poids moléculaire, a le coefficient de Van der Waals.

6° On appelle *enthalpie H (chaleur interne, fonction thermique)* une fonction d'état du système thermodynamique égale à la somme de son énergie interne et du produit de la pression par le volume du système exprimé en mêmes unités:

$$H = U + pV.$$

L'enthalpie d'un gaz parfait dépend seulement de sa température absolue (p. 154) et est proportionnelle à la masse M du gaz:

$$H = \int_0^T C_p dT + H_0,$$

où C_p est la capacité calorifique du gaz dans une transformation isobare (p. 167), $H_0 = U_0$ l'enthalpie du gaz pour $T = 0$ °K. Pour les gaz monoatomiques $H = C_p T + H_0$.

L'enthalpie d'un mélange de N gaz parfaits est la somme des enthalpies de tous les gaz entrant dans la composition du mélange:

$$H = \sum_{i=1}^{N} H_i = \sum_{i=1}^{N}\left[\int_0^T C_{pi} dT + H_{0i}\right],$$

où C_{pi} est la capacité calorifique du i-ième constituant du mélange dans une transformation isobare.

On appelle transformation *isenthalpique* le processus thermodynamique au cours duquel l'enthalpie du système ne varie pas.

2. Travail et chaleur

1° La condition nécessaire pour qu'un système accomplisse un *travail* est le déplacement des corps extérieurs avec lesquels ce système entre en interaction, autrement dit, la variation des paramètres extérieurs du système. Le travail élémentaire δA effectué par le système sur le corps extérieur est:

$$\delta A = \sum_i F_i dx_i,$$

où x_i sont les paramètres extérieurs de l'état du système et F_i les forces généralisées correspondantes (p. 96). Le travail élémentaire $\delta A'$ effectué par les corps extérieurs sur le système est numériquement égal à δA, mais de signe contraire: $\delta A' = -\delta A$.

2° On appelle *travail de détente* le travail effectué par le système contre les forces de pression extérieure. Le travail élémentaire de détente du système, soumis à une pression extérieure uniformément répartie p_{ext}, est égal à $\delta A = p_{ext}\, dV$.

Dans le cas d'un processus de détente équilibrée (quasi statique) p_{ext} est toujours égale à la pression p à l'intérieur du système et $\delta A = p\, dV$. Le travail de détente équilibrée d'un système du volume V_1 au volume V_2 est égal à

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p\, dV.$$

Sur le diagramme $V - p$ ce travail est déterminé par l'aire limitée par la courbe du processus, l'axe d'abscisses et les droites verticales $V = V_1$ et $V = V_2$ (hachurée sur la figure II.3.1).

Le travail effectué par le système dépend de la manière dont varie son état. Le travail de détente, par exemple, dépend non seulement des paramètres des états initial (p_1, V_1) et final (p_2, V_2) mais aussi du caractère du processus $1 - 2$. C'est sur ce fait qu'est fondé le principe d'action de toutes les machines thermiques.

3° Il faut communiquer différentes quantités de chaleur au système pour le faire passer d'un état à un autre par diverses transformations thermodynamiques. Autrement dit, la chaleur et le travail sont fonction du processus de variation de l'état du système. C'est pourquoi la quantité élémentaire de chaleur δQ communiquée au système au cours d'une variation faible de son état ne représente pas, tout comme le travail élémentaire δA, une différentielle totale (p. 63).

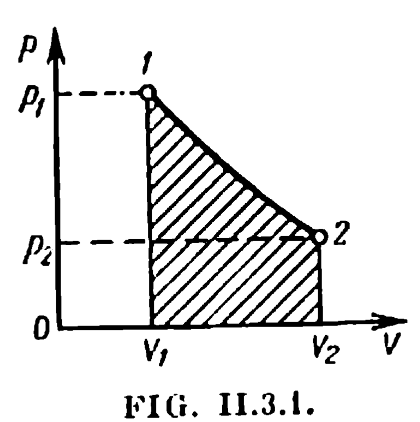


FIG. II.3.1.

3. Capacité calorifique

1° On appelle *capacité calorifique (capacité calorifique vraie)* C d'un corps le rapport de la quantité élémentaire de chaleur δQ, qui lui est communiquée lors d'un

processus quelconque, à la variation correspondante de température du corps:

$$C = \frac{\delta Q}{dT}.$$

La capacité calorifique dépend de la masse du corps, de sa composition chimique, de son état thermodynamique et du mode de transmission de la chaleur.

2° La *capacité calorifique moyenne* $\bar{C}$ d'un corps, dans l'intervalle de températures de T_1 à $T_2 > T_1$, est le quotient de la quantité de chaleur Q, nécessaire pour élever la température du corps de T_1 à T_2, par $T_2 - T_1$:

$$\bar{C} = \frac{Q}{T_2 - T_1}.$$

La relation entre la capacité calorifique moyenne du corps et sa capacité calorifique est de la forme:

$$\bar{C} = \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} C \, dT.$$

3° La *chaleur spécifique* c est la capacité calorifique de l'unité de masse d'un corps homogène. Pour un corps homogène $c = C/M$, où M est la masse du corps.

Pour un mélange de N gaz $c = \sum_{i=1}^{N} g_i c_i$, où c_i et g_i sont la chaleur specifique et la concentration pondérale du i-ième constituant du mélange.

4° La *chaleur atomique* C_a est la capacité calorifique d'un atome-gramme (atome-kilogramme) d'un corps simple: $C_a = Ac$, où A est le poids atomique du corps.

On appelle *chaleur molaire* C_μ la capacité calorifique d'une mole (kilomole) de corps: $C_\mu = \mu c$, où μ est le poids moléculaire du corps (cf. la théorie de la capacité calorifique des gaz pp. 243 et 245 à 247, la théorie des corps solides p. 287).

5° La quantité élémentaire de chaleur δQ qu'il faut communiquer au corps pour faire changer sa température de T à $T + dT$ est

$$\delta Q = C \, dT.$$

Dans le cas d'un corps homogène $\delta Q = Mc \, dT = \frac{M}{\mu} C_\mu \, dT.$

Pour un corps chimiquement simple $\delta Q = \frac{M}{A} C_a \, dT.$

4. Premier principe de la thermodynamique

1° En thermodynamique, on considère généralement des systèmes macroscopiques immobiles[1]). Pour de tels systèmes la loi de la conservation et de la transformation de l'énergie est traduite ainsi:

$$\Delta U = Q + A',$$

où A' est le travail effectué par les corps extérieurs sur le système, Q la quantité de chaleur communiquée au système, ΔU la variation de l'énergie interne du système. Si ΔU, Q et A' sont mesurés en unités différentes (A' en unités mécaniques, Q et ΔU en unités calorifiques), on a:

$$\frac{1}{J}\Delta U = \frac{1}{J} Q + A',$$

où J est l'*équivalent mécanique de l'unité de chaleur* ($J =$ $= 4{,}18$ J/cal $= 0{,}427$ kgf·m/cal). La grandeur $\frac{1}{J} = 0{,}239$ cal/J $=$ $= 2{,}34$ cal/kgf·m est appelée *équivalent calorifique de l'unité de travail*. (Par la suite on admettra que toutes les grandeurs sont mesurées en unités d'un même système.)

2° Le travail A effectué sur les corps extérieurs par le système (contre les forces extérieures) est égal à $-A'$. Aussi vient-il:

$$Q = \Delta U + A.$$

La quantité de chaleur fournie au système est dépensée sur la variation de son énergie interne et sur le travail qu'accomplit le système contre les forces extérieures *(premier principe de la thermodynamique)*.

Si le système représente une machine à fonctionnement périodique, dans laquelle le gaz (la vapeur ou autre corps de travail) accomplit une transformation fermée et revient à son état initial, on a $\Delta U = 0$ et $A = Q$. Par conséquent, la construction d'un moteur à fonctionnement périodique qui effectuerait un travail plus grand que l'énergie qui lui serait fournie de l'extérieur est impossible (le *mouvement perpétuel de première espèce* est irréalisable).

3° Pour une variation élémentaire de l'état du système le premier principe de la thermodynamique est de la forme:

$$\delta Q = dU + \delta A$$

---

[1]) Le premier principe de la thermodynamique pour les systèmes en mouvement voir p. 340.

ou

$$C\,dT = dU + \delta A,$$

où C est la capacité calorifique du système.

Si sur le système, en plus de la pression extérieure uniformément répartie, agissent d'autres forces, le travail δA est égal à la somme du travail de détente, c'est-à-dire du travail contre la pression extérieure $p_{ext}\,dV$, et du travail δA^* effectué par le système contre d'autres forces extérieures: $\delta A = p_{ext}\,dV + \delta A^*$. Pour un processus équilibré p_{ext} est égale à la pression p à l'intérieur du système, et le premier principe de la thermodynamique s'écrit:

$$C\,dT = dU + p\,dV + \delta A^*$$

ou

$$C\,dT = dH - V\,dp + \delta A^*,$$

où H est l'enthalpie du système (p. 163).

4° Pour un processus équilibré d'un système monophasé à un constituant, soumis à une pression extérieure uniforme, $\delta A^* = 0$, $U = f(T, V)$ et $H = f_1(T, p)$, de sorte que

$$C\,dT = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right] dV,$$

ou

$$C\,dT = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p dT + \left[\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T - V\right] dp.$$

Pour les transformations isochores ($V =$ const) la capacité calorifique C_V est:

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V.$$

Pour les transformations isobares ($p =$ const) la capacité calorifique C_p est:

$$C_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right]\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p =$$

$$= C_V + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right]\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p.$$

5° Pour un gaz parfait $U = Mf(T)$, $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = 0$ et $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{M}{\mu}\frac{R}{p}$, où M et μ sont la masse et le poids moléculaire du gaz.

Equation de Mayer: $C_p - C_V = \frac{M}{\mu} R$, ou pour les chaleurs molaires: $C_{p\mu} - C_{V\mu} = R$, pour les chaleurs spécifiques $c_p - c_V = \frac{R}{\mu}$.

La grandeur $\varkappa = \frac{C_p}{C_V} = \frac{C_{p\mu}}{C_{V\mu}} = \frac{c_p}{c_V}$ est appelée *indice d'adiabatique.* De l'équation de Mayer il vient que

$$C_V = \frac{R}{\varkappa - 1} \frac{M}{\mu}, \qquad C_{V\mu} = \frac{R}{\varkappa - 1}, \qquad c_V = \frac{R}{(\varkappa - 1)\mu};$$

$$C_p = \frac{\varkappa R}{\varkappa - 1} \frac{M}{\mu}, \qquad C_{p\mu} = \frac{\varkappa R}{\varkappa - 1}, \qquad c_p = \frac{\varkappa R}{(\varkappa - 1)\mu}.$$

6° On appelle *effet thermique* E la somme de la quantité de chaleur Q', cédée par le système lors de la transformation, et de l'équivalent calorifique de travail A^* égal à la différence entre le travail total du système et son travail de détente: $E = Q' + A^*$. Etant donné que $Q' = -Q$, où Q est la quantité de chaleur communiquée au système, il suit du premier principe de la thermodynamique que dans un processus équilibré:

$$E = U_1 - U_2 - \int_1^2 p\, dV = H_1 - H_2 + \int_1^2 V\, dp.$$

7° *Loi de Hess:* l'effet thermique de la réaction se déroulant dans le système à volume constant ou sous pression constante ne dépend pas des stades intermédiaires mais uniquement des états initial et final du système. Pour une transformation isochore $E_V = -\Delta U = U_1 - U_2$, pour une transformation isobare $E_p = -\Delta H = H_1 - H_2$.

La loi de Hess, qui exprime le premier principe de la thermodynamique sous une forme applicable aux processus chimiques, est la loi fondamentale de la *thermochimie.* De cette loi découle toute une série de conséquences, qui simplifient beaucoup le calcul des réactions chimiques se déroulant dans le système à $p =$ const ou $V =$ const;

a) l'effet thermique de la réaction de décomposition d'une combinaison chimique est numériquement égal et de signe contraire à l'effet thermique de la réaction de synthèse de cette combinaison à partir des produits de décomposition;

b) la différence des effets thermiques de deux réactions partant de différents états initiaux mais aboutissant à des états finals identiques est égale à l'effet thermique de la réaction de passage d'un état initial à un autre. L'effet thermique d'une réaction quelconque est donc la somme algébrique des effets thermiques obtenus lors de la combustion de corps réagissants jusqu'à formation de produits identiques (pour les substances initiales ces effets thermiques sont admis positifs, pour les produits de la réaction, négatifs);

c) la différence des effets thermiques de deux réactions qui conduisent d'un même état initial à différents états finals est égale à l'effet thermique de la réaction de passage d'un état final à un autre. Par conséquent, l'effet thermique d'une réaction quelconque est la somme algébrique des effets thermiques obtenus lors de la formation de corps réagissants à partir de corps simples (pour les produits de la réaction ces effets thermiques sont admis positifs, pour les substances initiales, négatifs).

8° L'*équation de Kirchhoff* pour les effets thermiques isochore et isobare est:

$$\left(\frac{\partial E_V}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial U_1}{\partial T}\right)_V - \left(\frac{\partial U_2}{\partial T}\right)_V = C_{V1} - C_{V2} = -\Delta C_V,$$

$$\left(\frac{\partial E_p}{\partial T}\right)_p = \left(\frac{\partial H_1}{\partial T}\right)_p - \left(\frac{\partial H_2}{\partial T}\right)_p = C_{p1} - C_{p2} = -\Delta C_p.$$

5. Transformations thermodynamiques simples des gaz parfaits

1° On appelle *transformation polytropique* le processus thermodynamique pour lequel la chaleur spécifique c du gaz est constante. La grandeur $n = \frac{c - c_p}{c - c_V}$ est appelée *indice de polytropique*. La transformation adiabatique, par exemple, est un cas particulier de transformation polytropique.

2° Dans le tableau pp. 171-173 sont ramenées les données caractéristiques des transformations équilibrées isochore, isobare, isotherme, adiabatique et polytropique effectuées par un gaz parfait dont la masse est supposée constante, les capacités calorifiques C_V et C_p, indépendantes de la température, et le travail, accompli uniquement contre la pression extérieure.

Dans ce tableau les indices 1 et 2 correspondent aux états initial et final; dans toutes les formules les grandeurs sont exprimées en unités d'un même système.

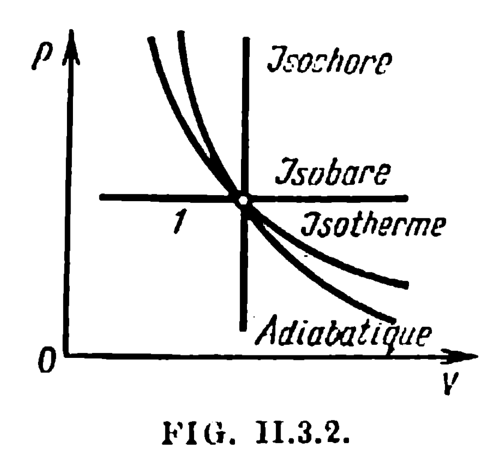


FIG. II.3.2.

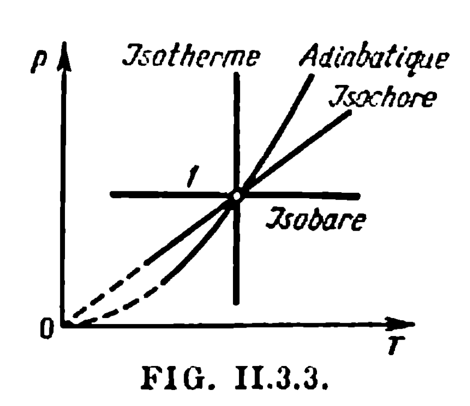


FIG. II.3.3.

3° On appelle *isochore*, *isobare*, *isotherme*, *adiabatique* et *polytropique* les lignes qui représentent dans un diagramme thermodynamique quelconque les transformations isochore, isobare, isotherme, adiabatique et polytropique respectivement. L'aspect de l'isochore, isobare, isotherme et adiabatique d'un gaz parfait est montré fig. II.3.2, II.3.3 et II.3.4, diagrammes $V-p$, $T-p$, $V-T$. L'état initial du gaz (1) est admis le même pour toutes les transformations. La courbe de la dépendance entre la capacité thermique C d'un gaz parfait et l'indice de polytropique n est représentée fig. II.3.5.

4° Quelques relations pour la transformation polytropique d'un gaz parfait:

$$\frac{\delta Q}{dV} = \frac{\varkappa - n}{\varkappa - 1} p, \qquad \frac{\delta Q}{dp} = \frac{n - \varkappa}{\varkappa - 1} V,$$

$$\frac{\delta A}{\delta Q} = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa - n}, \qquad \frac{dU}{\delta Q} = \frac{n - 1}{n - \varkappa}, \qquad \frac{dH}{\delta Q} = \frac{\varkappa(n - 1)}{n - \varkappa}.$$

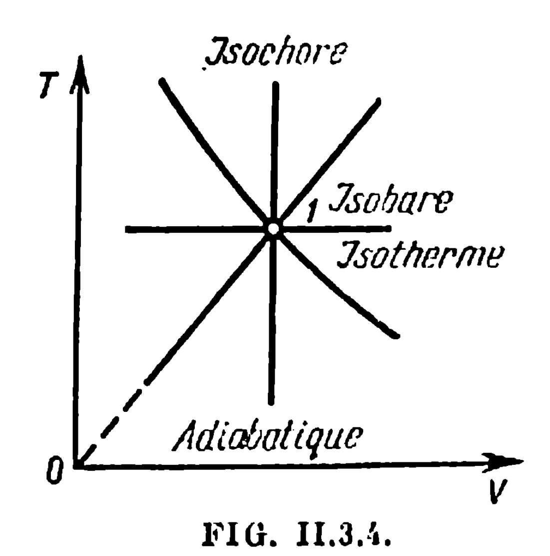


FIG. II.3.4.

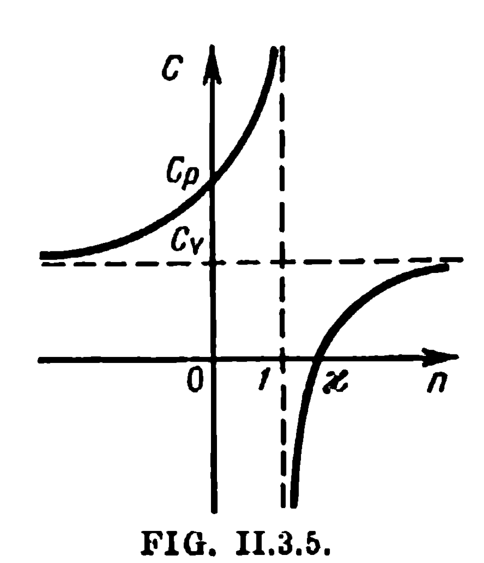


FIG. II.3.5.

Transformation	Equation de la transformation	Rapport entre les paramètres d'état	Quantité de travail	Quantité de chaleur
Isochore	$V = \text{const}$	$\frac{P}{T} = \text{const}$	$\delta A = 0$ $A = 0$	$\delta Q = C_V dt$ $Q = C_V(T_2 - T_1)$
Isobare	$p = \text{const}$	$\frac{V}{T} = \text{const}$	$\delta A = p\,dV$ $A = p(V_2 - V_1)$	$\delta Q = C_p\,dT$ $Q = C_p(T_2 - T_1)$
Isotherme	$T = \text{const}$	$pV = \text{const}$	$\delta A = p\,dV$ $A = \frac{M}{\mu} RT \ln\frac{V_2}{V_1} = \frac{M}{\mu} RT \ln\frac{p_1}{p_2}$	$\delta Q = \delta A$ $Q = A$

Transformation	Equation de la transformation	Rapport entre les paramètres d'état	Quantité de travail	Quantité de chaleur
Adiabatique	$\delta Q = 0$	$pV^{\varkappa} = \text{const}$ $pT^{\frac{\varkappa}{1-\varkappa}} = \text{const}$ $VT^{\frac{1}{\varkappa - 1}} = \text{const}$	$\delta A = p\,dV = -dU$ $A = -\Delta U = C_V(T_1 - T_2) = \frac{1}{\varkappa - 1}(p_1V_1 - p_2V_2)$ $A = \frac{M}{\mu}\frac{RT_1}{\varkappa - 1}\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}\right] = \frac{p_1V_1}{\varkappa - 1}\left[1 - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{1-\varkappa}\right]$	$\delta Q = 0$ $Q = 0$
Polytropique	$C = \text{const}$	$pV^{n} = \text{const}$ $pT^{\frac{n}{1-n}} = \text{const}$ $VT^{\frac{1}{n - 1}} = \text{const}$	$\delta A = pdV$ $A = \frac{1}{n - 1}(p_1V_1 - p_2V_2)$ $A = \frac{M}{\mu}\frac{RT_1}{n - 1}\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n - 1}{n}}\right] = \frac{p_1V_1}{n - 1}\left[1 - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{1-n}\right]$	$\delta Q = Cdt$ $Q = C(T_2 - T_1)$

Transformation	Variation de l'énergie interne	Variation de l'enthalpie	Capacité calorifique	Indice de polytropique
Isochore	$dU = C_V dT$ $\Delta U = C_V(T_2 - T_1)$	$dH = dU + Vdp = C_p dT$ $\Delta H = C_p(T_2 - T_1)$	$C_V = \frac{M}{\mu}\frac{R}{\varkappa - 1}$	$n = \pm\infty$
Isobare	$dU = C_V dT$ $\Delta U = C_V(T_2 - T_1)$	$dH = dU + pdV = \delta Q$ $\Delta H = \Delta U + A = Q$	$C_p = \frac{M}{\mu}\frac{\varkappa R}{\varkappa - 1}$	$n = 0$
Isotherme	$dU = 0$ $\Delta U = 0$	$dH = 0$ $\Delta H = 0$	$C_T = \begin{cases} +\infty \text{ quand } dV > 0 \\ -\infty \text{ quand } dV < 0 \end{cases}$	$n = 1$
Adiabatique	$dU = C_V dT = -\delta A$ $\Delta U = -A = C_V(T_2 - T_1)$	$dH = C_p dT = -\varkappa\delta A$ $\Delta H = -\varkappa A = C_p(T_2 - T_1)$	$C_{ad} = 0$	$n = \varkappa = \frac{C_p}{C_V}$
Polytropique	$dU = C_V dT$ $\Delta U = C_V(T_2 - T_1)$	$dH = C_p dT$ $\Delta H = C_p(T_2 - T_1)$	$C = \frac{M}{\mu}\frac{R(n - \varkappa)}{(\varkappa - 1)(n - 1)}$	$n = \frac{C - C_p}{C - C_V}$

CHAPITRE 4

Deuxième et troisième principes de la thermodynamique

1. Transformations réversibles et irréversibles

1° On appelle *transformation thermodynamique réversible* le processus permettant au système de revenir à son état initial sans produire de modifications quelconques dans le milieu ambiant.

La condition nécessaire et suffisante de la réversibilité d'un processus est qu'il soit équilibré.

2° On appelle *transformation thermodynamique irréversible* le processus ne permettant pas au système de revenir à son état initial sans produire de modifications quelconques dans le milieu ambiant.

Toutes les transformations réelles se déroulent à une vitesse finie. Elles s'accompagnent de frottement, de diffusion et d'échange de chaleur pour une différence finie des températures du système et du milieu extérieur. Par conséquent, elles sont toutes non équilibrées et irréversibles.

3° Chaque transformation irréversible se déroule spontanément dans un sens (direct), alors que sa réalisation dans le sens contraire, afin que le système revienne à son état initial, nécessite un processus compensateur dans les corps extérieurs, après quoi les états de ces corps se trouvent être différents de leurs états initiaux. Par exemple, le processus d'égalisation des températures de deux corps en contact a lieu spontanément. Cependant la réalisation du processus inverse consistant en l'accroissement de la différence des températures des corps jusqu'à la différence initiale exige des processus compensateurs dans les corps extérieurs, conditionnant, par exemple, le travail de la machine frigorifique.

4° A cause du non-équilibre des transformations irréversibles, il est impossible de les représenter sur les diagrammes thermodyna-

miques. En pratique, il est nécessaire d'ordinaire de connaître les caractéristiques intégrales du processus irréversible de passage du système de l'état d'équilibre 1 à l'état d'équilibre 2, c'est-à-dire le travail A_{irr} accompli par le système et la quantité de chaleur qui lui est fournie Q_{irr}. C'est pourquoi une transformation irréversible peut être remplacée par le processus réversible 1—2 «équivalent», qui fait passer le système de l'état 1 à l'état 2 de telle sorte que le travail $A = A_{irr}$ et la quantité de chaleur reçue par le système $Q = Q_{irr}$. Le processus réversible équivalent peut être représenté dans n'importe quel diagramme thermodynamique.

On réussit de la sorte à représenter graphiquement les transformations irréversibles. Cette «représentation» est conventionnelle, parce que dans la transformation irréversible réelle le système ne passe pas par les états auxquels correspondent les points intermédiaires de la courbe du processus réversible «équivalent».

2. Transformations fermées (cycles). Cycle de Carnot

1° On appelle *source chaude (transmetteur de chaleur)* le corps qui fournit au système thermodynamique considéré de l'énergie sous forme de chaleur.

On appelle *source froide (récepteur de chaleur)* le corps recevant du système thermodynamique considéré de l'énergie sous forme de chaleur.

2° Le *corps de travail* est un système thermodynamique effectuant une transformation fermée dans la machine thermique. Dans le moteur thermique, le corps de travail recevant de l'énergie sous forme de chaleur rend une partie de cette énergie sous forme de travail. Dans la machine frigorifique le corps de travail recevant de l'énergie sous forme de travail réalise la transmission d'énergie sous forme de chaleur du corps froid au corps chaud.

3° Les transformations fermées (p. 155) sont représentées dans les diagrammes thermodynamiques sous forme de courbes fermées. Le travail contre la pression extérieure effectué par le système dans une transformation fermée réversible est mesuré par l'aire limitée par la courbe de cette transformation dans le diagramme $V - p$.

On appelle *cycle direct* une transformation fermée au cours de laquelle le système accomplit un travail positif: $A = \oint pdV > 0$. Dans le diagramme $V-p$ le cycle direct est représenté par une courbe fermée que le corps de travail parcourt dans le sens des aiguilles d'une montre.

Le cycle est *inverse* si le système effectue un travail négatif: $A = \oint pdV < 0$. Dans le diagramme $V - p$ le cycle inverse est

représenté par une courbe fermée que le corps de travail parcourt dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

Dans un moteur thermique le corps de travail effectue un cycle direct, dans une installation frigorifique, un cycle inverse.

4° Le *rendement thermique* η_t est le rapport de l'équivalent calorifique A du travail, accompli par le corps de travail dans la transformation fermée directe considérée, à la somme de toutes les quantités de chaleur Q_1 fournies alors au corps de travail par la source chaude:

$$\eta_t = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1},$$

où Q_2 est la valeur absolue de la somme des quantités de chaleur restituées par le corps de travail à la source froide.

Le rendement thermique caractérise le degré d'efficacité avec lequel l'énergie interne se transforme en énergie mécanique dans le moteur thermique qui travaille suivant le cycle considéré.

5° On appelle *cycle de Carnot* une transformation fermée directe (fig. II.4.1) composée de deux isothermes 1—1′ et 2—2′ et de deux adiabatiques 1′—2 et 2′—1. Dans l'isotherme 1—1′ le corps de travail reçoit de la source chaude la quantité de chaleur Q_1 et dans l'isotherme 2—2′ le corps de travail rend à la source froide la quantité de chaleur Q_2.

Théorème de Carnot: le rendement thermique du cycle de Carnot réversible ne dépend pas de la nature du corps de travail et n'est fonction que des températures absolues de la source chaude (T_1) et de la source froide (T_2):

$$\eta_c = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

La démonstration du théorème de Carnot est fondée sur le deuxième principe de la thermodynamique.

6° De la confrontation des expressions pour le rendement thermique d'un cycle arbitraire (4°) et du cycle de Carnot réversible suit que dans le cycle de Carnot réversible le rapport des températures de la source chaude et de la source froide est égal au rapport des quantités de chaleur cédées et reçues respectivement par celles-ci au cours d'un cycle:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{Q_1}{Q_2}.$$

FIG. II.4.1.

Donc, pour comparer la température de deux corps, il faut réaliser le cycle de Carnot réversible, utilisant ces corps comme source chaude et source froide, et mesurer Q_1 et Q_2. L'échelle de température établie de la sorte est appelée ***échelle thermodynamique absolue de température.*** Son avantage consiste en ce que, conformément au théorème de Carnot, elle n'est liée aux propriétés d'aucun corps thermodynamique concret. Toutefois, le cycle de Carnot réversible n'étant pas réalisable, le mode indiqué de comparaison des températures n'est pratiquement pas possible et il n'a qu'une importance de principe.

7° Le rendement thermique $(\eta_t)_{\text{rév}}$ d'un cycle réversible arbitraire ne peut dépasser le rendement thermique du cycle de Carnot réversible, réalisé entre les températures $T_{\max}$ et $T_{\min}$:

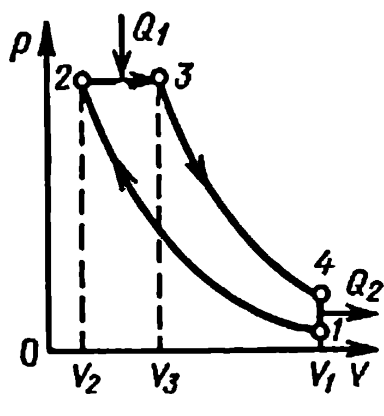
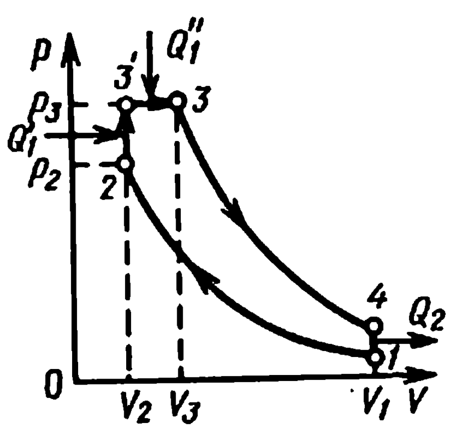
$$(\eta_t)_{\text{rév}} \leqslant \frac{T_{\max} - T_{\min}}{T_{\max}},$$

où $T_{\max}$ et $T_{\min}$ sont les valeurs extrémales de la température de la source chaude et de la source froide prenant part au cycle considéré.

8° Cycles théoriques des moteurs thermiques à piston.

Nom et schéma du cycle	Rendement thermique
1. Cycle à combustion quand V = const *(cycle d'Otto)* p, 3, Q_1, 2, 4, Q_2, 0, 1, V_2, V_1, V FIG. II.4.2. 1—2 — compression adiabatique, 2—3 — échauffement isochore, 3—4 — détente adiabatique, 4—1 — refroidissement isochore.	$\eta_t = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{\varkappa-1}}$, où $\varepsilon = \frac{V_1}{V_2}$ est le taux de compression, $\varkappa$ l'indice d'adiabatique de compression et de détente.

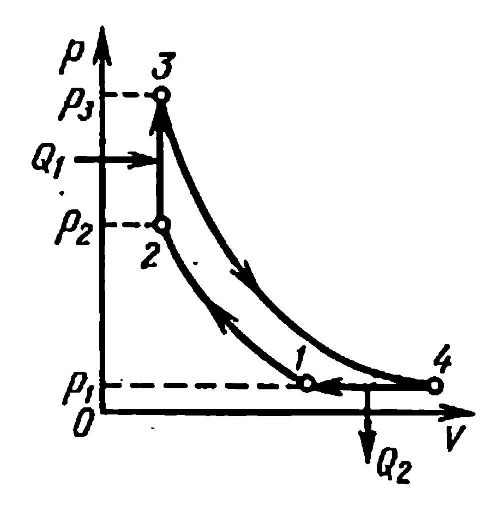
(suite)

Nom et schéma du cycle	Rendement thermique
2. Cycle à combustion quand p = const *(cycle de Diesel)*  FIG. II.4.3. 1—2 — compression adiabatique, 2—3 — échauffement isobare, 3—4 — détente adiabatique, 4—1 — refroidissement isochore.	$\eta_t = 1 - \frac{\rho^{\varkappa-1}}{\varkappa\varepsilon^{\varkappa-1}(\rho-1)}$, où $\varepsilon = \frac{V_1}{V_2}$ est le taux de compression, $\rho = \frac{V_3}{V_2}$ le taux de détente préalable, $\varkappa$ l'indice d'adiabatique de compression et de détente.
3. Cycle à combustion combiné quand V = const et p = const *(cycle de Trinckler-Sabathé)*  FIG. II.4.4. 1—2 — compression adiabatique, 2—3′— échauffement isochore, 3′—3— échauffement isobare, 3—4 — détente adiabatique, 4—1 — refroidissement isochore.	$\eta_t = 1 - \frac{\lambda\rho^{\varkappa}-1}{\varepsilon^{\varkappa-1}[(\lambda-1)+\varkappa\lambda(\rho-1)]}$, où $\varepsilon = \frac{V_1}{V_2}$ est le taux de compression, $\rho = \frac{V_3}{V_2}$ le taux de détente préalable, $\lambda = \frac{p_3}{p_2}$ le taux d'élévation de la pression, $\varkappa$ l'indice d'adiabatique de compression et de détente.

9° Cycles théoriques des turbines à gaz

Nom et schéma du cycle	Rendement thermique
1. Cycle à combustion quand p = const FIG. II.4.5. 1—2 — compression adiabatique, 2—3 — échauffement isobare, 3—4 — détente adiabatique, 4—1 — refroidissement isobare.	$\eta_t = 1 - \dfrac{1}{\beta^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}}$, où $\beta = \dfrac{p_2}{p_1}$ est le taux d'élévation de la pression lors de compression, $\varkappa$ l'indice d'adiabatique de compression et de détente.

(suite)

Nom et schéma du cycle	Rendement thermique
2. Cycle à combustion quand V = const  FIG. II.4.6. 1—2 — compression adiabatique, 2—3 — échauffement isochore, 3—4 — détente adiabatique, 4—1 — refroidissement isobare.	$\eta_t = 1 - \dfrac{\varkappa\left(\lambda^{\frac{1}{\varkappa}} - 1\right)}{(\lambda - 1)\,\beta^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}}$, où $\beta = \frac{p_2}{p_1}$ est le taux d'élévation de la pression lors de la compression, $\lambda = \frac{p_3}{p_2}$ le taux d'élévation complémentaire de la pression.

10° Le rendement thermique $(\eta_t)_{irr}$ d'un cycle irréversible arbitraire est toujours inférieur au rendement thermique d'un cycle de Carnot réversible réalisé entre les températures T_{max} et T_{min} indiquées p. 177:

$$(\eta_t)_{irr} < \frac{T_{max} - T_{min}}{T_{max}}.$$

11° L'effet utile de l'installation frigorifique est caractérisé par le *coefficient de performance* ε égal au rapport de la quantité de chaleur Q, enlevée au corps refroidi, à l'équivalent thermique A du travail dépensé

$$\varepsilon = \frac{Q}{A}.$$

Le coefficient de performance $\varepsilon_{rév}$ d'une installation frigorifique quelconque, fonctionnant suivant un cycle réversible, dépend uniquement des températures absolues du corps à refroidir T_0 et du récepteur de chaleur ($T > T_0$), c'est-à-dire qu'il est égal au coefficient de performance ε_C de l'installation, fonctionnant dans le même intervalle de températures, suivant le cycle de Carnot réversible inverse:

$$\varepsilon_{rév} = \varepsilon_C = \frac{T_0}{T - T_0}.$$

Pour l'installation frigorifique fonctionnant suivant un cycle non réversible

$$\varepsilon_{irr} < \frac{T_0}{T - T_0}.$$

3. Deuxième principe de la thermodynamique

1° Le premier principe de la thermodynamique traduisant la loi universelle de la conservation et de la transformation de l'énergie ne permet pas de déterminer le sens d'évolution des processus thermodynamiques. En se fondant sur ce principe, on aurait pu s'essayer à construire un *moteur en mouvement perpétuel de seconde espèce*, c'est-à-dire un moteur dont le corps de travail, accomplissant une transformation fermée, aurait reçu de l'énergie sous forme de chaleur d'un corps extérieur et l'aurait transmise entièrement sous forme de travail à un autre corps extérieur.

2° La généralisation des résultats d'un très grand nombre d'expériences nous a amené à conclure que la construction d'un moteur en mouvement perpétuel de seconde espèce est irréalisable. Cette

conclusion est appelée *deuxième principe de la thermodynamique* et a plusieurs formulations, différentes en forme mais équivalentes en principe, notamment[1]):

a) le processus dont l'unique résultat serait l'accomplissement d'un travail équivalent à la quantité de chaleur fournie par la source chaude est irréalisable;

b) le processus dont l'unique résultat serait la transmission d'énergie sous forme de chaleur d'un corps plus froid à un corps plus chaud n'est pas réalisable.

3° Le deuxième principe de la thermodynamique montre la différence fondamentale entre deux formes de transmission d'énergie: chaleur et travail. Il stipule que la transformation du mouvement ordonné d'un corps en mouvement chaotique des particules de ce corps et du milieu ambiant est irréversible. Le mouvement ordonné peut changer en mouvement chaotique sans processus compensateurs quelconques, lors du frottement par exemple, alors que le passage du mouvement chaotique au mouvement ordonné ou, comme on dit souvent, la «transformation de chaleur en travail», ne peut être l'unique résultat d'un processus thermodynamique quelconque, autrement dit, il s'accompagne toujours d'un certain processus compensateur. Lors de la détente isotherme équilibrée, par exemple, le gaz parfait accomplit un travail équivalent à la quantité de chaleur transmise au gaz par la source chaude. Notons cependant qu'alors la densité du gaz diminue, c'est-à-dire la «transformation de la chaleur en travail» n'est pas le seul résultat du processus considéré. Le moteur thermique fonctionnant suivant le cycle de Carnot direct effectue un travail équivalent seulement à une certaine fraction de chaleur reçue de la source chaude, tandis que la fraction restante est donnée à source froide dont l'état change par la suite. Dans la machine frigorifique l'énergie se transmet sous forme de chaleur d'un corps plus froid à un corps plus chaud, mais un processus compensateur d'accomplissement de travail par les corps extérieurs est indispensable pour la réalisation de cette transformation.

4. Entropie

1° Dans une transformation isotherme on appelle *quantité de chaleur réduite* Q^* le quotient de la quantité de chaleur Q reçue par le système par la température T du transmetteur de chaleur: $Q^* =$

---

[1]) Cf. également p. 187.

$= Q/T$, où $Q>0$ lors d'un apport d'énergie et $Q<0$ lors d'une évacuation d'énergie.

Pour un processus quelconque la quantité de chaleur réduite est égale à $Q^* = \int \frac{\delta Q}{T}$, où δQ est la quantité de chaleur fournie au système sur une portion élémentaire de la transformation par le transmetteur de chaleur dont la température est égale à T.

2° La quantité de chaleur réduite $Q_{\text{rév}}$ fournie au système dans une transformation fermée réversible est nulle *(égalité de Clausius)*:

$$Q^*_{\text{rév}} = \oint_{\text{rév}} \frac{\delta Q}{T} = 0,$$

où T est la température du système à laquelle lui est fournie la quantité élémentaire de chaleur δQ et l'expression sous le signe d'intégration $\delta Q/T$, à la différence de δQ, est une différentielle totale. Par conséquent, la température absolue du système représente un diviseur d'intégration pour une quantité élémentaire de chaleur fournie au système dans une transformation réversible.

3° L'*entropie* S est une fonction d'état du système dont la différentielle, dans une transformation réversible élémentaire, est égale au quotient d'une quantité infinitésimale de chaleur communiquée au système par la température absolue de ce dernier:

$$dS = \frac{\delta Q}{T}.$$

L'entropie d'un système complexe est la somme des entropies de toutes les parties homogènes de ce système.

Le changement de signe de l'entropie du système dans une transformation réversible indique le sens de l'échange de chaleur. L'énergie interne U de tous les systèmes thermodynamiques simples croît de façon illimitée quand $T \to \infty$, c'est pourquoi la température absolue, correspondant aux états d'équilibre, sera uniquement positive, de sorte que $dS > 0$ lors de l'échauffement du système et $dS < 0$ lors de son refroidissement.

Cependant, il existe des systèmes *(systèmes singuliers)* pour lesquels $\lim_{T\to\infty} U$ est égale à une certaine valeur finie U_0. De tels systèmes peuvent se trouver dans des états avec une *température absolue positive* ou bien avec une *température absolue négative* ($T > 0$ si $U < U_0$ et $T < 0$ si $U > U_0$). Tel est le système des spins nucléaires (p. 838) de certains cristaux (LiF par exemple), que l'on peut considérer isolé et équilibré au cours du temps τ beaucoup plus petit que le temps de relaxation τ_1 de l'interaction spin-réseau

(p. 794), le temps de relaxation τ_2 pour l'interaction spin-spin (p. 793) étant environ 10^7 fois plus petit que τ_1. La température $T = 0$ correspond à l'état où tous les spins sont orientés dans le sens du champ magnétique extérieur; la température $T = \infty$ (ou $T = -\infty$), à l'état d'une orientation tout à fait chaotique des spins; la température $T = -0$, à l'état où tous les spins sont dirigés dans le sens contraire au sens du champ magnétique extérieur, c'est-à-dire lorsque l'énergie du système des spins est maximale.

4° La variation d'entropie dans toute transformation réversible faisant passer le système de l'état 1 à l'état 2 est égale à la chaleur réduite, transmise à ce système durant ce processus:

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}.$$

On appelle *transformation isentropique* le processus thermodynamique dans lequel l'entropie du système ne varie pas. Par exemple, dans une transformation adiabatique réversible $\delta Q = 0$ et $S = \text{const}$.

5° L'entropie du corps ne peut être déterminée qu'à une constante additive près (constante d'intégration):

$$S = \int_{\text{rév}} \frac{\delta Q}{T} + \text{const}$$

ou

$$S = \int_0^T \frac{\delta Q}{T} + S_0,$$

où l'intégrale est prise le long d'un chemin réversible arbitraire et S_0 est la valeur de l'entropie du corps à $T = 0$°K, qui ne peut être déterminée à l'aide du premier et du deuxième principe de la thermodynamique.

6° L'entropie d'un système physiquement homogène est une fonction de deux paramètres d'état indépendants, par exemple de p et T ou de T et V (la masse du système est supposée invariable). C'est pourquoi

$$S(V, T) = \int_0^T C_V \frac{dT}{T} + S_0'$$

ou

$$S(p,\ T) = \int_0^T C_p \frac{dT}{T} + S_0'',$$

où les intégrales $\int_0^T C_V \frac{dT}{T}$ et $\int_0^T C_p \frac{dT}{T}$ sont calculées respectivement pour les transformations réversibles d'échauffement isochore et isobare du système de $T = 0$ °K jusqu'à T correspondant à l'état considéré; C_V et C_p sont les capacités calorifiques du système dans ces processus; $S_0' = S(V,\ 0)$ et $S_0'' = S(p,\ 0)$ du fait que conformément au principe de Nernst (p. 212) $S_0' = S_0'' = S_0$.

EXEMPLE 1. Entropie d'un gaz parfait. En vertu du premier principe de la thermodynamique (p. 166), quand $\delta A^* = 0$,

$$\delta Q = dU + p\ dV = dH - V\ dp,$$

où $dU = C_V\ dT$ et $dH = C_p\ dT$, de sorte que

$$dS = C_V \frac{dT}{T} + \frac{p}{T} dV = C_p \frac{dT}{T} - \frac{V}{T} dp.$$

Pour un gaz parfait (p. 157) $\frac{p}{T} = \frac{M}{\mu} \frac{R}{V}$ et $\frac{V}{T} = \frac{M}{\mu} \frac{R}{p}$, donc

$$dS = \frac{M}{\mu} \left(C_{V\mu} \frac{dT}{T} + R\ \frac{dV_\mu}{V_\mu} \right) = \frac{M}{\mu} \left(C_{p\mu} \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p} \right) =$$

$$= \frac{M}{\mu} \left(C_{p\mu} \frac{dV_\mu}{V_\mu} + C_{V\mu}\ \frac{dp}{p} \right),$$

où V_μ est le volume d'une mole de gaz, $C_{V\mu}$ et $C_{p\mu}$ ses chaleurs molaires (p. 165) dépendant uniquement de la température:

$$S = \frac{M}{\mu} \left[\int C_{V\mu} \frac{dT}{T} + R \ln V_\mu + a_1 \right],$$

$$S = \frac{M}{\mu} \left[C_{p\mu} \frac{dT}{T} - R \ln p + a_2 \right],$$

$$S = \frac{M}{\mu} \left[C_{p\mu} \ln\ V_\mu + C_{V\mu}\ \ln\ p + a_3 \right],$$

où a_1, a_2 et a_3 sont les constantes d'intégration.

Pour les gaz monoatomiques, $C_{V\mu}$ et $C_{p\mu}$ ne dépendent pas de la température (p. 243) et

$$S = \frac{M}{\mu}\left[C_{V\mu} \ln T + R \ln V_\mu + a_1\right],$$

$$S = \frac{M}{\mu}\left[C_{p\mu} \ln T - R \ln p + a_2\right].$$

EXEMPLE 2. L'entropie d'un mélange de N gaz parfaits est la somme des entropies de tous les constituants du mélange pris à la température du mélange et aux pressions partielles p_i (p. 159):

$$S = \sum_{i=1}^{N} S_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{M_i}{\mu_i}\left[\int C_{p\mu_i} \frac{dT}{T} - R \ln p_i + a_{2i}\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \frac{M_i}{\mu_i}\left[\int C_{p\mu_i} \frac{dT}{T} - R \ln p + a_{2i}\right] + \Delta S_m,$$

où p est la pression du mélange,

$$\Delta S_m = -R \sum_{i=1}^{N} \frac{M_i}{\mu_i} \ln x_i = -R\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{M_i}{\mu_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{N} x_i \ln x_i\right)$$

l'*entropie du mélange*, x_i la concentration molaire du i-ième constituant du mélange (p. 159). L'entropie du mélange de gaz parfaits hétérogènes ne dépend pas de leurs particularités individuelles; elle est déterminée uniquement par les concentrations molaires de ces gaz et le nombre total de moles de tous les gaz du mélange. Dans le mélange de gaz identiques ($x_i = 1$, $x_1 = x_2 = \ldots = x_{i-1} = x_{i+1} = \ldots = x_N = 0$) l'entropie du mélange est nulle *(paradoxe de Gibbs)*.

EXEMPLE 3. Entropie du gaz de Van der Waals (p. 256)

$$dU = C_V dT + \frac{M^2}{\mu^2}\frac{a}{V^2} dV; \text{ donc}$$

$$dS = C_V \frac{dT}{T} + \frac{1}{T}\left(p + \frac{M^2}{\mu^2}\frac{a}{V^2}\right) dV = \frac{M}{\mu}\left[C_{V\mu} \frac{dT}{T} + R \frac{dV_\mu}{V_\mu - b}\right]$$

et

$$S = \frac{M}{\mu}\left[\int C_{V\mu} \frac{dT}{T} + R \ln (V_\mu - b) + \text{const}\right],$$

où V_μ est le volume d'une mole de gaz et $C_{V\mu}$ sa chaleur molaire.

5. Relation fondamentale de la thermodynamique

1° Il découle du deuxième principe de la thermodynamique que dans une transformation irréversible la variation d'entropie du système $dS > \delta Q/T$, où δQ est la quantité de chaleur fournie au système par un corps extérieur dont la température[1]) est T.

Pour une transformation élémentaire arbitraire

$$dS \geqslant \frac{\delta Q}{T}, \qquad (*)$$

où le signe d'égalité concerne les transformations réversibles, le signe d'inégalité, les transformations irréversibles.

2° Pour un système thermiquement isolé (système adiabatique) $\delta Q = 0$ et l'expression $(*)$ est de la forme:

$$dS \geqslant 0.$$

Ce résultat représente l'expression mathématique du deuxième principe de la thermodynamique, stipulant que l'entropie du système isolé ne peut décroître, quels que soient les processus dont il est le siège.

Toutes transformations naturelles sont irréversibles, c'est pourquoi en réalité l'entropie du système isolé ne peut que croître, atteignant le maximum à l'état d'équilibre thermodynamique du système. L'interprétation de cette loi est liée à la signification physique de l'entropie, élucidée en physique statistique (p. 247).

3° Si le système est soumis à une transformation fermée, la variation de son entropie est nulle et la somme algébrique des quantités de chaleur réduites communiquées à ce système est égale à zéro dans une transformation réversible:

$$\oint_{\text{rév}} \frac{\delta Q}{T} = 0$$

et inférieure à zéro dans une transformation irréversible:

$$\oint_{\text{irr}} \frac{\delta Q}{T} < 0.$$

La dernière relation est appelée *inégalité de Clausius* et représente l'expression mathématique du deuxième principe de la thermodynamique pour les transformations irréversibles d'un système non isolé.

---

[1]) On suppose que la température absolue $T > 0$. Pour les systèmes à une température absolue négative (p. 183) $dS < \delta Q/T$.

4° La *relation fondamentale de la thermodynamique* englobant le premier et le deuxième principe de la thermodynamique est obtenue de l'expression (*) en substituant à δQ sa valeur tirée du premier principe de la thermodynamique:

$$TdS \geqslant dU + \delta A.$$

Pour les transformations réversibles cette relation change en *identité thermodynamique:*

$$TdS = dU + \delta A.$$

6. Fonctions caractéristiques et potentiels thermodynamiques

1° La *fonction caractéristique* est une fonction d'état du système à l'aide de laquelle, ou de ses dérivées, on peut exprimer sous une forme explicite les propriétés thermodynamiques du système. La forme de la fonction dépend du choix des variables indépendantes. Par exemple, dans le cas des variables indépendantes H (enthalpie) et p (pression) ou U (énergie interne) et V (volume), l'entropie S est une fonction caractéristique, alors que pour les variables indépendantes S et V, c'est l'énergie interne U qui joue le rôle de cette fonction (cf. 30).

2° On appelle *potentiel thermodynamique* une fonction caractéristique dont la décroissance dans une transformation équilibrée (réversible) évoluant sans changement d'un couple défini de paramètres thermodynamiques (T et V, T et p, S et p, S et V, etc.), est égale à A^*, qui est le travail total effectué par le système avec déduction du travail contre la pression extérieure.

3° L'existence des potentiels thermodynamiques découle de l'identité thermodynamique en vertu de laquelle le travail élémentaire $\delta A^* = \delta A - p\,dV$ (p. 167) peut être déterminé à l'aide des formules suivantes:

$$\delta A^* = T\ dS - dU - p\ dV,$$
$$\delta A^* = T\ dS - dH + V\ dp.$$
$$\delta A^* = -\ d(U - TS) - S\ dT - p\ dV,$$
$$\delta A^* = -\ d(H - TS) - S\ dT + V\ dp.$$

a) S et V sont des variables indépendantes. L'énergie interne U (*potentiel isochore-isentropique)* est fonction caractéristique et potentiel thermodynamique.

b) S et p sont des variables indépendantes. L'enthalpie H *(potentiel isobare-isentropique)* est fonction caractéristique et potentiel thermodynamique.

c) T et V sont des variables indépendantes. La fonction d'état du système $F = U - TS$ appelée *potentiel isochore-isotherme (potentiel isochore, énergie libre)* est fonction caractéristique et potentiel thermodynamique.

d) T et p sont des variables indépendantes. La fonction d'état du système $\Phi = H - TS = U + pV - TS$ appelée *potentiel isobare-isotherme (potentiel isobare, enthalpie libre, fonction de Gibbs)* est fonction caractéristique et potentiel thermodynamique.

4° Les potentiels isochore-isotherme et isobare-isotherme d'un gaz parfait sont:

$$F = -\frac{M}{\mu}[RT \ln V_\mu + \varphi(T)] = -n\left[RT \ln \frac{V}{n} + \varphi(T)\right],$$

$$\Phi = n[RT \ln p + f(T)],$$

où $n = M/\mu$ est le nombre de moles de gaz, V_μ le volume d'une mole,

$$\varphi(t) = -U_\mu + T\left(a_1 + \int C_{V\mu}\frac{dT}{T}\right)$$

et

$$f(t) = H_\mu - T\left(a_2 + \int C_{p\mu}\frac{dT}{T}\right)$$

les fonctions de la température, U_μ et H_μ l'énergie interne et l'enthalpie d'une mole de gaz, $C_{V\mu}$ et $C_{p\mu}$ les chaleurs molaires, a_1 et a_2 les constantes d'intégration dans l'expression de l'entropie (p. 186).

5° Pour un mélange de gaz parfaits le potentiel isochore-isotherme est la somme des potentiels isochore-isotherme de tous les N constituants du mélange, pris avec le volume V à la température T du mélange:

$$F = \sum_{i=1}^{N} F_i = -\sum_{i=1}^{N} n_i\left[RT \ln \frac{V}{n_i} + \varphi_i(T)\right].$$

Le potentiel isobare-isotherme du mélange est la somme des potentiels isobare-isotherme de tous les N constituants du mélange pris à la température du mélange et sous leurs pressions partielles (p. 159):

$$\Phi = \sum_{i=1}^{N} \Phi_i = \sum_{i=1}^{N} n_i[RT \ln p_i + f_i(T)],$$

ou bien

$$\Phi = \sum_{i=1}^{N} n_i [RT \ln p + RT \ln x_i + f_i(T)],$$

où $x_i = n_i \Big/ \sum_{i=1}^{N} n_i$ est la concentration molaire du i-ième constituant et p_i sa pression partielle.

6° Le travail élémentaire est:

$$\delta A^* = \sum_i F_i \, da_i,$$

où a_i sont tous les paramètres extérieurs du système, excepté son volume V, et F_i les forces généralisées correspondantes (p. 96). C'est pourquoi les équations 30 (p. 188) peuvent s'écrire sous la forme:

$$dU = T \, dS - p \, dV - \sum_i F_i \, da_i,$$

$$dH = T \, ds + V \, dp - \sum_i F_i \, da_i,$$

$$dF = -S \, dT - p \, dV - \sum_i F_i \, da_i,$$

$$d\Phi = -S \, dT + V \, dp - \sum_i F_i \, da_i.$$

dU, dH, dF et $d\Phi$ étant les différentielles totales des fonctions des variables indépendantes S, V, a_1, a_2, ... ; S, p, a_1, a_2, ...; T, V, a_1, a_2, ... et T, p, a_1, a_2,...[1]) respectivement, on a:

$$T = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_{V,\, a_1,\, a_2,\, \ldots} = \left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)_{p,\, a_1,\, a_2,\, \ldots},$$

$$p = -\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_{S,\, a_1,\, a_2,\, \ldots} = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{T,\, a_1,\, a_2,\, \ldots},$$

$$V = \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_{S,\, a_1,\, a_2,\, \ldots} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right)_{T,\, a_1,\, a_2,\, \ldots},$$

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{V,\, a_1,\, a_2,\, \ldots} = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial T}\right)_{p,\, a_1,\, a_2,\, \ldots}.$$

---

[1]) Les indices inférieurs des dérivées partielles spécifient les paramètres invariables du système lors de la détermination de ces dérivées. On utilisera par la suite, comme ceci est habituellement admis, l'écriture abrégée sans indices a_1, a_2, ..., par exemple $T = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V$ au lieu de $T = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_{V,\, a_1,\, a_2, \ldots}$.

De plus, du premier principe de la thermodynamique et des expressions données ci-dessus pour dU et dH il suit:

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{V,\, a_1,\, a_2,\, \dots} = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{V,\, a_1,\, a_2,\, \dots},$$

$$C_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_{p,\, a_1,\, a_2,\, \dots} = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{p,\, a_1,\, a_2,\, \dots}.$$

7° Le lien existant entre les potentiels thermodynamiques et leurs dérivées est:

$$U = H - pV = H + V\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S,$$

$$H = U + pV = U + p\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_S,$$

$$F = U - TS = U + T\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V,$$

$$\Phi = H - TS = H + T\left(\frac{\partial \Phi}{\partial T}\right)_p.$$

Les deux dernières équations sont appelées *équations de Gibbs-Helmholtz*. Ces équations peuvent être représentées également sous la forme de:

a) transformation isochore-isotherme

$$A^* = E_V + T\left(\frac{\partial A^*}{\partial T}\right)_V,$$

où A^* est le travail effectué par le système dans le processus considéré, E_V l'effet thermique lors d'une transformation isochore (p. 168);

b) transformation isobare-isotherme

$$A^* = E_p + T\left(\frac{\partial A^*}{\partial T}\right)_p,$$

où A^* est la différence entre le travail total accompli par le système dans le processus considéré et le travail de détente, E_p l'effet thermique dans une transformation isobare (p. 168).

EXEMPLE. Lien entre la force électromotrice d'une pile réversible[1]) et l'effet thermique de la réaction chimique se déroulant dans cette pile. Le travail A^* est dépensé sur le transfert des charges électriques. $A^* = q\mathcal{E}$, où q est la charge transférée, $\mathcal{E}$ la f.é.m. de

---

[1]) Elément dans lequel le passage de courant en sens inverse s'accompagne de réactions chimiques inverses, et les pertes d'énergie sur le dégagement de chaleur Joule-Lenz font défaut.

la pile. De l'équation de Gibbs-Helmholtz pour une transformation isobare-isotherme découle l'*équation de Helmholtz pour une pile galvanique:*

$$\mathcal{E} = e_p + T\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial T}\right)_p = \frac{e_{p\mu}}{zF} + T\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial T}\right)_p,$$

où $e_p = E_p/q$ est l'effet thermique par unité de charge transférée, $e_{p\mu}$ l'effet thermique rapporté à une mole de substance réagissante, F le nombre de Faraday (p. 404), z la valence de l'ion transférant la charge.

La quantité de chaleur Q, fournie de l'extérieur à la pile lors du transfert de charge q, est:

$$Q = -E_p + q\mathcal{E} = qT\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial T}\right)_p.$$

L'élément isolé thermiquement se refroidit au cours du travail si $\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial T}\right)_p > 0$, et se réchauffe si $\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial T}\right)_p < 0$.

7. Equations différentielles fondamentales de la thermodynamique (pour un système équilibré monophasé à un constituant[1]), en l'absence de forces à part la pression extérieure uniforme)

1° L'état du système considéré est entièrement déterminé par la donnée de deux paramètres d'état indépendants (la masse du système est supposée fixe).

Le travail élémentaire $\delta A^* = 0$, et l'identité thermodynamique (p. 188) est de la forme:

$$dU = T\,dS - p\,dV,$$

$$dH = T\,dS + V\,dp,$$

$$dF = -S\,dT - p\,dV,$$

$$d\Phi = -S\,dT + V\,dp.$$

[1]) Les équations données dans ce paragraphe sont valables également pour un système physiquement homogène à plusieurs constituants, de composition stable.

2° Quelques relations entre les dérivées des grandeurs thermodynamiques.

a) T et V sont des variables indépendantes:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p, \quad \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = C_V,$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V + V\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T, \quad \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_V = C_V + V\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V,$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \frac{1}{T}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right], \quad \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = \frac{C_V}{T},$$

$$\left(\frac{\partial C_V}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right)_V, \quad C_p - C_V = -T\frac{\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V^2}{\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T},$$

$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\frac{T}{C_V}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$ est l'équation différentielle d'une adiabatique,

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_U = \frac{p - T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V}{C_V}, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_H = -\frac{T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V + V\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T}{C_V + V\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V}.$$

EXEMPLE 1. Gaz parfait. L'équation d'état est: $pV = \frac{M}{\mu} RT$.

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \frac{M}{\mu}\frac{R}{V}, \quad \left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right)_V = 0, \quad \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T = -\frac{M}{\mu}\frac{RT}{V^2}.$$

Par conséquent,

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = 0, \quad \left(\frac{\partial H}{\partial V}\right)_T = 0, \quad \left(\frac{\partial C_V}{\partial V}\right)_T = 0 \text{ et } C_p - C_V = \frac{M}{\mu}R,$$

ce qui signifie que l'énergie interne, l'enthalpie et les capacités calorifiques C_p et C_V de tout gaz parfait, dont la masse est constante, dépendent uniquement de la température.

EXEMPLE 2. Gaz de Van der Waals. L'équation d'état est: $\left(p + \frac{M^2}{\mu^2}\frac{a}{V^2}\right)\left(V - \frac{M}{\mu}b\right) = \frac{M}{\mu}RT$.

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \frac{\frac{M}{\mu}R}{V - \frac{M}{\mu}b}, \quad \left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right)_V = 0,$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T = -\frac{\frac{M}{\mu}RT}{\left(V - \frac{M}{\mu}b\right)^2} + 2\frac{M^2}{\mu^2}\frac{a}{V^3}.$$

On a donc $\left(\frac{\partial C_V}{\partial V}\right)_T = 0$, ce qui signifie que la capacité calorifique C_V de tout gaz de Van der Waals, dont la masse est constante, dépend uniquement de la température:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = \frac{M^2}{\mu^2}\frac{a}{V^2} \text{ et } C_p - C_V = \frac{\frac{M}{\mu}R}{1 + \frac{M}{\mu}\frac{2a\left(V - \frac{M}{\mu}b\right)^2}{RTV^3}}.$$

b) p et T sont des variables indépendantes:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_T = -T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p - p\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T, \quad \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_p = C_p - p\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p,$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T = -T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p + V, \quad \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p = C_p,$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p = \frac{C_p}{T},$$

$$\left(\frac{\partial C_p}{\partial p}\right)_T = -T\left(\frac{\partial^2 V}{\partial T^2}\right)_p, \quad C_p - C_V = -T\frac{\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p^2}{\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T},$$

$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S = \frac{T}{C_p}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$ est l'équation différentielle

d'une adiabatique,

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_U = \frac{T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p + p\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T}{C_p - p\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p},$$

$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H = \frac{T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p - V}{C_p}$ est le *coefficient de Joule-Thomson.*

EXEMPLE 3. Gaz parfait. L'équation d'état est:
$pV = \frac{M}{\mu} RT$. $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{MR}{\mu p}$, on a donc: $\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H = 0$.

c) p et V sont des variables indépendantes:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_V = C_V\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V, \quad \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_p = C_p\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p - p,$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_V = C_V\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V + V, \quad \left(\frac{\partial H}{\partial V}\right)_p = C_p\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p,$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_V = \frac{C_V}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_p = \frac{C_p}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p,$$

$$C_p - C_V = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p,$$

$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_S = -\frac{C_p\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p}{C_V\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V}$ est l'équation différentielle

d'une adiabatique,

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_U = \frac{p - C_p\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p}{C_V\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V}, \quad \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_H = -\frac{C_p\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p}{C_V\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V + V}.$$

3° On appelle *coefficient de dilatabilité thermodynamique* la grandeur α_t caractérisant la variation relative du volume d'un système lors de l'élévation isobare de sa température d'un degré:

$$\alpha_t = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)_p,$$

où V est le volume du système, T et t sa température en °K et en °C.

On appelle *coefficient de dilatation thermique* la grandeur

$$\alpha = \frac{1}{V_0}\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)_p,$$

où V_0 est le volume du système à 0 °C.

On appelle *coefficient de compressibilité thermodynamique (compressibilité isotherme)* la grandeur β caractérisant la variation relative du volume d'un système lors de la baisse isotherme de sa pression d'une unité:

$$\beta = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T.$$

On appelle *compressibilité adiabatique* la grandeur β_S caractérisant la variation relative du volume d'un système lors de la décroissance adiabatique de sa pression d'une unité:

$$\beta_S = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S, \quad \beta_S = \frac{C_V}{C_p}\beta,$$

où C_V et C_p sont les capacités calorifiques du système dans les transformations isochore et isobare.

On appelle *coefficient de pression thermodynamique* la grandeur γ_t caractérisant la variation relative de la pression d'un système lors de l'élévation isochore de sa température d'un degré:

$$\gamma_t = \frac{1}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \frac{1}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_V, \quad \gamma_t = \frac{1}{p}\frac{\alpha_t}{\beta}.$$

On appelle *coefficient de pression thermique* la grandeur

$$\gamma = \frac{1}{p_0}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V,$$

où p_0 est la pression à 0 °C.

8. Diagramme s — T

1° Le diagramme $s - T$ est la représentation graphique des états d'équilibre thermodynamique d'un système en coordonnées rectangulaires, on porte en abscisses l'*entropie spécifique* s (l'entropie de l'unité de masse) et en ordonnées la température absolue T. La grandeur s est comptée à partir de sa valeur dans un état déterminé quelconque.

2° Pour un système homogène, les isobares et les isochores sur le diagramme $s - T$ ont la forme de courbes ascendantes, puisque

$$\left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_p = \frac{T}{c_p} > 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_V = \frac{T}{c_V} > 0,$$

où c_p et c_V sont les chaleurs spécifiques. Plus grande est la pression p, plus haut est disposée sur le diagramme $s - T$ l'isobare correspondante. Plus grand est le volume spécifique v, plus bas est disposée sur ce diagramme l'isochore correspondante.

3° Le diagramme $s - T$ est largement utilisé pour l'analyse thermodynamique des transformations fermées réversibles.

Dans une transformation réversible $\delta Q = T\,ds = MT\,ds$, où M est la masse du système. C'est pourquoi dans le diagramme $s - T$ l'aire limitée par la courbe du processus $1-2$ (fig. II.4.7), l'axe d'abscisses $s = s_1$ et l'axe d'ordonnées $s = s_2$ est proportionnelle à la quantité de chaleur Q qui a été fournie au système au cours de ce processus:

$$Q = M \int_1^2 T\,ds.$$

Dans le diagramme $s - T$ une transformation fermée réversible se représente sous forme de courbe fermée. Dans la transformation fermée directe $1a2b1$ (fig. II.4.8) sur la portion $1a2$ est fournie au système la quantité de chaleur Q_1, et sur la portion $2b1$ est évacuée du système la quantité de chaleur dont la valeur absolue est égale à Q_2. Les grandeurs Q_1 et Q_2 sont proportionnelles aux aires des trapèzes curvilignes $s_1 1a2s_2$ (hachurée verticalement) et $s_1 1b2s_2$ (hachurée horizontalement). L'aire de la transformation $1a2b1$ est proportionnelle à $Q_1 - Q_2$, c'est-à-dire au travail A effectué par le système dans une transformation fermée. Le rendement thermique η_t

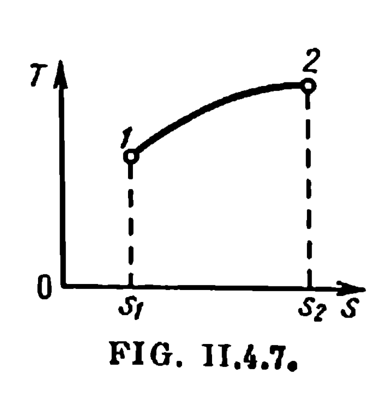


FIG. II.4.7.

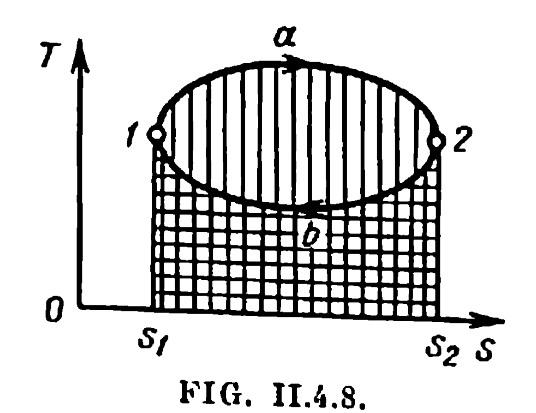


FIG. II.4.8.

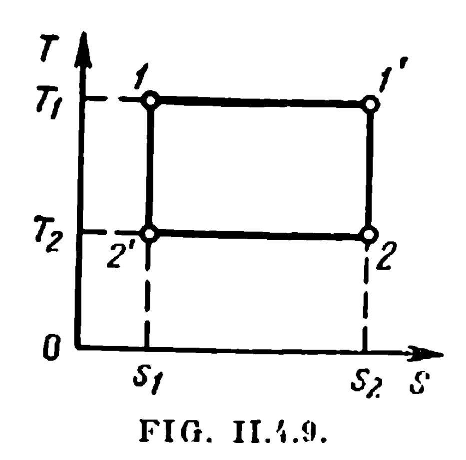


FIG. II.4.9.

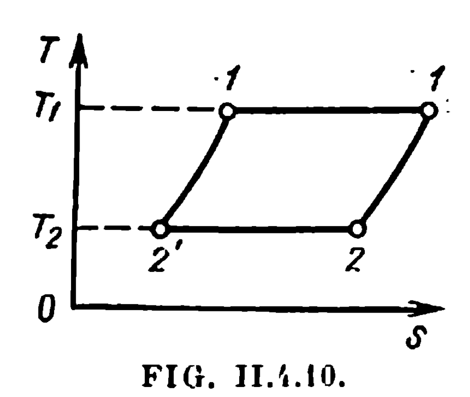


FIG. II.4.10.

de la transformation fermée est égal au rapport de l'aire du cycle à l'aire du trapèze curviligne $s_1 1a2s_2$.

Le cycle de Carnot réversible constitué de deux isothermes et de deux isentropes est représenté dans le diagramme $s - T$ sous forme d'un rectangle dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées (fig. II.4.9).

On appelle *cycle de Carnot généralisé* la transformation fermée réversible, constituée de deux isothermes et de deux processus fermant le cycle, qui sont représentés dans le diagramme $s - T$ par des courbes équidistantes, c'est-à-dire par des courbes coïncidant l'une avec l'autre lors de la translation le long de l'axe d'abscisses (fig. II.4.10). Le rendement thermique du cycle de Carnot généralisé est:

$$\eta_t = 1 - \frac{T_2}{T_1}.$$

4° On utilise le diagramme $s - T$ également pour l'analyse de quelques transformations irréversibles, notamment des processus dont l'irréversibilité est conditionnée par celle de la compression adiabatique et de la détente adiabatique du corps de travail.

EXEMPLE 1. Transformation fermée 1—2—3—4 (fig. II.4.11) constituée de processus réversibles de détente isotherme (1 — 2) et de compression isotherme (3 — 4), de compression adiabatique réversible (4 — 1) et de détente adiabatique irréversible représentée conventionnellement en pointillé (2 — 3).

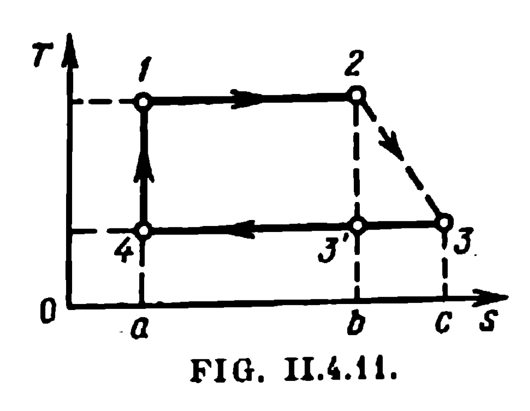


FIG. II.4.11.

La quantité de chaleur Q_1 communiquée au corps de travail par la

source chaude dans le processus $1-2$ est proportionnelle à l'aire du rectangle $a12b$, et la valeur absolue de la quantité de chaleur Q_2 cédée par le corps de travail à la source froide dans le processus $3-4$, proportionnelle à l'aire du rectangle $a43c$. Le travail $A_{irr} = Q_1 - Q_2$ accompli dans le cycle irréversible $1-2-3-4-1$ est donc moindre que le travail $A_{rév}$ dans le cycle de Carnot réversible correspondant $1-2-3'-4-1$, qui est proportionnel à l'aire de ce dernier. La différence $A_{rév} - A_{irr}$ est proportionnelle à l'aire du rectangle $b3'3c$.

EXEMPLE 2. Processus de compression adiabatique d'un gaz parfait, son irréversibilité est conditionnée par le frottement interne.

Le processus de compression adiabatique réversible d'un gaz du volume spécifique v_1 au volume spécifique v_2 est représenté dans le diagramme $s - T$ (fig. II.4.12) par l'isentrope $1-2'$. Le travail $A'_{rév}$ effectué par les forces extérieures est égal, en vertu du premier principe de la thermodynamique, à l'accroissement de l'énergie interne du gaz:

$$A'_{rév} = M \int_{T_1}^{T_{2'}} c_V \, dT = M \int_{b}^{2'} T \, ds,$$

où M est la masse du gaz, c_V sa chaleur spécifique dans une transformation isochore. Le travail $A'_{rév}$ est proportionnel à l'aire du trapèze curviligne $ab2'e$.

Par suite du frottement l'état du gaz à la fin de sa compression adiabatique irréversible correspond au point 2, et le processus de compression lui-même est représenté conventionnellement par la ligne en pointillé $1-2$ menée de telle manière que l'aire du trapèze curviligne $c12d$ soit proportionnelle à la quantité de chaleur de frottement Q_{fr} ou au travail de frottement A'_{fr}, qui lui est équivalent.

Le travail des forces extérieures A'_{irr} dans le processus $1-2$ est:

$$A'_{irr} = M \int_{T_1}^{T_2} c_V \, dT = M \int_{b}^{2} T \, ds,$$

autrement dit, il est proportionnel à l'aire du trapèze curviligne

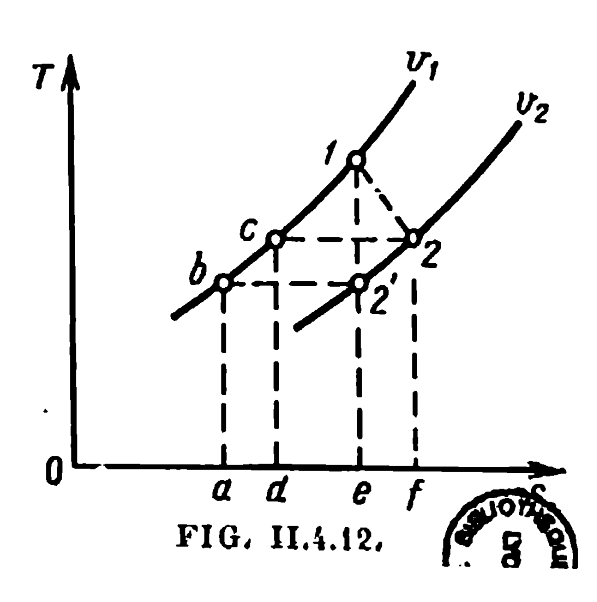


FIG. II.4.12.

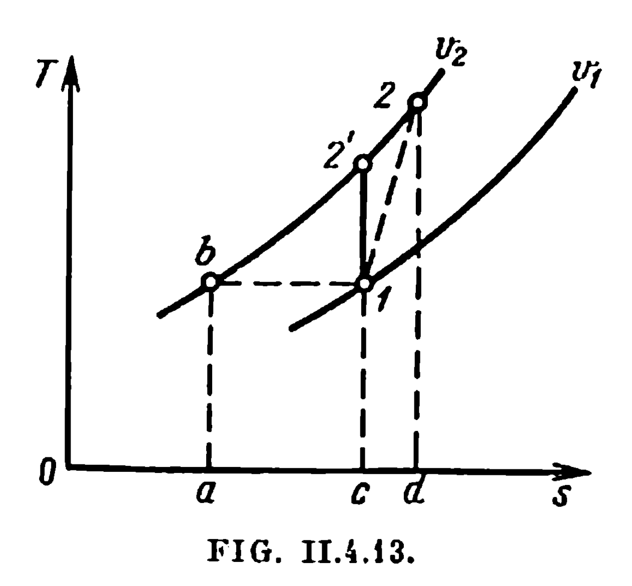


FIG. II.4.13.

ab2d. Le travail A'_{irr} est supérieur à la somme $A'_{rév} + A'_{fr}$ d'une quantité de travail mesurée par l'aire du triangle curviligne 12'2 et conditionnée par l'échauffement complémentaire du gaz par frottement.

EXEMPLE 3. Processus de détente adiabatique d'un gaz parfait, son irréversibilité est conditionnée par le frottement interne.

Le travail $A_{rév}$ effectué par le gaz dans le processus de détente adiabatique réversible 1—2′ (fig. II.4.13) est égal à la décroissance de l'énergie interne du gaz : $A_{rév} = M \int_b^1 T\, ds$, c'est-à-dire qu'il est proportionnel à l'aire du trapèze curviligne *ab1e*. Le travail de frottement A_{fr} est proportionnel à l'aire du trapèze curviligne *e12f*. Le travail A_{irr} effectué par le gaz dans le processus irréversible 1—2 est égal à $A_{irr} = M \int_c^1 T\, ds$, autrement dit, il est proportionnel à l'aire du trapèze curviligne *dc1e*. La différence $A_{rév} - A_{irr}$ est inférieure à A_{fr} d'une quantité de travail mesurée par l'aire du triangle curviligne 122′ (les aires des trapèzes curvilignes *abcd* et *e2′2f* sont identiques, c_V ne dépendant pas de v pour un gaz parfait) et correspondant à la transformation d'une partie de la chaleur de frottement en travail utile.

9. Systèmes à plusieurs constituants et polyphasés. Conditions d'équilibre thermodynamique

1° Toute grandeur extensive (p. 155) d'un système homogène constitué de plusieurs constituants dépend essentiellement de la composition de ce système. Ainsi les potentiels thermodynamiques

sont fonction du nombre de moles de chaque constituant dans le système:

$$U = U(S,\ V,\ n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_N),\quad H = H\,(S,\ p,\ n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_N),$$
$$F = F(T,\ V,\ n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_N),\quad \Phi = \Phi\,(T,\ p,\ n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_N),$$

où n_i est le nombre de moles du i-ième constituant, N le nombre total de constituants.

2° On appelle *grandeur molaire partielle* $\bar{G}_i$ d'un système homogène à N constituants la dérivée partielle de la grandeur extensive $G(p,\ T,\ n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_N)$ par rapport au nombre n_i de moles du i-ième constituant pour des valeurs constantes de la pression, de la température et du nombre de moles des autres constituants:

$$\bar{G}_i = \left(\frac{\partial G}{\partial n_i}\right)_{p,\ T,\ n_1,\ \ldots,\ n_{i-1},\ n_{i+1},\ \ldots,\ n_N}.$$

Les *relations de Gibbs-Duhem* sont:

$$G = \sum_{i=1}^{N} n_i\bar{G}_i \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{N} n_i d\bar{G}_i = 0$$

(quand $p = \text{const}$ et $T = \text{const}$)

ou pour une mole de système:

$$G_\mu = \sum_{i=1}^{N} x_i\bar{G}_i \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{N} x_i d\bar{G}_i = 0$$

(quand $p = \text{const}$ et $T = \text{const}$),

où $x_i = n_i \Big/ \sum_{i=1}^{N} n_i$ est la concentration molaire du i-ième constituant et $G_\mu = G \Big/ \sum_{i=1}^{N} n_i$.

Pour les grandeurs molaires partielles ont lieu les relations suivantes:

$$\bar{G}_i = G_\mu + \frac{\partial G_\mu}{\partial x_i} - \sum_{k=1}^{N-1} x_k \frac{\partial G_\mu}{\partial x_k} \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N-1),$$

$$\bar{G}_N = G_\mu - \sum_{k=1}^{N-1} x_k \frac{\partial G_\mu}{\partial x_k}.$$

3° On appelle *potentiel chimique* μ_i du i-ième constituant d'un système homogène (ou d'une phase d'un système hétérogène) la dérivée partielle de n'importe quel potentiel du système (de la phase) par rapport au nombre de moles n_i de ce constituant pour des valeurs constantes du nombre de moles des autres composants et des paramètres d'état correspondant au potentiel thermodynamique (p. 188):

$$\mu_i = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n_i}\right)_{p,T,n_k} = \left(\frac{\partial F}{\partial n_i}\right)_{V,T,n_k} = \left(\frac{\partial H}{\partial n_i}\right)_{S,p,n_k} = \left(\frac{\partial U}{\partial n_i}\right)_{S,V,n_k},$$

où $k = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, N$.

REMARQUE 1. En physique statistique, on caractérise la quantité du i-ième constituant du système non par le nombre de moles n_i mais par le nombre de particules $N_i = n_i N_A$, où N_A est le nombre d'Avogadro. On appelle *potentiel chimique* du i-ième constituant du système la grandeur μ qui est N_A fois plus petite que la grandeur décrite ci-dessus:

$$\mu_i = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial N_i}\right)_{p,T,N_k} = \left(\frac{\partial F}{\partial N_i}\right)_{V,T,N_k} = \left(\frac{\partial H}{\partial N_i}\right)_{S,p,N_k} = \left(\frac{\partial U}{\partial N_i}\right)_{S,V,N_k},$$

où $k = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, N$. Cette grandeur μ_i est appelée parfois *potentiel chimique rapporté à une particule*.

En pratique, on utilise le plus souvent la pression et la température comme paramètres indépendants, aussi la première expression pour μ_i est-elle la plus usuelle. Il suit de cette expression que le potentiel chimique est la valeur molaire partielle du potentiel isobare-isotherme. En vertu de la première équation de Gibbs-Duhem (cf. 2°) $\Phi = \sum_{i=1}^{N} n_i \mu_i$.

REMARQUE 2. En physique statistique, $\Phi = \sum_{i=1}^{N} N_i \mu_i$ de sorte que pour un système constitué de particules identiques, le potentiel chimique est le quotient du potentiel isobare-isotherme du système par le nombre de particules contenu dans ce système.

Le potentiel chimique est une grandeur intensive (p. 156), c'est-à-dire qu'il dépend des paramètres d'état et de la composition du système homogène mais non de sa masse.

EXEMPLE. Potentiel chimique d'un constituant d'un mélange de gaz parfaits

$$\mu_i = \left(\frac{\partial F}{\partial n_i}\right)_{V,\,T,\,n_1,\,n_2,\,\ldots,\,n_{i-1},\,n_{i+1},\,\ldots\,n_N} = RT \ln \frac{n_i}{V} + RT - \varphi_i(T),$$

$$\mu_i = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n_i}\right)_{p,\,T,\,n_1,\,n_2,\,\ldots,\,n_{i-1},\,n_{i+1},\,\ldots,\,n_N} = RT \ln x_i + RT \ln p + f_i(T),$$

où x_i et n_iV sont les concentrations molaire et molaire-volumique du i-ième constituant du mélange, $\varphi_i(T)$ et $f_i(T)$ ont le même sens que celui pp. 188-189.

4° Pour les transformations réversibles effectuées par un système homogène à N constituants, la composition et la masse duquel peuvent varier et sur lequel n'agissent d'autres forces que la pression extérieure uniforme, sont vraies les relations suivantes:

$$dU = T\,dS - p\,dV + \sum_{i=1}^{N} \mu_i\,dn_i,$$

$$dH = T\,dS + V\,dp + \sum_{i=1}^{N} \mu_i\,dn_i,$$

$$dF = -S\,dT - p\,dV + \sum_{i=1}^{N} \mu_i\,dn_i,$$

$$d\Phi = -S\,dT + V\,dp + \sum_{i=1}^{N} \mu_i\,dn_i.$$

REMARQUE. Dans le cas général il faut ajouter également aux seconds membres de ces équations le travail élémentaire δA^* (p. 167).

5° Le potentiel isobare-isotherme d'un système homogène est:

$$\Phi = \int_{p^0}^{p} V\,dp + \Phi^0,$$

où l'intégration est effectuée, pour des valeurs constantes de la température et du nombre de moles de tous les constituants du système, à partir de la faible pression p^0 sous laquelle le système repré-

sente un mélange de gaz parfaits, jusqu'à la pression p de l'état considéré; Φ^0 est le potentiel isobare-isotherme de ce mélange de gaz parfaits à $p = p^0$ et à T:

$$\Phi^0 = \sum_{i=1}^{N} \Phi_i^0 + RT \sum_{i=1}^{N} n_i \ln x_i,$$

où $\Phi_i^0 = \Phi_i(p^0, T, n_i)$ est le potentiel isobare-isotherme du i-ième constituant et x_i la concentration molaire de ce dernier.

Le calcul de l'intégrale définie $\int_{p^0}^{p} V\,dp$ peut être réalisé algébriquement si le système considéré représente un mélange de gaz et que l'équation d'état soit connue. Dans le cas général, cette intégrale est déterminée graphiquement à partir de la dépendance établie expérimentalement $V = V(p)$ pour une transformation isotherme. Si le système se trouve en état solide ou fluide, la dépendance $V = V(p)$ subit des discontinuités dues aux transitions de phase (p. 207). Néanmoins dans ce cas aussi $\int_{p^0}^{p} V\,dp$ peut être déterminée graphiquement.

6° Entropie, enthalpie et énergie interne d'un mélange gazeux.

a) L'entropie:

$$S = \int_{p^0}^{p} \left| \frac{nR}{p} - \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \right| dp + S^0,$$

$$S^0 = \sum_{i=1}^{N} S_i^0 - R \sum_{i=1}^{N} n_i \ln x_i - nR \ln \frac{p}{p^0},$$

où $n = \sum_{i=1}^{N} n_i$ est le nombre de moles de tous les gaz du mélange, $x_i = n_i/n$ la concentration molaire du i-ième gaz du mélange; l'intégration est effectuée pour des valeurs constantes de n_i et de la température T du mélange en état considéré (p, T); p^0 est la faible pression sous laquelle le système représente un mélange de gaz parfaits, S_i^0 l'entropie du i-ième gaz à p^0 et à T:

$$S_i^0 = \int_{T^0}^{T} C_{pi}^0 \, d \ln T + S_{0i}^0,$$

où C^0_{pi} est la capacité calorifique du i-ième constituant (d'un gaz parfait) dans une transformation isobare, S^0_{0i} l'entropie de ce gaz à l'état (p^0, T_0), T_0 est une température arbitraire standard.

b) L'enthalpie:

$$H = \int_{p^0}^{p} \left[V - T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \right] dp + H^0,$$

$$H^0 = \sum_{i=1}^{N} n_i H^0_i, \quad H^0_i = \int_{T_0}^{T} C^0_{pi}\, dT + H^0_{0i}.$$

c) L'énergie interne:

$$U = \int_{V_\infty}^{V} \left[T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p \right] dV + U^0,$$

où l'intégration est effectuée pour des valeurs constantes de n_i et de la température T du mélange, à partir du grand volume V_∞, pour lequel le système représente un mélange de gaz parfaits, jusqu'au volume V en état considéré; U^0 est l'énergie interne du système à l'état (V_∞, T):

$$U^0 = \sum_{i=1}^{N} n_i U^0_i, \quad U^0_i = \int_{T_0}^{T} C^0_{Vi}\, dT + U^0_{0i}.$$

7° Les potentiels thermodynamiques et l'entropie d'un système hétérogène sont les sommes des fonctions correspondantes de toutes ses parties homogènes (phases)[1]:

$$U = \sum_{j=1}^{\varphi} U_j, \quad H = \sum_{j=1}^{\varphi} H_j, \quad F = \sum_{j=1}^{\varphi} F_j,$$

$$\Phi = \sum_{j=1}^{\varphi} \Phi_j, \quad S = \sum_{j=1}^{\varphi} S_j,$$

où φ est le nombre de phases du système.

---

[1]) On suppose que le système n'est pas finement dispersé, autrement dit, qu'on peut négliger les effets de surface.

8° Les conditions d'équilibre thermodynamique d'un système suivant le caractère de son isolation s'expriment des façons suivantes:

a) si U = const et V = const, on a $dS = 0$ et $S = S_{max}$;
b) si S = const et V = const, on a $dU = 0$ et $U = U_{min}$;
c) si S = const et p = const, on a $dH = 0$ et $H = H_{min}$;
d) si T = const et V = const, on a $dF = 0$ et $F = F_{min}$;
e) si T = const et p = const, on a $d\Phi = 0$ et $\Phi = \Phi_{min}$.

D'ici viennent en particulier:

la *condition d'équilibre chimique:* dans un système hétérogène en équilibre les potentiels chimiques de tout constituant doivent être les mêmes pour toutes les phases qui le contiennent;

la *condition d'équilibre thermique:* la température doit être la même dans toutes les parties d'un système en équilibre;

la *condition d'équilibre mécanique:* la pression dans toutes les parties d'un système en équilibre, sur lequel n'agissent d'autres forces que la pression extérieure uniforme, doit être la même.

9° Les fonctions U, H, F et Φ d'un système peuvent avoir plusieurs minimums (pour des valeurs données de deux paramètres d'état qui leur correspondent, par exemple p et T pour Φ; V et T pour F, etc.), et l'entropie S, plusieurs maximums (quand U, $V =$ const)[1]).

L'état d'équilibre correspondant au maximum absolu de S (pour des valeurs données de U et de V), au minimum absolu de Φ (pour des valeurs données de p et T), au minimum absolu de F (pour des valeurs données de V et T), etc., est un *équilibre stable.* Les états d'équilibre correspondant aux maximums relatifs de S (aux minimums relatifs de Φ, F, H et U) sont des équilibres *instables* ou *métastables.* Un liquide surchauffé et une vapeur sursaturée (p. 263) peuvent servir d'exemples d'états d'équilibre métastables.

10° *Principe de Le Chatelier* (loi du déplacement de l'équilibre). Si un système en équilibre stable est soumis à une action extérieure faisant sortir ce système de son équilibre, l'équilibre se déplace dans le sens de l'atténuation de l'effet de cette action.

Par exemple, lors de la diminution du volume d'un système à un constituant liquide-vapeur se trouvant en équilibre, une partie de la vapeur se condense si bien que la température et la pression du système s'élèvent.

---

[1]) Le nombre de paramètres d'état est plus grand pour les systèmes non équilibrés que pour les systèmes en équilibre.

11° On appelle ***transition de phase (transformation de phase)*** le passage de la substance d'une phase à une autre. On distingue les transitions de phase du premier et du deuxième ordre.

On appelle ***transition de phase du premier ordre*** la transformation s'accompagnant d'un changement brusque d'énergie interne et de densité. Les transitions de phase du premier ordre sont toujours liées à un dégagement ou à une absorption de chaleur appelée ***chaleur de la transition de phase.*** Le potentiel thermodynamique Φ du système ne varie pas lors d'une transition de phase du premier ordre. Comme exemples de telles transformations peuvent servir la vaporisation (p. 272), la fusion (p. 289), la sublimation (p. 289) et aussi les nombreux passages du solide d'une forme cristalline à une autre.

On considère comme ***transition de phase du deuxième ordre*** la transformation sans changement brusque d'énergie interne et de densité. Dans ce cas la chaleur de la transition de phase est nulle. La transition de phase du deuxième ordre s'accompagne d'un changement brusque de la capacité de chaleur et des coefficients thermodynamiques de dilatabilité et de compressibilité (pp. 195-196). Le passage de l'hélium liquide à l'état superfluide (p. 276), la transformation, au point de Curie, d'une substance ferromagnétique en substance paramagnétique (p. 500), etc., sont des exemples de transition de phase du deuxième ordre.

12° On appelle ***degrés de liberté thermodynamiques*** d'un système les paramètres de phases du système en équilibre, qu'on peut faire varier arbitrairement dans l'intervalle où le nombre des phases est constant.

La ***règle des phases de Gibbs:*** le nombre f de degrés de liberté thermodynamiques d'un système comprenant φ phases et N constituants est:

$$f = N - \varphi + 2.$$

Puisque $f \geqslant 0$, le nombre des phases présentes dans le système satisfait à l'inégalité suivante: $\varphi \leqslant N + 2$.

On distingue suivant le nombre de degrés de liberté thermodynamiques les systèmes *invariants* ($f = 0$), les systèmes *univariants* ($f = 1$), les systèmes *divariants* ($f = 2$), etc.

13° Système à un constituant ($1 \leqslant \varphi \leqslant 3$). Quand $\varphi = 3$, $f = 0$, c'est-à-dire que l'équilibre simultané de trois phases données (solide, liquide et gazeuse, par exemple) n'est possible qu'à un état déterminé dit ***point triple.***

Pour un système diphasé en équilibre à un constituant, la pression est une fonction de la température. Cette dépendance s'exprime par l'*équation de Clapeyron-Clausius:*

$$\frac{dp}{dT} = \frac{r}{T\Delta v},$$

où r est la chaleur spécifique de la transition de la première phase à la seconde, $\Delta v = v_1 - v_2$ la différence des volumes spécifiques des phases.

Si la deuxième phase est un gaz parfait, l'équation de Clapeyron-Clausius est de la forme:

$$d(\ln p) = -\frac{r_\mu}{R} d\left(\frac{1}{T}\right),$$

où $r_\mu = r\mu$ est la chaleur molaire de vaporisation.

10. Equilibre chimique

1° On appelle *fugacité* f_i du i-ième constituant d'un système homogène la fonction de la pression, de la température et de la concentration, liée au potentiel chimique μ_i de ce constituant dans une transformation isotherme par l'équation suivante:

$$(d\mu_i)_T = RT\, d(\ln f_i)$$

ou

$$RT \ln \frac{f_i}{f_i^0} = \mu_i - \mu_i^0,$$

où μ_i^0 et f_i^0 sont les valeurs du potentiel chimique et de la fugacité du i-ième constituant dans un état initial choisi arbitrairement (du point de vue de la pression et de la concentration), correspondant à la même température que celle de l'état considéré. Cet état initial est appelé *état standard*.

2° On appelle *activité a* du i-ième constituant d'un système homogène le rapport de sa fugacité f_i à un état donné à la fugacité f_i^0 à l'état standard sous la même température:

$$a_i = \frac{f_i}{f_i^0} \quad \text{ou} \quad RT \ln a_i = \mu_i - \mu_i^0.$$

3° La fugacité du i-ième constituant d'un mélange de gaz parfaits est égale à la pression partielle du gaz considéré de ce mélange: $f_i = p_i = x_i p$, où x_i est la concentration molaire et p la pression du mélange. Ainsi, la fugacité possède une dimension de pression.

Les équations thermodynamiques déduites pour les transformations isothermes des gaz parfaits et de leurs mélanges sont valables pour les gaz réels et leurs mélanges si on remplace dans ces équations les pressions partielles par leurs fugacités.

4° On appelle ***équilibre chimique*** l'équilibre d'un système formé de constituants réagissant chimiquement entre eux. En équilibre chimique les vitesses des réactions directe et inverse sont égales entre elles, de sorte que la composition du système ne change pas.

L'aptitude des constituants d'entrer en interaction chimique est leur ***affinité chimique***. La variation ΔF du potentiel isochore-isotherme du système au cours de la réaction: $\Delta F = F - F_0$ représente la mesure de l'affinité chimique d'une réaction se déroulant dans un système dont la température et le volume sont constants. Donc, pour une réaction se déroulant à température et pression constantes, la variation du potentiel isobare-isotherme: $\Delta\Phi = \Phi - \Phi_0$ représente la mesure de l'affinité chimique. A l'état d'équilibre chimique les potentiels F (pour T, $V =$ const) et Φ (pour T, $p =$ const) doivent être minimaux. C'est pourquoi une réaction spontanée dans le système n'est possible que dans les cas où $\Delta F < 0$ (pour T, $V =$ const) et $\Delta\Phi < 0$ (pour T, $p =$ const).

5° La réaction chimique peut être représentée à l'aide de la ***formule stœchiométrique:***

$$\sum_{i=1}^{N} a_i A_i = 0,$$

où $A_1, A_2, \ldots, A_N$ sont les symboles chimiques des corps réagissants et des produits obtenus, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des nombres entiers positifs (pour les produits de la réaction) et négatifs (pour les corps réagissants) proportionnels aux variations du nombre de moles $n_1, n_2, \ldots, n_N$ des substances:

$$A_1, \ldots, A_N, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{dn_1}{a_1} = \frac{dn_2}{a_2} = \ldots = \frac{dn_N}{a_N}.$$

6° ***Loi d'action de masse:*** pour un système en équilibre chimique la relation entre les activités de ses constituants, impliqués dans

la réaction chimique décrite à l'aide de la formule stœchiométrique $\sum_{i=1}^{N} a_i A_i = 0$, est de la forme:

$$\prod_{i=1}^{N} a_i^{a_i} = K_a,$$

où $K_a = e^{-\Delta\mu_0/RT}$ est la *constante d'équilibre thermodynamique*, $\Delta\mu_0 = \sum_{i=1}^{N} a_i \mu_i^0$ et μ_i^0 les potentiels chimiques du i-ième constituant à l'état standard. Si pour chaque constituant l'état standard est celui de la substance pure, $\mu_i^0 = \Phi_{\mu i}^0$ représente le potentiel isobare-isotherme d'une mole de substance pure à l'état standard. Dans ce cas $\Delta\mu_0 = \sum_{i=1}^{N} a_i \Phi_{\mu_i}^0 = \Delta\Phi^0$ et pour la constante d'équilibre est vraie la relation:

$$RT \ln K_a = -\Delta\Phi^0.$$

Pour un gaz pur on admet comme état standard à une température donnée l'état hypothétique auquel la fugacité est $f^0 = 1$ atm si la pression $p^0 = 1$ atm. Aussi pour les gaz à n'importe quelle température l'expression $a_i = f_i/p^0$ est-elle numériquement égale à f_i exprimée en atm. La loi d'action de masse pour la réaction dans une phase gazeuse est de la forme:

$$\prod_{i=1}^{N} f_i^{a_i} = K_f, \quad \text{où} \quad K_f = K_a (p^0)^{\sum_{i=1}^{N} a_i}.$$

Si les gaz peuvent être supposés parfaits, on a $f_i = p_i = x_i p$ et la loi d'action de masse s'écrit ainsi:

$$\prod_{i=1}^{N} p_i^{a_i} = K_p \quad \text{et} \quad \prod_{i=1}^{N} x_i^{a_i} = K_x,$$

où p_i et x_i sont la pression partielle et la concentration molaire du i-ième constituant, $K_p = K_f$ et $K_x = p^{-\sum_{i=1}^{N} a_i} K_p$.

7° La constante d'équilibre K_a ne dépend que de la température absolue. Si pour tous les constituants l'état standard est celui de la substance pure, on a:

$$\frac{d \ln K_a}{dT} = \frac{\Delta H^0}{RT^2},$$

où $\Delta H^0 = \sum_{i=1}^{N} a_i H_i^0$, H_i^0 est l'enthalpie d'une mole du i-ième constituant à l'état standard.

La dépendance de $\Delta\Phi^0$ de la température est de la forme:

$$\frac{d}{dT}\left(\frac{\Delta\Phi^0}{RT}\right) = -\frac{\Delta H^0}{RT^2}.$$

8° Si les constituants A_i du système considéré ne sont pas des corps simples, mais des combinaisons chimiques, on a:

$$\Delta\Phi^0 = \sum_{i=1}^{N} a_i(\Delta\Phi^0)_i \quad \text{et} \quad K_a = \prod_{i=1}^{N} (K_a)_i^{a_i},$$

où $(\Delta\Phi^0)_i$ et $(K_a)_i$ correspondent à la réaction de formation d'une mole du i-ième constituant à partir de corps simples. Toutes les réactions intermédiaires de synthèse doivent alors aboutir à la formation de constituants A_i se trouvant dans les mêmes états thermodynamiques qui les caractérisent dans le système considéré

On appelle *potentiel isobare-isotherme standard* $\Delta\Phi_{298}^0$ d'une combinaison chimique quelconque la variation du potentiel isobare-isotherme dans le processus de formation d'une mole de cette combinaison à partir de corps simples à condition que le processus soit isotherme ($t = 25$°C) et que les corps simples initiaux et la combinaison obtenue se trouvent à la pression de 1 atm (plus précisément à des activités égales à l'unité).

L'effet thermique ΔH_{298}^0 du processus indiqué est appelé *effet thermique standard.*

11. Troisième principe de la thermodynamique

1° Le premier et le deuxième principe de la thermodynamique ne permettent pas de déterminer la valeur S_0 de l'entropie du système au zéro absolu ($T = 0$ °K). De ce fait le calcul théorique des valeurs absolues de l'entropie, des potentiels isochore-isotherme

et isobare-isotherme du système, ainsi que le calcul des constantes d'équilibre s'est trouvé impossible.

2° En se fondant sur la généralisation des recherches expérimentales des propriétés de différents corps à des températures très basses fut établi le principe éliminant la difficulté indiquée, qui a obtenu le nom de *principe de Nernst* ou *troisième principe de la thermodynamique*. Sous la formulation de Nernst ce principe peut être énoncé ainsi: dans toute transformation isotherme, évoluant au zéro absolu, la variation de l'entropie du système est nulle, donc

$$\Delta S_{T=0} = 0, \qquad S = S_0 = \text{const},$$

indépendamment de la variation de n'importe quels autres paramètres d'état (par exemple du volume, de la pression, des champs extérieurs, etc.). Autrement dit, au zéro absolu, la transformation isotherme est aussi isentropique.

3° Il découle du troisième principe de la thermodynamique que les capacités calorifiques C_p et C_V et le coefficient de dilatabilité thermodynamique α_t (p. 195) de tous les corps s'annulent à $T = 0$ °K. Il en résulte également l'impossibilité de tout processus conduisant au refroidissement du corps jusqu'à $T = 0$ °K (*le principe de l'inaccessibilité du zéro absolu*).

4° Le principe de Nernst fut développé par Planck, qui supposa que $S_0 = 0$: au zéro absolu l'entropie du système est nulle. L'interprétation physique du principe de Nernst sous la formulation de Planck est donnée en physique statistique (pp. 242 et 246).

La condition $S_0 = 0$ à $T = 0$ °K est une conséquence du caractère quantique des processus évoluant dans un système arbitraire aux basses températures et n'a lieu que pour les systèmes se trouvant à $T = 0$ °K à l'état d'équilibre stable mais non métastable (p. 206). En se fondant sur l'hypothèse de Planck, on peut déterminer les valeurs absolues de l'entropie du système en équilibre. Par exemple, pour un système homogène de composition constante

$$S(p, T) = \int_0^T \frac{C_p}{T}\, dT,$$

où l'intégration est effectuée à $p = \text{const}$.

De la condition $S_0 = 0$ suit que

$$\lim_{T\to 0} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial T} \right)_p = \lim_{T\to 0} \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_V = 0.$$

CHAPITRE 5

Théorie cinétique des gaz

1. Equation fondamentale de la théorie cinétique des gaz

1° La *théorie cinétique des gaz* est fondée sur les méthodes statistiques de recherche (p. 151).

L'*équation fondamentale de la théorie cinétique des gaz* est:

$$pV = \frac{2}{3} W_c,$$

où p est la pression du gaz, V son volume, $W_c = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i u_i^2}{2}$ l'énergie cinétique totale du mouvement de translation de n molécules de gaz occupant le volume V, m_i la masse de la i-ième molécule, u_i sa vitesse.

2° En introduisant la vitesse quadratique moyenne c (p. 216) du mouvement de translation des molécules de gaz:

$$c = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} u_i^2},$$

on a pour un gaz homogène ($m_i = m$)

$$W_c = \frac{1}{2} nmc^2$$

et

$$pV = \frac{1}{3} nmc^2 = \frac{1}{3} Mc^2,$$

où $M = nm$ est la masse du gaz.

Une autre forme de l'équation fondamentale est:

$$p = \frac{2}{3} W_{c0} = \frac{1}{3} n_0 \; mc^2 = \frac{1}{3} \rho c^2,$$

où $n_0 = n/V$ est le nombre de molécules de gaz dans une unité de volume, $W_{c0} = W_c/V$ et $\rho = n_0 m$ est la densité du gaz.

2. Loi de la distribution des vitesses moléculaires de Maxwell

1° La *loi de la distribution des vitesses moléculaires de Maxwell* décrit la répartition stationnaire des vitesses des molécules d'un gaz parfait monoatomique dans l'état d'équilibre thermodynamique et en l'absence des champs extérieurs. La distribution de Maxwell des vitesses moléculaires est le résultat des collisions entre les molécules lors de leur agitation thermique chaotique.

2° On utilise les formes suivantes de la loi de distribution de Maxwell. La distribution des vitesses absolues des molécules est:

$$dn_u = n \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mu^2}{2kT}} 4\pi u^2 du.$$

Ici u est la valeur absolue de la vitesse d'une molécule, $u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$, m la masse d'une molécule, k la constante de Boltzmann, T la température absolue, dn le nombre de molécules (pour le nombre total n) dont les vitesses sont comprises entre u et $u + du$.

La distribution de Maxwell sous la forme:

$$dn = n \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mu^2}{2kT}} du_x \, du_y \, du_z,$$

où u_x, u_y, u_z sont les projections des vitesses de la molécule sur les axes de coordonnées, peut être représentée de la sorte:

$$dn = nf(u_x) \; f(u_y) \; f(u_z) \; du_x \; du_y \; du_z \, .$$

Ici

$$f(u_i) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{mu_i^2}{2kT}} \quad (i = x, \; y, \; z)$$

est la fonction de distribution suivant les projections des vitesses

Toutes les directions de mouvement des molécules dans l'espace étant équiprobables, la distribution des vitesses moléculaires est isotrope et $f(u_i)$ a la même forme pour $i = x, y, z$.

Une autre forme de la loi de Maxwell est:

$$dn = n \frac{4}{\sqrt{\pi}\, u_p^3} e^{-\left(\frac{u}{u_p}\right)^2} u^2\, du,$$

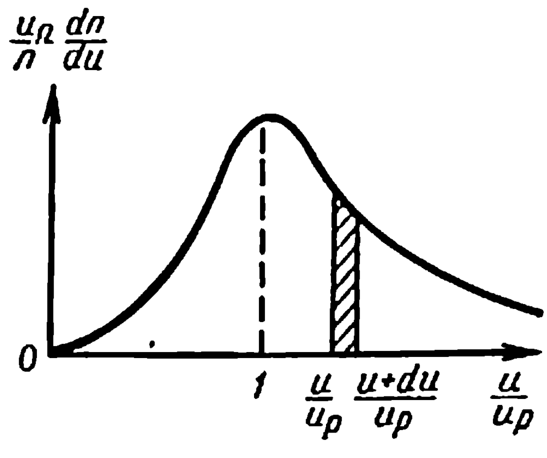


FIG. II.5.1.

où u_p est la vitesse la plus probable (3°).

La courbe de distribution des vitesses moléculaires est représentée fig. II.5.1. La fraction de molécules gazeuses dn avec leurs vitesses comprises entre u et $u + du$ est numériquement égale à l'aire dS hachurée du trapèze curviligne:

$$dS = \left(\frac{u_p}{n}\frac{dn}{du}\right)\frac{du}{u_p} = \frac{dn}{n},$$

$$\frac{dn}{n} = f(u)du,$$

où $f(u) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mu^2}{2kT}} u^2$ est la fonction de distribution des vitesses moléculaires montrant la fraction de molécules $\frac{dn}{n}$ avec leurs vitesses comprises dans l'intervalle unitaire du au voisinage de la vitesse u.

La condition de normalisation de la fonction de distribution est:

$$\int_0^\infty f(u)\, du = 1,$$

puisque les vitesses de toutes les molécules sont comprises entre 0 et ∞.

Avec l'élévation de température du gaz, le maximum de la courbe de distribution se déplace dans le sens des grandes vitesses et sa valeur absolue diminue. Les courbes de distribution des vitesses

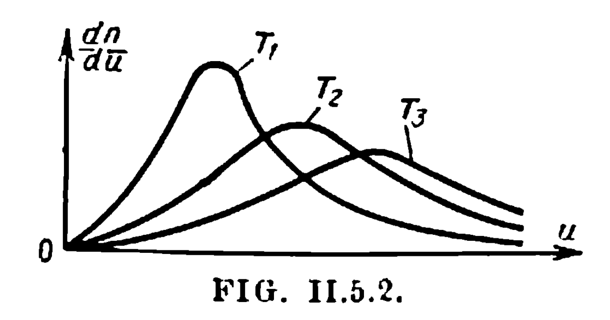


FIG. II.5.2.

moléculaires pour trois températures $T_1 < T_2 < T_3$ sont représentées fig. II.5.2.

3° On distingue les vitesses suivantes caractérisant le gaz à une température donnée:

a) la *vitesse la plus probable* u_p, correspondant au maximum de la fonction $f(u)$:

$$u_p = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \approx 1{,}41 \sqrt{\frac{kT}{m}};$$

b) la *vitesse arithmétique moyenne* $\bar{u}$ de mouvement des molécules $\bar{u} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} u_i$, où n est le nombre total de molécules gazeuses:

$$\bar{u} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \approx 1{,}60 \sqrt{\frac{kT}{m}};$$

c) la *vitesse quadratique moyenne* c de mouvement des molécules

$$c = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} u_i^2}:$$

$$c = \sqrt{3BT} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \approx 1{,}73 \sqrt{\frac{kT}{m}},$$

où B est la constante spécifique des gaz (p. 158), T la température absolue, μ le poids moléculaire du gaz, R la constante universelle des gaz (p. 158), k la constante de Boltzmann et m la masse d'une molécule gazeuse.

4° La distribution des énergies des molécules:

$$dn_W = \frac{2n}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{W_c}{kT}} \sqrt{W_c}\, dW_c,$$

où $W_c = \frac{mu^2}{2}$ est l'énergie de translation d'une molécule d'un gaz monoatomique. Dans cette formule $\frac{dn_W}{n} = f(W_c)\, dW_c$;

$f(W_c)$ est la fonction de distribution des énergies entre les molécules.

EXEMPLE 1. Energie cinétique moyenne des molécules d'un gaz parfait monoatomique:

$$\overline{W}_c = \int_0^{\infty} W_c f(W_c)\, dW_c =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}\,(kT)^{3/2}} \int_0^{\infty} W_c\, e^{-\frac{W_c}{kT}} \sqrt{W_c}\, dW_c = \frac{3}{2} kT.$$

La température absolue (p. 154) représente la mesure de l'énergie cinétique moyenne de translation des molécules d'un gaz parfait. Ceci est vrai pour un domaine de températures pas trop basses, éloignées de la température de dégénérescence (p. 240).

EXEMPLE 2. Nombre de molécules ayant des énergies plus grandes que l'énergie donnée $W_{0c} \gg kT$:

$$n_{W_c > W_{0c}} = \int_{W_{0c}}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi}}\, n(kT)^{-\frac{3}{2}}\, e^{-\frac{W_c}{kT}} \sqrt{W_c}\, dW_c \approx$$

$$\approx \frac{2n\sqrt{W_{0c}}}{\sqrt{\pi (kT)^3}} \int_{W_{0c}}^{\infty} e^{-\frac{W_c}{kT}}\, dW_c = \frac{2n\sqrt{W_{0c}}}{\sqrt{\pi kT}}\, e^{-\frac{W_c}{kT}}.$$

5° Distribution de Maxwell des vitesses relatives des molécules. Le mouvement relatif de deux molécules peut être décrit par le mouvement d'une particule de masse réduite (p. 100) $m_{réd} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$. Pour un gaz homogène $m_1 = m_2 = m$ et $m_{réd} = \frac{m}{2}$. La distribution des vitesses relatives des molécules est:

$$dn_{u_{rel}} = n \left(\frac{m}{4\pi kT} \right)^{\frac{2}{3}} e^{-\frac{m u_{rel}^2}{4kT}}\, 4\pi u_{rel}^2\, du_{rel},$$

où u_{rel} est la vitesse relative de deux molécules;

$$\frac{dn\, u_{rel}}{n} = f(u_{rel})\, du_{rel};$$

$f(u_{rel})$ est la fonction de distribution des vitesses relatives des molécules égale à

$$f(u_{rel}) = 4\pi \left(\frac{m}{4\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mu_{rel}^2}{4kT}} u_{rel}^2.$$

EXEMPLE. La vitesse relative moyenne des molécules est:

$$\bar{u}_{rel} = \int_0^\infty u_{rel} f(u_{rel})\, du_{rel} = \sqrt{2} \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{2}\, \bar{u},$$

où $\bar{u}_{rel}$ est la vitesse arithmétique moyenne des molécules.

3. Libre parcours moyen des molécules

1° Le choc de deux particules est caractérisé par la *section transversale efficace du choc* σ. Dans le cas du choc des molécules de diamètre $d \approx 10^{-8}$ cm, la section transversale efficace *gazocinétique* est égale à l'aire d'un cercle de rayon d *(diamètre effectif d'une molécule)*:

$$\sigma_0 = \pi d^2.$$

La section transversale efficace dépend de l'énergie des particules s'entrechoquant et du genre de processus s'opérant lors du choc (pp. 756 et 757).

2° Entre deux chocs successifs la molécule effectue un mouvement rectiligne uniforme parcourant en moyenne une certaine distance appelée *libre parcours moyen* $\bar{\lambda}$. La loi de la distribution des parcours libres établit la probabilité $dw(x)$ pour qu'une molécule parcoure sans choc le chemin x et subisse un choc sur la portion infinitésimale suivante de chemin dx:

$$dw(x) = e^{-n_0 \sigma x} n_0 \sigma\, dx,$$

où n_0 est le nombre de molécules par cm³ de gaz, σ la section transversale efficace du choc.

3° Distance moyenne $\bar{x}$ parcourue sans choc par la molécule (libre parcours moyen):

$$\bar{x} = \bar{\lambda} = \int_0^\infty x\, dw(x) = \int_0^\infty x e^{-n_0 \sigma x} n_0 \sigma\, dx = \frac{1}{n_0 \sigma}.$$

Compte tenu de la distribution des vitesses relatives des molécules s'entrechoquant:

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}n_0\sigma},$$

où σ est supposé indépendant de u_{rel}. Pour un gaz donné le libre parcours moyen est inversement proportionnel à la pression du gaz p (quand $T = \text{const}$):

$$p_1\bar{\lambda}_1 = p_2\bar{\lambda}_2;$$

les indices 1 et 2 appartiennent à deux états du gaz.

4. Phénomènes de transfert dans les gaz

1° Par suite du mouvement chaotique des molécules et des chocs intermoléculaires les vitesses (les énergies) des particules gazeuses varient sans cesse. En présence d'une hétérogénéité spatiale de la densité, de la température du gaz ou de la vitesse du mouvement ordonné de certaines couches de celui-ci, il s'ajoute au mouvement thermique des molécules un mouvement ordonné égalisant ces hétérogénéités: surgissent des phénomènes de transfert.

2° Les *phénomènes de transfert* (conductibilité thermique, frottement interne et diffusion) consistent en l'apparition dans les gaz ou les liquides d'un transport dirigé de masse (diffusion), de quantité de mouvement (frottement interne) et d'énergie interne (conductibilité thermique). Ces phénomènes dans les gaz sont liés à la violation de la distribution de Maxwell des vitesses moléculaires. Dans le cas le plus simple les phénomènes de transfert sont à une dimension: les grandeurs physiques les déterminant ne dépendent que d'une seule coordonnée cartésienne.

3° Le *phénomène de conductibilité thermique* se manifeste en présence du gradient de température, et dans le cas stationnaire à une dimension ($T = T(x)$) est décrit par l'*équation de Fourier* (cf. le cas général, p. 283):

$$dQ = -K\frac{dT}{dx}dSdt,$$

où dQ est la quantité de chaleur transportée au cours du temps dt à travers l'élément de surface dS suivant la normale x à cette surface, dans le sens de décroissance de la température, $\frac{dT}{dx}$ est le gradient de température, K le *coefficient de conductibilité thermique* numériquement égal à la quantité de chaleur transportée à travers

l'unité de surface par unité de temps pour un gradient de température égal à l'unité.

En vertu de la théorie cinétique élémentaire

$$K = \frac{1}{3} \bar{u} \bar{\lambda} \rho c_V.$$

Ici $\bar{u}$ est la vitesse moyenne du mouvement thermique des molécules, $\bar{\lambda}$ le libre parcours moyen, ρ la densité du gaz, c_V la chaleur spécifique du gaz à volume constant.

4° Le *phénomène de frottement interne (viscosité)* est lié à l'apparition de forces de frottement entre deux couches de gaz ou de liquide se déplaçant parallèlement l'une par rapport à l'autre à des vitesses différentes. Le frottement interne est dû au transfert de quantité de mouvement d'une couche de gaz à une autre par les molécules. L'*équation de Newton* pour la viscosité dans un problème à une dimension ($v = v(x)$) est la suivante:

$$dF = -\eta \frac{dv}{dx} dS,$$

où dF est la force de frottement interne agissant sur l'élément de surface dS de la couche, $\frac{dv}{dx}$ le gradient de vitesse de mouvement des couches dans la direction x perpendiculaire à la surface de la couche, η le *coefficient de frottement interne (de viscosité)* numériquement égal à la force de frottement entre deux couches de surface unité pour un gradient de vitesse égal à l'unité.

En vertu de la théorie cinétique élémentaire

$$\eta = \frac{1}{3} \bar{u} \rho \bar{\lambda},$$

où $\bar{u}$ est la vitesse moyenne de l'agitation thermique des molécules, $\bar{\lambda}$ le libre parcours moyen, ρ la densité du gaz.

Une théorie plus exacte conduit à la substitution au facteur $\frac{1}{3}$ du coefficient φ dépendant du caractère d'interaction des molécules. Pour les molécules s'entrechoquant comme des sphères rigides lisses $\varphi = 0{,}499$. Dans le cas de modèles de forces d'interaction plus exacts φ devient une fonction croissante de la température.

5° Les coefficients de transfert K et η ne dépendent pas de la densité du gaz, car le produit $\rho\bar{\lambda}$ ne dépend pas de ρ. La viscosité des gaz croît avec l'élévation de température proportionnellement à $\sqrt{T}$.

6° On appelle *phénomène de diffusion* le processus établissant à l'intérieur des phases (p. 152) une répartition équilibrée des concentrations (p. 159). La diffusion à température constante entraîne l'égalisation des potentiels chimiques (p. 202). Dans un système monophasé à température constante, en l'absence de forces extérieures, la diffusion provoque l'égalisation de la concentration du constituant de la phase dans tout le système. Si des forces extérieures agissent sur le système ou que l'on maintienne le gradient de température, la diffusion conduit à l'établissement de gradients de concentration de constituants différents (diffusion thermique, électro-diffusion et autres processus). Le phénomène de diffusion, pour le cas à une dimension ($\rho = \rho(x)$), dans un système à deux constituants, est décrit par la *première loi de Fick:*

$$dM = -D\frac{d\rho}{dx}dS\ dt,$$

où dM est la masse du premier constituant, transportée au cours du temps dt à travers l'élément de surface dS suivant sa normale x dans le sens de décroissance de la densité du premier constituant, $d\rho/dx$ le gradient de densité, D le *coefficient de diffusion.*

Si dans un système à un constituant on isole par la pensée un groupe de molécules, le processus d'égalisation de la concentration des particules isolées dans tout le volume du récipient est appelé *autodiffusion.* L'autodiffusion est décrite également par la loi de Fick, D étant alors appelé *coefficient d'autodiffusion.*

Dans le cas le plus simple d'autodiffusion, l'égalisation de la concentration d'une substance chimiquement homogène a lieu à $T =$ const et en l'absence de forces extérieures, elle est réalisée par superposition d'un mouvement ordonné des molécules ou des atomes à leur mouvement thermique. Dans le cas de mouvement brownien (p. 252), ce sont de grosses particules suspendues dans le gaz ou le liquide qui diffusent.

7° On appelle *densité de courant de diffusion* $\mathbf{j}$ le nombre de particules d'une substance donnée, transféré par diffusion dans l'unité de temps à travers l'unité de surface. Si dans le milieu existent un gradient de pression ∇p, engendré par certaines forces extérieures, et un gradient de température ∇T, la densité de courant de diffusion est:

$$\mathbf{j} = -Dn_0\left(\nabla c + \frac{k_T}{T}\nabla T + \frac{k_p}{p}\nabla p\right),\quad \text{où}\quad n_0 = \frac{p}{kT},$$

k est la constante de Boltzmann, D le coefficient de diffusion numériquement égal à la densité de courant de diffusion en pré-

sence d'un seul gradient de concentration ∇c égal à $1/n_0$. La grandeur $k_T D$ est appelée *coefficient de diffusion thermique*; elle est numériquement égale à la densité de courant de diffusion lorsque $\nabla c = \nabla p = 0$, $\nabla T/T = 1/n_0$. La grandeur sans dimension k_T est le *facteur de thermodiffusion*. La grandeur $k_p D$ est le *coefficient de diffusion barométrique*; elle est numériquement égale à la densité de courant de diffusion lorsque $\nabla c = \nabla T = 0$, $\nabla p/p = 1/n_0$.

8° Dans le cas de diffusion à trois dimensions, la variation de concentration avec le temps, à température constante et en l'absence de forces extérieures, se décrit par l'*équation différentielle de diffusion:*

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial c}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(D\frac{\partial c}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(D\frac{\partial c}{\partial z}\right),$$

où D est le coefficient de diffusion, t le temps. Si D ne dépend pas de la concentration, l'équation prend la forme:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\Delta c$$

(seconde loi de Fick), où Δ est l'opérateur différentiel de Laplace.

EXEMPLE 1. Distribution de la concentration le long d'une barre semi-infinie à l'extrémité de laquelle est concentrée la masse M (sur l'unité de surface de l'extrémité) à l'instant initial $t = 0$:

$$c(x,t) = \frac{M}{\sqrt{\pi D t}}\, e^{-\frac{x^2}{4Dt}},$$

où x est la distance de l'extrémité.

EXEMPLE 2. Distribution de la concentration d'une substance de masse M dissoute dans un liquide, qui, à l'instant initial $t = 0$, se trouvait à l'origine des coordonnées:

$$c(r,\ t) = \frac{M}{8\rho(\pi D t)^{3/2}}\, e^{-\frac{r^2}{4Dt}},$$

où ρ est la densité du liquide, r la distance de l'origine des coordonnées.

9° En vertu de la théorie cinétique élémentaire des gaz

$$D = \frac{1}{3}\,\frac{\bar{u}}{\sqrt{2}\,n_0\sigma} = \frac{1}{3}\,\bar{u}\,\bar{\lambda},$$

où $\bar{u}$ est la vitesse moyenne du mouvement thermique des molécules, σ la section transversale efficace du choc des molécules (p. 218), n_0 le nombre de molécules par cm³, $\bar{\lambda}$ le libre parcours moyen.

Le coefficient d'autodiffusion est inversement proportionnel à la pression du gaz; avec la variation de température D varie proportionnellement à $T^{1/2}$ pour un volume constant, et proportionnellement à $T^{3/2}$ (pratiquement de $T^{1,7}$ à T^2) sous une pression constante.

10° On observe dans un mélange stationnaire déséquilibré de deux gaz la diffusion des molécules d'un gaz dans l'autre. En première approximation, le coefficient de diffusion D se calcule dans ce cas à l'aide de la formule donnée plus haut (9°), et

$$\sigma = \sqrt{2}\,\pi\left(\frac{d_1 + d_2}{2}\right)^2,$$

où d_1 et d_2 sont les diamètres des molécules des deux gaz. Une expression plus exacte du coefficient de diffusion est la suivante:

$$D = \frac{3\sqrt{RT}\sqrt{\dfrac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1\mu_2}}}{32\sqrt{2\pi}\;N_A\psi(c_1 + c_2)},$$

où μ_1 et μ_2 sont les poids moléculaires de chacun des gaz, c_1 et c_2 leurs concentrations en mol/cm³, N_A le nombre d'Avogadro. La grandeur ψ dépend du caractère de l'interaction de forces des molécules; dans le cas où les molécules sont considérées comme des sphères élastiques

$$\psi = \frac{(d_1 + d_2)^2}{16},$$

où d_1 et d_2 sont les diamètres des molécules des deux gaz.

11° Selon la théorie cinétique des gaz, il existe entre les coefficients de transfert une certaine relation:

$$\eta = \rho D \quad \text{et} \quad \frac{K}{\eta c_V} = 1,$$

où c_V est la chaleur spécifique du gaz dans une transformation isochore. En pratique, on utilise une relation plus exacte des coefficients de transfert:

$$D = \frac{K}{\alpha\rho c_V},$$

où α est un facteur dépendant du nombre de degrés de liberté des molécules de gaz; pour un gaz monoatomique $\alpha = 2{,}5$, pour un gaz diatomique $\alpha = 1{,}9$; pour un gaz triatomique $\alpha = 1{,}75 \div 1{,}5$.

A l'aide de l'un des coefficients de transfert trouvé par l'expérience, ρ et c_V étant connus, on peut déterminer les autres coefficients. Les formules des coefficients de transfert dans les gaz ne concordent qu'approximativement avec les données de l'expérience, à l'ordre de la grandeur près. A l'aide des valeurs des coefficients de transfert on peut calculer les diamètres effectifs des molécules. Dans le tableau ci-dessous sont données les équations de transfert (pour le problème à une dimension) et les formules des coefficients de transfert dans les gaz.

Phénomènes de transfert dans les gaz

Phénomène	Grandeur physique transférée	Equation de transfert	Formule du coefficient de transfert
Diffusion	Masse	$dM = -D \frac{d\rho}{dx} dS\,dt$	$D = \frac{1}{3} \overline{u}\,\overline{\lambda}$
Frottement interne	Quantité de mouvement	$dF = -\eta \frac{dv}{dx} dS$	$\eta = \frac{1}{3} \overline{u}\,\overline{\lambda}\,\rho$
Conductibilité thermique	Energie interne	$dQ = -K \frac{dT}{dx} dS\,dt$	$K = \frac{1}{3} \overline{u}\,\overline{\lambda}\,\rho\,c_V$

5. Propriétés des gaz raréfiés

1° On appelle *gaz raréfié* un gaz soumis à une pression inférieure à la pression atmosphérique. Un tel état du gaz est appelé galement *vide*. Le degré de raréfaction du gaz dépend du rapport entre le libre parcours moyen $\overline{\lambda}$ correspondant aux chocs réciproques des molécules de gaz et les dimensions linéaires d du récipient dans lequel est renfermé ce gaz. On distingue des degrés de vide très poussé ($\overline{\lambda} \gg d$), poussé ($\overline{\lambda} > d$), moyen ($\overline{\lambda} \leqslant d$) et bas ($\overline{\lambda} \ll d$). La différence des propriétés des gaz raréfiés de

celles des gaz non raréfiés se manifeste dans les trois premiers degrés de vide énumérés.

Quelques caractéristiques des différents degrés de vide

Caractéristiques	Vide			
	bas	moyen	poussé	très poussé
Pressions caractéristiques du degré de vide donne, mm Hg	$760-1$	$1-10^{-3}$	$10^{-3}-10^{-7}$	10^{-8} et moins
Nombre de molécules, m^{-3}	$10^{25}-10^{22}$	$10^{22}-10^{19}$	$10^{19}-10^{13}$	10^{13} et moins
Dépendance des coefficients de conductibilité thermique et de viscosité vis-à-vis de la pression	Ne dépendent pas de la pression	La dépendance de la pression est déterminée par le paramètre $\frac{\bar{\lambda}}{d}$	Sont directement proportionnels à la pression	Ces deux phénomènes font pratiquement défaut

2° Par la suite on comprendra sous gaz raréfiés les gaz se trouvant à l'état de vide poussé. Le libre parcours des molécules d'un gaz raréfié est déterminé par les dimensions du récipient. C'est pourquoi la décroissance de la densité du gaz raréfié n'influe pas sur la grandeur $\bar{\lambda} = d$ et conduit seulement à la réduction du nombre de molécules prenant part au transport d'impulsion ou d'énergie interne. Les coefficients de viscosité et de conductibilité thermique d'un gaz raréfié sont proportionnels à la densité du gaz.

3° Il existe dans les gaz raréfiés le frottement externe du gaz en mouvement sur les parois du récipient. Ce frottement dépend du changement de l'impulsion des molécules lors de leurs chocs contre les parois. La valeur de la force de frottement, agissant sur l'unité de surface de la paroi, est proportionnelle, en première approximation, à la vitesse de mouvement du gaz et à sa densité. La conductibilité thermique des gaz raréfiés est inférieure à celle des gaz ordinaires et est réalisée sous forme de transport d'énergie interne par les molécules qui se déplacent librement entre les parois du récipient à différentes températures

T_1 et T_2. La quantité de chaleur reçue (ou perdue) par l'unité de surface d'une paroi par unité de temps est proportionnelle à la différence de température $T_1 - T_2$ et à la densité du gaz.

4° *Loi de Knudsen:* l'écoulement d'un gaz raréfié dans un capillaire cylindrique de rayon r et de longueur l est:

$$Q = \frac{8}{3} r^3 \sqrt{\frac{\pi\mu}{2RT}} \; \frac{p_1 - p_2}{l},$$

où Q est la masse de gaz s'écoulant en 1 s à travers la section transversale d'un capillaire, μ le poids moléculaire du gaz, R la constante universelle des gaz, T la température absolue, p_1 et p_2 les pressions du gaz aux extrémités du capillaire.

5° Dans le cas de deux récipients se trouvant à différentes températures T_1 et T_2 et reliés par un tube étroit, l'état stationnaire du gaz raréfié doit satisfaire à la condition

$$n_1 u_1 = n_2 u_2,$$

où n_1 et n_2 sont le nombre de molécules par cm³ des deux récipients, u_1 et u_2 leurs vitesses moyennes. Cette condition signifie l'égalité des courants contraires de molécules, passant du premier récipient dans le second et inversement. Etant donné que $n \sim p/T$ et $u \sim \sqrt{T}$, on a:

$$\frac{p_1}{p_2} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$$

(effet Knudsen).

6° C'est sur les propriétés spéciales des gaz raréfiés qu'est basée la construction de nombreux dispositifs servant à l'obtention du vide *(pompes à diffusion*, etc.), à sa mesure *(vacumètres)* et à la création d'isolation thermique *(vases de Dewar).*

CHAPITRE 6

Eléments de physique statistique

1. Introduction

1° On appelle ***physique statistique (statistique physique)*** la partie de physique théorique qui étudie les propriétés macroscopiques des systèmes en partant des représentations moléculaires cinétiques et des méthodes de statistique mathématique.

La physique statistique considère des systèmes en état d'équilibre (p. 152) ou dans des états proches de celui-ci. L'objet de la physique statistique est l'étude du comportement et des propriétés de tels systèmes en se fondant sur des représentations définies de leur structure atomique.

2° En physique statistique, on suppose connues les propriétés et les lois du mouvement des atomes, des molécules, des particules élémentaires étudiés en mécanique quantique. Dans beaucoup de cas l'état d'un système arbitraire, constitué de n particules à s degrés de liberté, peut être décrit par la mécanique classique en donnant ns coordonnées généralisées et ns impulsions généralisées (p. 98), c'est-à-dire en donnant $2ns$ variables indépendantes.

3° Le comportement des systèmes constitués d'un grand nombre de particules est régi par des lois statistiques, différentes des lois auxquelles est soumise chacune des particules entrant dans un système macroscopique. Le comportement d'une particule isolée (par exemple sa trajectoire, l'ordre de variation de ses états, etc.) n'a aucune importance lors de la description statistique du système. C'est pourquoi l'étude des propriétés du système revient à la recherche des valeurs moyennes des grandeurs physiques caractérisant l'état du système en tant qu'entité. La différence essentielle entre les systèmes soumis aux lois statistiques et les systèmes dont la description se trouve être entièrement

donnée par les lois de la mécanique consiste en ce que le comportement et les propriétés des premiers ne dépendent presque pas de leur état initial.

4° La relation entre les *lois dynamiques* (lois décrivant le mouvement des particules isolées) et les lois statistiques se manifeste dans le fait qu'en fonction des lois du mouvement des particules isolées les propriétés du système macroscopique, étudié par les méthodes de physique statistique, varient considérablement.

2. Probabilité d'un état du système. Valeurs moyennes des grandeurs physiques

1° Le système peut occuper différents états avec telle ou telle probabilité. On détermine la probabilité w_i du i-ième état comme la limite du quotient du temps t_i, durant lequel le système se trouve à l'état donné, par le temps total T d'observation du système, lors de l'augmentation illimitée de T:

$$w_i = \lim_{T\to\infty} \frac{t_i}{T}.$$

Si une grandeur physique M quelconque est fonction univoque de l'état (p. 155) et prend la valeur M_i, ceci signifie que le système se trouve au i-ième état.

2° La probabilité du i-ième état du système coïncide à la probabilité pour que la grandeur physique M prenne la valeur M_i. Si N est le nombre total de mesures de la grandeur M et si N_i est le nombre de mesures lors desquelles la grandeur M prend la valeur M_i, on a:

$$w_i = \lim_{N\to\infty} \frac{N_i}{N}.$$

3° Lors d'une variation continue de l'état du système il faut parler non de la valeur M_i, mais de l'intervalle des valeurs de cette grandeur. La probabilité $dw(M)$ pour que la grandeur M prenne une valeur comprise dans l'intervalle entre M et $M + dM$ est égale à

$$dw(M) = \lim_{T\to\infty} \frac{dt_M}{T}.$$

où dt_M est le temps durant lequel le système se trouve dans des états correspondant aux valeurs de M comprises dans l'intervalle

entre M et $M + dM$; les grandeurs dt_M et dwM sont proportionnelles à la valeur de l'intervalle dM:

$$dw(M) = \rho(M)\, dM,$$

où $\rho\,(M)$ est la ***densité de probabilité*** ou la ***fonction de distribution des probabilités.***

4° *Condition de normalisation* des probabilités d'un état:

lors d'états discrets $\sum\limits_i w_i = 1$;

lors d'une variation continue des états $\int dw(M) = \int \rho(M)\, dM = 1$.

5° La *valeur statistique moyenne* de la grandeur M est désignée par $\overline{M}$, elle se détermine de la manière suivante:

$$\overline{M} = \sum_i \overline{M} w_i,$$

si la grandeur M varie discrètement. La sommation s'étend à tous les états du système. Dans le cas de variation continue de la grandeur M

$$\overline{M} = \int M\, dw\,(M) = \int M \rho\,(M)\, dM,$$

où l'intégration est étendue à tous les états possibles du système. (Cf. les exemples de calcul des valeurs moyennes pp. 216, 217.)

3. Distribution de Gibbs

1° On appelle ***distribution microcanonique de Gibbs*** la distribution des probabilités des différents états d'un système macroscopique fermé, c'est-à-dire d'un système n'interagissant pas avec les corps extérieurs et possédant une énergie constante. Un tel système ne peut pas être obtenu en réalité et n'est qu'un système idéalisé. Ses états sont ***dégénérés:*** à chaque valeur d'énergie peuvent correspondre différents états. On appelle ***multiplicité de dégénérescence*** de l'état donné $\Omega(E)$ le nombre d'états avec l'énergie E.

2° La distribution microcanonique est basée sur la supposition de l'équiprobabilité des différents états ayant une même énergie. Lors de la représentation d'un état du système dans l'es-

pace des phases (p. 103), à chaque état correspond une cellule. Leur ensemble avec l'énergie donnée forme une certaine surface $E = \text{const}$.

3° Les systèmes macroscopiques qui peuvent, au cours d'un temps assez long, se trouver dans n'importe quel état d'énergie donnée sont appelés *systèmes ergodiques*. La supposition qui est à la base de la distribution microcanonique (2°) signifie que le point figuratif dans l'espace des phases se dispose avec la même probabilité dans n'importe quelle cellule de l'espace des phases sur la surface $E = \text{const}$.

4° Pour les systèmes ergodiques dont les états d'énergie E donnée sont équiprobables est vraie l'affirmation suivante: si le système macroscopique se trouve à un certain instant à l'état donné d'énergie E, ce système au cours du temps passera spontanément dans n'importe quels autres états avec la même énergie et se trouvera (en moyenne) un aussi long temps dans chacun de ces états.

La probabilité d'un état du système $w(E_i)$ s'exprime par la distribution microcanonique de Gibbs:

$$w(E_i) = C\,\Omega\,(E_i).$$

Le facteur de proportionnalité C est déterminé par les conditions de normalisation (p. 229):

$$\sum_i w\,(E_i) = 1.$$

La distribution microcanonique de Gibbs est à la base de la distribution canonique de Gibbs.

5° On appelle *distribution canonique de Gibbs* la distribution des probabilités des différents états possibles d'un certain *sous-système quasi fermé*, c'est-à-dire d'une certaine partie d'un système macroscopique fermé. Un sous-système est quasi fermé si son énergie propre est grande, en moyenne, par rapport à son énergie d'interaction avec les autres parties du système fermé (appelées *thermostats)*.

Par exemple, chaque molécule d'un gaz parfait à des températures pas trop basses représente un sous-système quasi fermé. Son énergie cinétique propre dépasse, en moyenne, de beaucoup

son énergie d'interaction avec les autres molécules gazeuses (thermostat).

6° L'interaction du sous-système avec le thermostat conduit au changement de ses états. Il peut passer aussi bien aux états d'énergie initiale qu'aux états avec d'autres valeurs d'énergie. Lors de ces dernières transitions, le sous-système échange de la chaleur avec le thermostat, augmentant ou réduisant son énergie.

7° La probabilité d'un état du sous-système dépend de son énergie seulement. D'après la ***distribution canonique quantique de Gibbs***

$$w(E_i) = \frac{e^{-\frac{E_i}{\Theta}}\Omega(E_i)}{\sum\limits_i e^{-\frac{E_i}{\Theta}}\Omega(E_i)} = \frac{e^{-\frac{E_i}{\Theta}}\Omega(E_i)}{Z},$$

où $w(E_i)$ est la probabilité pour que le sous-système quasi fermé se trouve à l'état d'énergie E_i, $\Omega(E_i)$ la multiplicité de dégénérescence, Θ le ***module de distribution canonique*** ou ***température statistique***.

La grandeur Θ est la température exprimée en unités énergétiques. Elle transforme la différentielle non totale δQ en différentielle totale $\left(\frac{\partial F}{\partial \Theta}\right)_V$, où F est l'énergie libre du système (p. 189):

$$\delta Q = -\Theta d\left(\frac{\partial F}{\partial \Theta}\right)_V.$$

La grandeur Θ prend des valeurs identiques dans deux systèmes différents en équilibre thermodynamique lors du contact thermique entre ceux-ci. Le facteur de proportionnalité universel, changeant la température statistique Θ d'ergs en degrés, est la constante de Boltzmann (p. 158):

$$\Theta = kT > 0.$$

La grandeur $Z = \sum\limits_i e^{-E_i/\Theta}\Omega(E_i)$ est la ***somme des états*** ou la ***somme statistique***.

8° Pour les systèmes dont l'énergie d'état varie quasi continûment, c'est-à-dire dont les distances entre les niveaux énergé-

tiques sont petites par rapport à $\Theta = KT$, la distribution quantique de Gibbs change en *distribution canonique classique:*

$$dw(E) = \frac{e^{-\frac{E}{\Theta}}}{Z}\, d\,\Omega(E),$$

où

$$d\,\Omega(E) = \Omega(E)dE,\ Z = \int e^{-E/\Theta}\, \Omega(E)dE,$$

$d\,\Omega(E)$ est le nombre d'états différents correspondant à l'intervalle d'énergies entre E et $E + dE$, Z l'*intégrale des états.* Pour un système de N particules identiques

$$Z = \frac{1}{h^s N!}\int e^{-\frac{E}{\Theta}}\, d\Gamma,$$

où $d\Gamma$ est l'élément de volume de l'espace des phases (p. 111), h la constante de Planck, s le nombre de degrés de liberté du système. L'intégration s'étend à tout l'espace des phases du système donné. L'intégrale des états et la somme des états sont liées à l'énergie libre F (p. 189) du système par la relation

$$Z = e^{-\frac{F}{\Theta}}; \quad F = -\Theta \ln Z.$$

9° Pour un sous-système à un grand nombre de particules, la distribution canonique de Gibbs a un maximum brusque. Un tel sous-système se trouve la plupart du temps dans l'état le plus probable avec l'énergie qui lui correspond. Si c'est une molécule de gaz parfait qui est sous-système, la distribution canonique de Gibbs change en distribution de Boltzmann (p. 234).

On utilise la distribution canonique de Gibbs pour rechercher la valeur moyenne $\bar{M}$ de la grandeur physique M caractérisant l'état du système et dépendant de son énergie:

$$\bar{M} = \sum_i M(E_i)w(E_i).$$

Lors de la variation continue des états

$$\bar{M} = \int M\,(E)\, dw\,(E).$$

10° Le calcul de Z permet de trouver les fonctions thermodynamiques et l'équation d'état du système donné.

Dans le tableau ci-dessous sont données les formules traduisant les fonctions thermodynamiques, la capacité calorifique et l'équation d'état à l'aide de la somme (ou de l'intégrale) des états du système.

Nom de la grandeur	Désignation	Formule
Energie libre	F	$F = -kT \ln Z$
Potentiel isobare-isotherme	Φ	$\Phi = kT\left[\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial \ln U}\right)_T - \ln Z\right]$
Energie interne	U	$U = kT^2\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial T}\right)_V$
Entropie	S	$S = k\left[\ln Z + T\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial T}\right)_V\right]$
Enthalpie	H	$H = kT\left[\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial \ln V}\right)_T + \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial \ln T}\right)_V\right]$
Capacité calorifique	C_V	$C_V = kT\left[2\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial T}\right)_V + T\left(\frac{\partial^2 \ln Z}{\partial T^2}\right)_V\right]$
Equation d'état	$p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T$	$p = kT\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial V}\right)_T$

4. Loi de l'équipartition de l'énergie par degrés de liberté

Dans un système statistique classique en état d'équilibre thermodynamique (p. 152), à chaque degré de liberté d'une particule isolée correspond la même énergie $\frac{1}{2}kT$, où k est la constante de Boltzmann, T la température absolue.

Tous les degrés de liberté du système, qui se décrit par la mécanique classique, sont énergétiquement équivalents. Ceci même est la *loi de l'équipartition de l'énergie par degrés de liberté.* Cette loi a un domaine restreint d'application et tombe en défaut dans le cas de description quantique du système.

5. Distribution de Maxwell-Boltzmann

La *loi* ou *distribution de Maxwell-Boltzmann* établit la distribution des vitesses des molécules gazeuses en présence d'un champ de forces potentiel arbitraire.

Les formules les plus connues de cette distribution sont:

$$\text{a)}\quad dn_u = \frac{4n_0}{\sqrt{\pi}\, u_p^3}\, e^{-\frac{1}{u_p^2}\left(u^2 + \frac{2W_p}{m}\right)} u^2 du,$$

où u_p est la vitesse la plus probable des molécules (p. 216), dn_u le nombre de molécules par unité de volume du gaz au voisinage d'un point (x, y, z), les vitesses desquelles sont comprises dans l'intervalle entre u et $u + du$, $W_p(x, y, z)$ l'énergie potentielle d'une molécule au point considéré du champ de forces extérieur, n_0 le nombre de molécules par unité de volume du gaz au point où $W_p = 0$;

$$\text{b)}\quad dw = \text{const} \cdot \frac{1}{(2\pi mkT)^{3/2}}\, e^{-\frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2mkT}} dp_x dp_y dp_z \times$$
$$\times\, e^{-\frac{W_p(x, y, z)}{kT}} dx\, dy\, dz,$$

où dw est la probabilité de trouver les coordonnées et les projections de l'impulsion d'une molécule dans l'élément de volume de l'espace des phases $d\Gamma = dx\, dy\, dz\, dp_x dp_y dp_z$ au voisinage du point figuratif (x, y, z, p_x, p_y, p_z); $W_p(x, y, z)$ est l'énergie potentielle d'une molécule dans le champ de forces extérieur. Sous cette forme la distribution de Maxwell-Boltzmann peut être considérée comme une fonction de distribution représentant le produit des probabilités de deux événements indépendants: la probabilité d'une valeur donnée de l'impulsion d'une molécule et la probabilité de la position donnée de cette molécule dans l'espace. La première probabilité,

$$dw(p) = \frac{1}{(2\pi mkT)^{3/2}}\, e^{-\frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2mkT}} dp_x dp_y dp_z,$$

est la distribution de Maxwell (p. 214). La seconde probabilité,

$$dw(x, y, z) = \text{const} \cdot e^{-\frac{W_p(x, y, z)}{kT}} dx\, dy\, dz.$$

est appelée *distribution de Boltzmann*.

EXEMPLE. Distribution de Boltzmann dans un champ de gravitation. L'énergie potentielle d'une molécule de masse m placée dans le champ de gravitation est $W_p = mgz$, où z est l'altitude et g l'accélération de la force de pesanteur. A chaque altitude existe une certaine distribution maxwellienne des vitesses moléculaires, déterminée par la température. L'intégration de la distribution de Maxwell sur toutes les impulsions donne le nombre de molécules comprises dans le volume $dx\ dy\ dz$:

$$dn(x, y, z) = \text{const} \cdot e^{-\frac{mgz}{kT}} dx\ dy\ dz.$$

Il en découle que la densité du gaz $\rho = \frac{dn\,(x, y, z)}{dx\ dy\ dz}\, m$ décroît avec l'altitude suivant une loi exponentielle:

$$\rho = \text{const} \cdot e^{-\frac{mgz}{kT}}.$$

La constante de cette expression est déterminée à partir de la condition $\rho = \rho_0 = \text{const}$ pour $z = 0$. Donc, $\rho = \rho_0 e^{-\frac{mgz}{kT}}$ *(formule barométrique)*. La densité du gaz décroît de e fois à l'altitude $h = kT/mg$, appelée *longueur caractéristique de la distribution de Boltzmann dans le champ de gravitation.*

6. Statistique quantique

1° On appelle *statistique quantique* la théorie des systèmes constitués d'un très grand nombre de particules, qui obéissent aux lois quantiques.

On peut examiner l'état d'un système quantique arbitraire à s degrés de liberté dans une *approximation* dite *quasi classique*, de manière analogue à ce qui se fait en mécanique classique. Dans ce cas, une certaine restriction est imposée aux états possibles du système: à chaque état quantique du système à s degrés de liberté correspond une cellule de volume h^s dans son espace des phases. Ceci correspond au principe d'incertitude de Heisenberg (p. 746).

La variation de l'état du système est seulement discrète; le système de certaines cellules de l'espace des phases passe «par saut» à d'autres cellules. En approximation quasi classique le passage à une cellule quantique voisine correspond à une très petite variation des propriétés du système. On peut admettre que les propriétés du système varient de façon continue. La distribution des parti-

cules entre les cellules d'un espace des phases à 6 dimensions (x, y, z, p_x, p_y, p_z) caractérise un *microétat* défini du système.

2° La tâche de la statistique quantique est la recherche de la fonction de distribution d'un système de particules dans l'espace des phases. La différence essentielle entre la statistique quantique et la statistique classique est l'application successive du *principe d'indiscernabilité des particules identiques.* En statistique quantique, lors de la résolution du problème sur la distribution des particules identiques dans l'espace des phases, la question: quelle particule concrète se trouve dans une cellule donnée de l'espace des phases, n'a aucun sens. Seule a un sens la question se rapportant au nombre de particules occupant une cellule donnée. Le microétat du système ne varie pas avec la permutation des particules aussi bien à l'intérieur d'une cellule donnée de l'espace des phases qu'entre les cellules.

7. Distributions quantiques de Bose-Einstein et de Fermi-Dirac

1° La *statistique de Bose-Einstein* est réalisée dans les systèmes décrits par des fonctions d'onde symétriques (p. 784). A cette statistique obéissent les systèmes de particules ayant un spin entier (p. 796): les *bosons* (les photons et certains noyaux, par exemple), pour lesquels aucune restriction n'est imposée au nombre de particules pouvant se trouver dans une cellule donnée de l'espace des phases à 6 dimensions.

2° En statistique de Bose-Einstein, pour trouver la fonction de distribution, on divise tout l'espace des phases en petits éléments $\Delta\Gamma_i$, dans chacun desquels sont contenus Δg_i états avec une énergie entre W_i et $W_i + \Delta W_i$. Si, dans l'élément donné $\Delta\Gamma_i$ sont contenues ΔN_i particules, celles-ci peuvent être réparties de toutes les manières possibles entre Δg_i états d'énergie W_i. Le nombre d'états est $\Delta g_i = \Delta\Gamma_i/h^3$. La probabilité thermodynamique (p. 247) de la répartition des particules suivant les états dans l'espace des phases permet de trouver la répartition la plus probable à condition de conserver le nombre total de particules et l'énergie totale W du système:

$$\sum_i \Delta N_i = N, \quad \sum_i \Delta N_i W_i = W.$$

Au lieu du nombre de particules ΔN_i (W_i) on détermine habituellement dans l'intervalle d'énergie ΔW_i la densité moyenne

des états avec l'énergie donnée, c'est-à-dire le nombre moyen de particules $\bar{n}_i$ dans le même état, que l'on appelle *fonction de distribution de Bose-Einstein:*

$$\bar{n}_i = \frac{\Delta N_i(W_i)}{\Delta g_i} = \frac{1}{e^{\frac{W_i-\mu}{kT}}-1},$$

où μ est le potentiel chimique (p. 202) rapporté à une particule, k la constante de Boltzmann. L'indice i est omis parfois, car cette fonction de distribution est vraie pour n'importe lequel des éléments de volume de l'espace des phases.

3° La *statistique de Fermi-Dirac* est réalisée dans les systèmes de particules décrits par des fonctions d'onde antisymétriques (p. 784). Cette statistique régit le comportement des systèmes de *fermions* (électrons, protons, neutrons, etc.), particules obéissant au principe d'exclusion de Pauli (p. 796) et ayant un spin demi-entier (p. 797). Pas plus d'une particule ne peut se trouver dans chaque état quantique dans de tels systèmes. La résolution du problème sur la distribution la plus probable des particules entre les états, à condition de conserver l'énergie totale du système et le nombre total de particules, conduit à la *fonction de distribution de Fermi-Dirac*:

$$\bar{n}_i = \frac{\Delta N_i(W_i)}{\Delta g_i} = \frac{1}{e^{\frac{W_i-\mu}{kT}}+1}.$$

Ici les désignations sont les mêmes que pour la distribution de Bose-Einstein.

4° Les fonctions de distribution des statistiques classique et quantique peuvent avoir une formule unique:

$$\bar{n}_i = \frac{1}{e^{\frac{W_i-\mu}{kT}}+\delta},$$

où $\delta = 0$, $\mu = 0$ pour la distribution de Maxwell-Boltzmann; $\delta = -1$ pour la distribution de Bose-Einstein; $\delta = +1$ pour la distribution de Fermi-Dirac. Ces trois fonctions de distribution sont montrées fig. II.6.1.

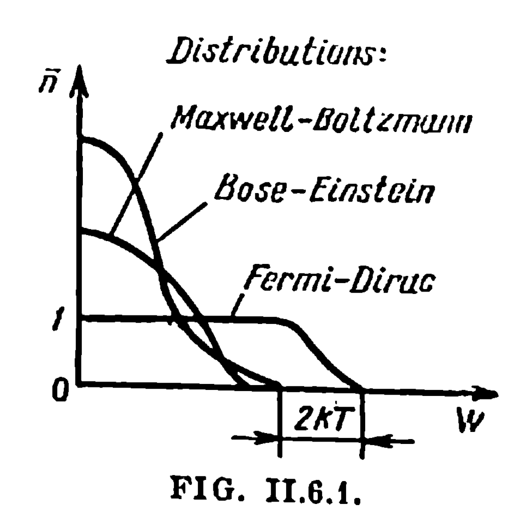


FIG. II.6.1.

EXEMPLE. Densité volumique de rayonnement et fonctions thermody-

namiques d'un gaz photonique renfermé dans le volume V à $T =$ = const, en équilibre thermodynamique.

Le nombre d'états dg_i de rayonnement existant dans l'élément de volume de l'espace des phases est:

$$dg_i = 2\,\frac{4\pi p^2 dp\, dx\, dy\, dz}{h^3}.$$

Le coefficient 2 apparaît du fait de la présence de deux directions possibles de polarisation de la lumière (p. 593).

Le nombre total d'états dans le volume V est:

$$dg = \frac{8\pi p^2 dp\, V}{h^3} = \frac{8\pi W^2\, dW}{h^3 c^3} V.$$

L'impulsion d'un photon est p et son énergie W (p. 725):

$$p = \frac{h\nu}{c}, \quad W = h\nu,$$

où ν est la fréquence, c la vitesse de la lumière dans le vide.

Le nombre de photons avec une énergie de W à $W + dW$ dans le volume V est:

$$dN(W) = \frac{dg}{e^{\frac{W}{kT}} - 1} = \frac{8\pi\nu^2\, V\, d\nu}{c^3\left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1\right)}.$$

La densité volumique d'énergie de rayonnement dans l'intervalle de fréquence entre ν et $\nu + d\nu$ est la suivante:

$$w(\nu, T)d\nu = \frac{dN(W)h\nu}{V} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\,\frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}\,d\nu$$

(*formule de Planck* pour la densité volumique d'énergie de rayonnement thermique du corps noir).

L'intégrale des états Z pour le rayonnement est:

$$Z = \int_0^\infty e^{-\frac{W}{kT}}\, g(W)\, dW = \frac{V}{h^3}\,\frac{16\,\pi\,(kT)^3}{c^3}.$$

L'équation d'état pour le rayonnement est:

$$pV = \frac{8\pi^5\,(kT)^4}{45\,h^3c^3} V.$$

La pression de radiation est: $p = \frac{8\pi^5 (kT)^4}{45\ c^3 h^3}$.

L'énergie libre est: $F = -\frac{V}{h^3}\frac{8\pi^5 (kT)^4}{45c^3}$.

L'énergie de rayonnement est: $U(T) = \frac{V}{h^3}\frac{8\pi^5 (kT)^4}{15c^3}$ (*loi de Stephan-Boltzmann*, p. 718).

La pression de radiation isotrope est: $p = \frac{1}{3}\frac{U(T)}{V} = \frac{1}{3}u(T)$, où $u(T)$ est la densité volumique de rayonnement.

L'entropie de rayonnement est: $S = \frac{V}{h^3}\frac{32\pi^5 k}{45c^3}(kT)^3$.

8. Dégénérescence des gaz obéissant à la statistique quantique

1° On appelle ***dégénérescence des gaz parfaits*** **l'écart de leurs propriétés de celles des gaz ordinaires dû aux propriétés quantiques des systèmes de particules. La dégénérescence des gaz devient considérable aux très basses températures et grandes densités.** Quand $e^{-\frac{\mu}{kT}} \gg 1$, les fonctions de distribution de Bose-Einstein et de Fermi-Dirac changent en fonction de distribution classique (dégénérescence petite). Dans ce cas la condition

$$A = \frac{n_0 h^3}{(2\pi mkT)^{3/2}} \ll 1$$

est satisfaite, où n_0 est le nombre de molécules par cm³ de gaz, m la masse d'une molécule, T la température absolue, k la constante de Boltzmann, h la constante de Planck. La grandeur A est appelée *paramètre de dégénérescence.*

2° L'équation d'état d'une mole de gaz parfait de Bose-Einstein est de la forme:

$$pV = RT\left(1 - \frac{n_0 h^3}{(2\pi mkT)^{3/2}}\right) = RT(1 - A).$$

Elle diffère de l'équation de Mendéléev-Clapeyron (p. 158) par le terme $-RTA$; celui-ci peut être négligé ($A \ll 1$) lorsque n_0 et T prennent des valeurs habituelles.

3° Les fonctions thermodynamiques du gaz dégénéré de Bose-Einstein occupant le volume V sont:

l'énergie libre $F = -1{,}341 \frac{V}{h^3}(2\pi m)^{3/2}(kT)^{5/2}$,

l'entropie $S = 3{,}352 \frac{V}{h^3}(2\pi m)^{3/2}k(kT)^{3/2}$,

l'énergie interne $U = 2{,}011 \frac{V}{h^3}(2\pi m)^{3/2}(kT)^{5/2}$,

la capacité calorifique $C_V = 5{,}027 \frac{V}{h^3}(2\pi m)^{3/2}k(kT)^{3/2}$.

4° Le critérium de dégénérescence de la température dans les gaz est: $T \ll T_0$, où $T_0 = \frac{h^2 n_0^{2/3}}{2\pi\, mk}$ est la *température de dégénérescence.*

Quand $h \to 0$, la température de dégénérescence $T_0 \to 0$, ce qui montre que la dégénérescence des gaz est de nature quantique. Quand $T \gg T_0$, le gaz n'est pas dégénéré, il obéit à la statistique classique. Par exemple, pour un gaz protonique avec des particules de masse $m \approx 2 \cdot 10^{-24}$ g, pour la densité $n_0 \sim 10^{22}$ cm^{-3}, $T_0 \approx 1$ °K. Le gaz photonique est toujours dégénéré, car pour lui $T_0 = \infty$ (la masse au repos d'un photon $m_0 = 0$, p. 551). Pour l'hydrogène, dans les conditions normales ($T = 300$ °K et $n_0 \approx 3 \cdot 10^{19}$ cm^{-3}) le paramètre $A \approx 3 \cdot 10^{-5} \ll 1$. Ceci correspond à la température de dégénérescence $T_0 \approx 1$ °K.

Pour des gaz plus lourds que l'hydrogène, A est encore plus petit et, par conséquent, les gaz aux pressions et températures normales ne sont jamais dégénérés. La dégénérescence engendrée par les propriétés quantiques des gaz est beaucoup moins sensible que les écarts des gaz parfaits dus aux forces d'interaction de Van der Waals (p. 258).

5° Pour les électrons dans les métaux $n_0 \approx 10^{22} \div 10^{23}$ cm^{-3}, de sorte que $T_0 \approx (16 \div 20) \cdot 10^3$ °K. Par conséquent, le gaz électronique dans les métaux (p. 392) est toujours dégénéré (par suite de la faible masse de l'électron, $m \approx 10^{-27}$ g, et d'une grande densité des particules).

6° Si, quand $T \to 0$, $\mu \to W_F$, on a, en vertu de la distribution de Fermi-Dirac, $\Delta N(W_i) = 0$ pour $W > W_F$ et $\Delta N(W_i) = \Delta g$ pour $W < W_F$. Ceci signifie que tous les états inférieurs des électrons, jusqu'à l'état d'énergie W_F, sont remplis, alors que tous les états d'une énergie supérieure à W_F sont libres. Ainsi, $\mu(0)$ dans la formule de la distribution de Fermi-Dirac (p. 237) repré-

sente l'énergie limite W_F des états occupés au zéro absolu. W_F est appelée *énergie de Fermi.* La fonction de distribution des électrons, quand $T \to 0$, est représentée fig. II.6.2.

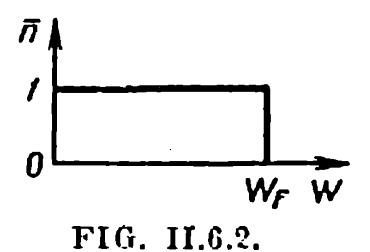


FIG. II.6.2.

7° Dans le modèle du gaz électronique dans les métaux, les électrons, quand $T \to 0$, remplissent uniformément toutes les cellules de l'espace des phases se trouvant à l'intérieur d'une sphère de volume $\frac{4}{3}\pi p_F^3 V$, où p_F est la plus grande impulsion de l'électron pour $T = 0$. Le nombre d'états dans cette sphère, compte tenu du principe de Pauli et de deux orientations possibles du spin de l'électron (p. 486), est égal au nombre des électrons:

$$2\frac{1}{h^3}\frac{4}{3}\pi p_F^3 V = N,$$

d'où

$$p_F = h\left(\frac{3n_0}{8\pi}\right)^{1/3},$$

où $n_0 = \frac{N}{V}$ est le nombre d'électrons par cm^3. La plus grande énergie de l'électron, quand $T = 0$, est égale à $W_F = \frac{p_F^2}{2m} = \frac{h^2}{2m} = \left(\frac{3n_0}{8\pi}\right)^{2/3}$, ou $W_F = 5{,}77 \cdot 10^{-27} n_0^{2/3}$ erg $= 3{,}63 \cdot 10^{-15} n_0^{2/3}$ eV.

La densité des électrons libres dans les métaux étant $n_0 \approx \approx 10^{22}$ cm^{-3}, à l'énergie de Fermi W_F correspond une température T du gaz classique égale à

$$T \approx \frac{W_F}{k} \approx 10^4\ {}^\circ\mathrm{K}.$$

L'énergie moyenne de l'électron dans le métal, quand $T \to 0$, est

$$\bar{W} = \frac{3}{5} W_F = -\frac{3h^2}{10m}\left(\frac{3n_0}{8\pi}\right)^{2/3},$$

autrement dit, elle est de l'ordre de la grandeur W_F.

La pression du gaz électronique, lorsque $T \to 0$,

$$p = \frac{2}{5} n_0 W_F = \frac{1}{5}\frac{h^2}{m}\left(\frac{3}{8\pi}\right)^{2/3} n_0^{5/3}$$

constitue des dizaines de milliers d'atmosphères.

Le coefficient de compressibilité du gaz électronique, lorsque $T \to 0$, est:

$$\beta = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = \frac{3}{5}p^{-1}.$$

8° La fonction de distribution (fig. II.6.2) représente la répartition la plus probable. La probabilité thermodynamique d'une telle distribution est égale à l'unité, d'où il suit que l'entropie du gaz électronique à $T = 0$ est nulle conformément au principe de Nernst (p. 212).

9° Pour $T \neq 0$, la fonction de distribution de Fermi est représentée fig. II.6.1. Elle diffère d'un rectangle (quand $T = 0$) par un domaine d'une largeur d'environ $2kT$ et attenant à μ.

Le potentiel chimique μ d'un gaz électronique est:

$$\mu = W_F\left(1 - \frac{\pi^2(kT)^2}{12W_F^2}\right),$$

où W_F est l'énergie de Fermi.

L'entropie S du gaz électronique dégénéré est:

$$S = \frac{4\pi^3}{3}\frac{V}{h^3}(2m)^{3/2}k\mu^{1/2}(kT),$$

où V est le volume du gaz, k la constante de Boltzmann. Lorsque $T \to 0$, $S \to 0$.

10° L'énergie interne U d'un gaz électronique est:

$$U = \frac{3}{5}NW_F\left[1 + \frac{5}{12}\frac{\pi^2(kT)^2}{W_F^2}\right],$$

où N est le nombre total d'électrons dans le volume V.

La capacité calorifique atomique C_{aV} d'un gaz électronique est:

$$C_{aV} = \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{\pi^2}{2}N_A k = \frac{kT}{W_F}.$$

La comparaison avec l'expression classique de la capacité calorifique d'un gaz monoatomique donne:

$$\frac{C_{aV}}{C_{aV}^{\text{class}}} = \frac{\pi^2}{3}\frac{kT}{W_F} \approx 0{,}03,$$

étant donné que $kT/W_F \approx 0{,}01$, à toutes les températures, quand le gaz électronique est encore dégénéré. La capacité calorifique du gaz électronique dans les métaux est infiniment petite. Ceci est dû à ce qu'au processus de variation de l'énergie interne, lors de l'échauf-

fement, prend part un nombre insignifiant d'électrons se trouvant dans des états correspondant au «domaine de décroissance» de la fonction de distribution de Fermi-Dirac pour $T \neq 0$ (fig. II.6.1).

11° L'énergie des gaz décrits par des statistiques quantiques n'étant pas une fonction linéaire de la température, une simple interprétation physique de la température absolue (p. 217) est inapplicable au domaine des basses températures.

9. Capacités calorifiques des gaz mono et diatomiques

1° Pour un gaz monoatomique dont les molécules sont animées d'un mouvement de translation à trois degrés de liberté, la loi de l'équipartition de l'énergie entre les degrés de liberté (p. 223) conduit à une énergie interne d'une mole de gaz:

$$U = \frac{3}{2} N_A \, kT,$$

où $N_A k = R$ est la constante universelle des gaz (p. 158). L'énergie ne dépend pas du volume, elle est proportionnelle à la température. La chaleur molaire $C_{\mu V}$ (p. 165) d'un tel gaz est:

$$C_{\mu V} = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = \frac{3}{2} N_A k = \frac{3}{2} R \approx 3 \frac{\text{cal}}{\text{mole} \cdot \text{degré}} .$$

2° On appelle *molécule diatomique* une combinaison stable de deux atomes identiques ou différents. La nature des forces, conduisant à la formation de molécules à partir d'atomes isolés, est examinée en mécanique quantique (p. 805). L'énergie d'une molécule comprend W_{transl}, l'énergie de translation de son centre d'inertie, $W_{\text{él}}$, l'énergie du mouvement des électrons dans la molécule, W_{vibr}, l'énergie du mouvement vibratoire des noyaux, et W_{rot}, l'énergie de rotation d'une molécule:

$$W = W_{\text{transl}} + W_{\text{él}} + W_{\text{vibr}} + W_{\text{rot}}.$$

3° Le mouvement de translation d'une molécule diatomique n'est pas quantifié et ne diffère pas de celui d'une molécule monoatomique. Tous les autres genres de mouvements internes d'une molécule sont *quantifiés*: les énergies $W_{\text{él}}$, W_{vibr} et W_{rot} prennent toute une série de valeurs discrète;

4° En première approximation tous les trois genres de mouvements internes d'une molécule sont indépendants l'un de l'autre. Lors de petites amplitudes de vibrations des noyaux on peut négliger l'influence du mouvement vibratoire sur la rotation, autrement

dit, ne pas prendre en considération les variations des moments d'inertie des molécules du fait des vibrations.

5° En étudiant les capacités calorifiques des molécules mono et diatomiques, même aux températures les plus élevées, on peut ne pas tenir compte de la variation de l'énergie $\Delta W_{\text{él}}$ du mouvement électronique: les niveaux énergétiques voisins des électrons dans les molécules sont disposés à des distances d'ordre de plusieurs eV, ce qui correspond à une température de plusieurs dizaines de milliers de degrés.

6° Le mouvement vibratoire des noyaux dans la molécule autour de la position d'équilibre se décrit par les oscillations d'une particule de masse réduite $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$. En première approximation une telle particule oscille comme un oscillateur harmonique (pp. 119, 748) avec l'énergie

$$W_{\text{vibr}} = h\nu\left(n + \frac{1}{2}\right),$$

où le nombre quantique n prend les valeurs entières $n = 0, 1, 2, \ldots$ et ν est la fréquence propre des oscillations. L'énergie $h\nu/2$ représente le point zéro de l'oscillateur et se conserve quand $T \to 0$. La variation de n obéit à la loi de sélection $\Delta n = 0, \pm 1$. La différence d'énergie W_{vibr} entre les niveaux voisins du mouvement vibratoire

$$\Delta W_{\text{vibr}} = h\nu$$

ne dépend pas du nombre quantique.

7° Le mouvement de rotation d'une molécule diatomique est considéré, en première approximation, comme le mouvement d'un rotateur rigide (p. 751) tournant autour d'un centre d'inertie avec le moment d'inertie $I = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r_0^2$, où m_1 et m_2 sont les masses des atomes, r_0 la distance interatomique dans la molécule. L'énergie du rotateur est:

$$W_{\text{rot}} = \frac{h^2}{8\pi^2 I} J(J+1) = hBJ(J+1),$$

où J est le nombre quantique acceptant les valeurs entières, $J = 0, 1, 2, \ldots$, $B = h/8\pi^2 I$ la constante de rotation de la molécule. Dans le cas de variation des états quantiques de rotation J obéit à la loi de sélection suivante: $\Delta J = \pm 1$. La distance entre les niveaux voisins de l'énergie de rotation est:

$$\Delta W_{\text{rot}} = 2hB(J+1).$$

La grandeur ΔW_{rot} est 800 à 1 000 fois plus petite que ΔW_{vibr}. On peut trouver à partir du spectre énergétique des états de vibration et de rotation les sommes des états des mouvements vibratoire et rotatoire de la molécule Z_{vibr} et Z_{rot}, et à leur aide évaluer l'apport des vibrations et des rotations en énergie interne U d'une mole et en chaleur molaire $C_{\mu V}$.

8° L'apport du mouvement vibratoire des molécules diatomiques en énergie interne et capacité calorifique d'une mole est égal à:

$$U_{vibr} = \frac{N_A h\nu}{2} \frac{e^{\frac{h\nu}{2kT}} + e^{-\frac{h\nu}{2kT}}}{e^{\frac{h\nu}{2kT}} - e^{-\frac{h\nu}{2kT}}} = \frac{N_A h\nu}{2} \coth\left(\frac{h\nu}{2kT}\right) =$$

$$= \frac{N_A h\nu}{2} \coth\left(\frac{T_c}{2T}\right),$$

$$C_{\mu V_{vibr}} = \frac{N_A k}{4} \left(\frac{h\nu}{kT}\right)^2 \frac{1}{\text{sh}^2\left(\frac{h\nu}{2kT}\right)} = \frac{N_A k}{4} \left(\frac{T_c}{T}\right)^2 \frac{1}{\text{sh}^2\left(\frac{T_c}{2T}\right)},$$

où k est la constante de Boltzmann, N_A le nombre d'Avogadro, $T_c = h\nu/k$ la *température caractéristique des vibrations*.

Aux hautes températures ($T \gg T_c$)

$$U_{vibr} \approx N_A kT = RT,$$

$$C_{\mu V_{vibr}} \approx N_A k = R,$$

ceci signifie que ces formules coïncident avec les formules de théorie classique déduites de la loi de l'équipartition de l'énergie par degrés de liberté. Dans ces conditions $\Delta W_{vibr} \ll kT$ et l'on peut admettre que l'énergie de l'oscillateur varie de façon continue.

Aux basses températures ($T \ll T_c$)

$$U_{vibr} \approx \frac{N_A kT_c}{2} + N_A kT_c e^{-\frac{T_c}{T}},$$

$$C_{\mu V_{vibr}} \approx N_A k \left(\frac{T_c}{T}\right)^2 e^{-\frac{T_c}{T}},$$

c'est-à-dire U_{vibr} et $C_{\mu V_{vibr}}$ sont des fonctions complexes de la température et de la fréquence propre. Quand $T \to 0$,

$$U \to \frac{N_A kT_c}{2} = \frac{N_A h\nu}{2}.$$

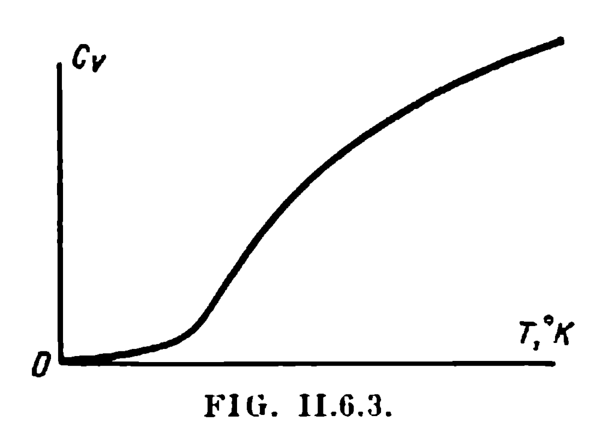


FIG. II.6.3.

L'énergie $\frac{N_A h\nu}{2}$ est appelée point zéro de vibrations du système (p. 749). Quand $T \to 0$, $C_{\mu V_{vibr}} \to 0$ en vertu du principe de Nernst (p. 209). La dépendance entre la capacité calorifique vibratoire des gaz diatomiques et la température est représentée fig. II.6.3.

9° L'apport du mouvement de rotation des molécules diatomiques en énergie interne et capacité calorifique d'une mole est:

$$U_{rot} = N_A k T^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln \sum_{J=0}^{\infty} (2J+1) e^{-\frac{T'_c J(J+1)}{T}},$$

où $T'_c = h^2/8\pi^2 kI$ est la *température caractéristique de la rotation.*

Quand $T \gg T'_c$,

$$U_{rot} \approx N_A k T \left(1 - \frac{h^2}{24\pi^2 IkT}\right),$$

$$C_{\mu V_{rot}} \approx N_A k,$$

ce qui signifie qu'à une température élevée la capacité calorifique de rotation a une valeur classique.

Quand $T \ll T'_c$,

$$U_{rot} = N_A k T^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln \left(1 + 3e^{-\frac{h^2}{4\pi^2 IkT}}\right) \approx \frac{3\,h^2 N_A}{4\pi^2 I} e^{-\frac{h^2}{4\pi^2 IkT}},$$

$$C_{\mu V_{rot}} \approx 3 \left(\frac{h^2}{4\pi^2 I}\right)^2 \frac{N_A}{kT^2} e^{-\frac{h^2}{4\pi^2 IkT}},$$

autrement dit, $C_{\mu V_{rot}} \to 0$ quand $T \to 0$.

L'allure générale de la variation, avec la température, de la capacité calorifique liée à la rotation de la molécule, est la même que celle de la capacité calorifique vibratoire (fig. II.6.3). Toutefois les valeurs de T_c et de T'_c sont nettement différentes.

Températures caractéristiques de la vibration (T_v) et de la rotation (T'_c) de quelques molécules

Molécule	T_v, °K	T'_c, °K	Molécule	T_v, °K	T'_c, °K
H_2 N_2 O_2	6 000 3 340 2 230	85,4 2,85 2,07	HCl HJ	4 140 3 200	15,1 9,0

10. Sens statistique du deuxième principe de la thermodynamique

1° Le deuxième principe de la thermodynamique affirme l'impossibilité de la décroissance de l'entropie d'un système isolé (p. 187). On prête à ce principe, à l'aide de la *formule de Boltzmann*, une certaine interprétation statistique:

$$S = k \ln P + \text{const},$$

où S est l'entropie du système, k la constante de Boltzmann, P la probabilité thermodynamique d'état.

2° On appelle *probabilité thermodynamique d'état* le nombre de microétats d'un système correspondant à un état macroscopique donné (p. 230). La grandeur P pour un système chimiquement homogène montre par combien de façons peut être réalisée la distribution quantitative donnée des particules entre cellules de l'espace des phases indépendamment de la cellule qu'occupe telle ou telle particule concrète. Par définition $P \geqslant 1$. D'après la formule de Boltzmann, la probabilité thermodynamique d'état d'un système isolé ne peut décroître, quelles que soient les transformations se déroulant dans ce système:

$$\Delta P = P_2 - P_1 \geqslant 0,$$

où P_1 et P_2 sont les probabilités thermodynamiques de deux états successifs du système. Dans le cas d'une transformation réversible (p. 174) $\Delta P = 0$, $P = \text{const}$. Dans le cas d'une transformation irréversible (p. 174) $\Delta P > 0$, et P croît. La transformation est irréversible si elle conduit le système d'un état moins probable à un état plus probable.

3° Etant une loi statistique, le deuxième principe de la thermodynamique exprime les lois du mouvement chaotique d'un grand nombre de particules entrant dans la composition d'un système isolé. On observe dans les systèmes ou parties de systèmes consti-

tués d'un nombre relativement petit de particules des fluctuations considérables, représentant des écarts au deuxième principe de la thermodynamique. Le deuxième principe de la thermodynamique est inapplicable également aux systèmes constitués d'un nombre infini de particules, tous les états d'un tel système étant équiprobables.

11. Fluctuations

1° On appelle *fluctuation* d'une grandeur physique L, caractérisant le système, l'écart de la valeur réelle L de sa valeur moyenne $\bar{L}$ conditionné par l'agitation thermique chaotique des particules du système. Le carré moyen de la différence $\Delta L = L - \bar{L}$, appelé *fluctuation quadratique*, représente la mesure de la fluctuation:

$$\overline{(\Delta L)^2} = \overline{(L - \bar{L})^2}.$$

Par définition

$$\overline{(\Delta L)^2} = \overline{L^2 - 2L\bar{L} + (\bar{L})^2} = \overline{L^2} - 2\bar{L}\bar{L} + (\bar{L})^2 = \overline{L^2} - (\bar{L})^2 \geqslant 0.$$

Si les fluctuations de la grandeur L sont petites, les grands écarts de L par rapport à $\bar{L}$ sont peu probables. La petitesse de $\overline{(\Delta L)^2}$ signifie que la valeur L est proche de $\bar{L}$.

La fluctuation quadratique de la somme de N grandeurs indépendantes $L_1, \ldots, L_N$ est égale à la somme des fluctuations quadratiques de ces grandeurs:

$$\overline{\left[\Delta\left(\sum_{k=1}^{N} L_k\right)\right]^2} = \sum_{k=1}^{N} \overline{(\Delta L_k)^2}.$$

Dans ce cas, pour deux grandeurs indépendantes L_i et L_j

$$\overline{(\Delta L_i)(\Delta L_j)} = 0.$$

2° L'erreur relative introduite avec la substitution à L de sa valeur moyenne $\bar{L}$ s'évalue par la valeur de la *fluctuation relative:*

$$\delta_L = \frac{\sqrt{\overline{(\Delta L)^2}}}{\bar{L}}.$$

Si le système comprend N parties indépendantes, la fluctuation relative de n'importe quelle fonction additive d'état L du système est inversement proportionnelle à la racine carrée du nombre de ses parties:

$$\delta_L \sim \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

3° Si l'état du système macroscopique est caractérisé par un certain paramètre λ, la probabilité de petites fluctuations, au cours desquelles le paramètre peut varier dans l'intervalle entre λ et $\lambda +$ $+ d\lambda$, s'exprime par la *distribution de Gauss*:

$$dw = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta^2}} e^{-\frac{(\lambda - \lambda_0)^2}{2\Delta^2}} d\lambda,$$

où λ_0 est la valeur équilibrée du paramètre λ, Δ^2 la fluctuation quadratique de λ : $\Delta^2 = \overline{(\Delta\lambda)^2} = \overline{(\lambda - \lambda_0)^2}$. La probabilité d'une fluctuation donnée décroît de façon exponentielle avec l'augmentation de sa valeur, ainsi qu'avec la diminution de Δ^2.

4° La mesure quantitative de la probabilité de petites fluctuations $\Delta\lambda$ de la grandeur λ dans un système macroscopique est le travail ΔA qu'il faut effectuer sur le système pour que le paramètre λ varie d'une valeur $\Delta\lambda$. Toutefois, les fluctuations sont possibles également en l'absence de travail extérieur réel (dans un système fermé par exemple). On peut représenter la grandeur ΔA sous forme de variation de l'énergie potentielle du système lors de son déplacement dans un certain champ de forces imaginaire (parfois réel aussi).

EXEMPLE 1. Petites fluctuations isothermes du volume V et de la densité ρ. La fluctuation quadratique de volume est:

$$\overline{(\Delta V)^2} = \overline{(V - V_0)^2} = \frac{kT}{\left|\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T\right|},$$

où T est la température du système. La probabilité de fluctuations isothermes de volume est alors:

$$dw = \frac{1}{\sqrt{2\pi\overline{(\Delta V)^2}}} e^{-\frac{(V - V_0)^2}{2\overline{(\Delta V)^2}}} dV.$$

Les proportions et la probabilité de fluctuations de volume augmentent avec l'élévation de température, ainsi qu'avec l'augmentation de la compressibilité isotherme $\beta = -\frac{1}{v_0}\left(\frac{\partial v_0}{\partial p}\right)_T$, où v_0 est le volume spécifique. La compressibilité isotherme doit être positive. Dans le cas contraire, la probabilité de fluctuation de volume aurait augmenté avec ses proportions, et par suite des fluctuations le volume du système ou bien augmenterait indéfiniment ou bien diminuerait jusqu'à zéro.

La condition de stabilité des états d'une substance homogène soumise à des fluctuations de volume est la suivante:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T < 0.$$

En particulier, pour un gaz parfait:

$$\overline{\Delta V^2} = \frac{kT}{\left|\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T\right|} = \frac{V^2 kT}{NkT} = \frac{V^2}{N}.$$

La fluctuation quadratique de la densité $\rho = \frac{1}{v_0} = \frac{m}{V}$ (m est la masse renfermée dans le volume V dans lequel a lieu la fluctuation):

$$\overline{(\Delta \rho)^2} = \frac{\rho^2}{V} kT\beta.$$

La fluctuation relative de densité dans le volume V est:

$$\delta_\rho = \sqrt{\frac{kT\beta}{V}}.$$

La fluctuation quadratique du nombre de particules N se trouvant dans le volume donné V est:

$$(\overline{\Delta N^2}) = \frac{N^2 kT}{V^2} \frac{1}{\left|\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T\right|}.$$

En particulier, pour un gaz parfait:

$$\overline{(\Delta N)^2} = N.$$

Quant à la diffusion de la lumière sur les fluctuations de densité cf. p. 712.

EXEMPLE 2. Petites fluctuations isochores de température. La fluctuation quadratique de température est:

$$\overline{(\Delta T)^2} = \overline{(T - T_0)^2} = \frac{kT_0^2}{C_V},$$

où T_0 est la valeur équilibrée de la température, C_V la capacité calorifique du système à volume constant. La probabilité pour que la température subisse une fluctuation est:

$$dw = \frac{1}{\sqrt{2\pi\overline{(\Delta T)^2}}} e^{-\frac{(T-T_0)^2}{2\overline{(\Delta T)^2}}} dT.$$

$C_V > 0$, puisque la probabilité de fluctuations de température diminue avec l'augmentation des valeurs celles-ci. Cette condition découle non seulement de la théorie des fluctuations, mais aussi des considérations générales de la thermodynamique: lorsque $C_V < 0$, on aurait pu réchauffer le corps en lui empruntant de la chaleur, ce qui contredit le deuxième principe de la thermodynamique.

12. Influence des fluctuations sur la sensibilité des appareils de mesure

1° Les appareils modernes de grande sensibilité mesurent des grandeurs de même ordre que les fluctuations conditionnées par l'agitation thermique des molécules dans l'appareil et dans le milieu extérieur. Lors d'une mesure unique d'une certaine grandeur physique dont les valeurs sont plus petites que les écarts fortuits des lectures de l'instrument lui-même dus aux fluctuations, l'appareil donne un résultat faux des mesures. L'appareil enregistre dans ce cas le fond, résultat de l'agitation thermique, et non la grandeur à mesurer. Ceci détermine la *limite de sensibilité* d'un appareil de construction donnée lors d'une mesure unique.

2° *Méthode de lecture au miroir* (petit miroir suspendu à un fin fil de quartz). On détermine la limite de sensibilité par le fait que le plus petit angle de rotation du fil, qui peut être mesuré, doit dépasser les angles de rotation φ dus aux oscillations accidentelles du miroir provoquées par l'agitation thermique des molécules du milieu. L'angle quadratique moyen d'écart caractérisant la limite de sensibilité d'un fil de rayon r et de longueur l est:

$$\overline{\varphi^2} = \frac{kT}{a},$$

où $a = \frac{\pi^2 r^4 G}{2l}$, G est le module de rigidité du matériau dont le fil est fait. A $T = 300$ °K, pour un fil de quartz très fin ($a = 10^{-6}$ erg), $\sqrt{\overline{\varphi^2}} = 2 \cdot 10^{-4}$ rd.

3° *Balance à ressort.* La mesure d'une masse m à l'aide d'une balance à ressort n'est possible que dans le cas où la traction du ressort Δx conditionnée par cette masse est plus grande que la fluctuation de longueur du ressort $\sqrt{\overline{(\Delta x)^2}}$, engendrée par les fluctuations de pression de l'air environnant et par l'agitation thermique:

$$\sqrt{\overline{(\Delta x)^2}} = \sqrt{\frac{kT}{a}},$$

où a est le coefficient d'élasticité du ressort. La masse minimale m, qui peut être déterminée lors d'une mesure unique, est:

$$m = \frac{\sqrt{kTa}}{g},$$

où g est l'accélération de la pesanteur.

4° Le *thermomètre à gaz*, rempli de gaz parfait, permet de mesurer des températures plus grandes que les fluctuations de température du gaz lui-même. Les petites variations de température d'un gaz parfait sont (p. 157):

$$\Delta T = \frac{p\Delta V}{Nk} = \frac{T}{V}\Delta V.$$

Les petites variations de volume par suite de ses fluctuations sont:

$$\Delta V = \sqrt{\overline{(\Delta V)^2}} = \sqrt{\frac{kT}{\left(-\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T}} = \frac{V}{\sqrt{N}}\cdot$$

Les fluctuations de température sont:

$$\Delta T = \sqrt{\overline{(\Delta T)^2}} = \frac{T}{\sqrt{N}}\cdot$$

Le thermomètre à gaz ne permet pas de mesurer des températures supérieures à ΔT. Si le thermomètre contient une mole de gaz ($N = N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$), on a:

$$\Delta T \approx \frac{T}{\sqrt{N_A}}\cdot$$

Les variations de température qui peuvent être mésurées en réalité dépassent de beaucoup cette valeur.

13. Fluctuations électriques dans l'appareillage de radio

1° Les effets de fluctuation indépendants observés dans les appareils radio en l'absence de brouillage extérieur créent un *bruit de fond*, qui limite la sensibilité des appareils radio; le signal à recevoir doit dépasser le fond du poste récepteur.

2° L'*effet de grenaille* est la fluctuation du courant anodique d'un tube électronique conditionnée par les fluctuations du nombre

d'électrons sortant de la cathode. La fluctuation quadratique de courant sert de mesure à l'effet de grenaille:

$$\overline{(\Delta I)^2} = \frac{eI_0}{t},$$

où e est la charge de l'électron, I_0 le courant moyen au cours du temps t de mesure; d'après la condition admise lors de la déduction de la formule, t est beaucoup plus grand que la durée τ de parcours de l'électron dans le tube. Les fluctuations de courant anodique dans un tube branché dans un circuit oscillant engendrent des fluctuations de courant et de tension dans le circuit. La fluctuation quadratique de tension dans le circuit est:

$$\sqrt{\overline{(\Delta U)^2}} = \sqrt{\frac{QI_0 e}{\omega C^2}},$$

où ω est la pulsation des oscillations libres dans le circuit (p. 505), $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ le facteur de qualité du circuit (p. 512), R, L et C la résistance ohmique, l'inductance et la capacité du circuit.

3° L'agitation thermique des électrons à l'intérieur des conducteurs s'accompagne de transfert de charge et d'apparition dans le circuit d'une *force électromotrice de fluctuation* et d'un *courant de fluctuation* variant de façon désordonnée en valeur et en direction. La f.é.m. est déterminée par la *formule de Nyquist*:

$$\mathcal{E}^2(\nu) = 4kTR(\nu),$$

où $\mathcal{E}(\nu)$ est la f.é.m. de fluctuation rapportée à une bande unité de fréquence, $R(\nu)$ la résistance correspondante.

Habituellement, l'effet de grenaille (effet Schottky) conduit à de plus grandes fluctuations de courant que celles dues à l'agitation thermique des électrons. Néanmoins, l'effet de grenaille étant réduit, les fluctuations liées à l'agitation thermique des électrons deviennent les plus importantes et limitent la sensibilité des appareils radio.

14. Mouvement brownien

1° On appelle *mouvement brownien* le mouvement chaotique continu de petites particules suspendues dans un liquide ou un gaz. Le mouvement brownien se poursuit indéfiniment sans modifications évidentes quelconques; l'intensité du mouvement des particules browniennes dépend des dimensions et non de la nature des

particules; elle croît avec l'élévation de température et la diminution de viscosité du liquide ou du gaz. N'étant pas en réalité un mouvement moléculaire, le mouvement brownien sert de démonstration immédiate de l'existence des molécules et du caractère chaotique de leur agitation thermique.

2° Le mouvement brownien est dû aux fluctuations de pression exercée sur la surface d'une petite particule de la part des molécules du milieu. La force de pression variant en valeur et en direction, la particule est soumise à un mouvement chaotique.

3° La probabilité $w(r, t)\,dr$ pour qu'une particule brownienne, présente à l'instant initial $t = 0$ dans un milieu isotrope à l'origine des coordonnées, se trouve à l'instant t à la distance entre r et $r + dr$ de l'origine des coordonnées est:

$$w(r, t)\,dr = \frac{1}{2\sqrt{\pi D^3 t^3}}\, e^{-\frac{r^2}{4Dt}}\, r^2\, dr.$$

Le carré moyen de la distance $\bar{r}^2$, à laquelle se déplace la particule au cours du temps t, s'exprime par la *formule d'Einstein*:

$$\bar{r}^2 = 6Dt,$$

où D est le coefficient de diffusion de la particule.

Pour une particule sphérique de rayon a

$$D = \frac{kT}{6\pi\eta a},$$

où T est la température du milieu, η sa viscosité.

Entre le coefficient de diffusion D d'une particule brownienne et sa mobilité $u = \mathbf{v}/\mathbf{f}$, où $\mathbf{f}$ est la force extérieure constante agissant sur la particule, $\mathbf{v}$ la vitesse de cette particule, existe la dépendance suivante:

$$D = kTu.$$

4° Outre le mouvement brownien de translation il existe un mouvement brownien de rotation. Le déplacement d'une particule sphérique est caractérisé par l'angle de rotation θ (angle d'Euler, p. 29) décrit au cours du temps t. La valeur moyenne du carré de $\sin\theta$ s'exprime par la relation

$$\overline{\sin^2\theta} = \frac{2}{3}\left(1 - e^{-6Dt}\right)$$

où le coefficient de diffusion de rotation est :

$$D = kT/8\pi\eta a^3.$$

Pour de courtes durées du temps le carré moyen de θ s'exprime par une formule ressemblant à la formule d'Einstein pour un mouvement de translation :

$$\overline{\theta^2} = 4Dt.$$

Pour de longues durées du temps $\overline{\sin^2 \theta} = \frac{2}{3}$, ce qui correspond à l'équiprobabilité de toutes les orientations de la sphère.

CHAPITRE 7

Gaz réels et vapeurs

1. Equations d'état des gaz réels

1° On appelle *gaz réel* le gaz dans lequel existent des forces d'interaction intermoléculaires considérables. La *vapeur* est un gaz réel à l'état proche de celui de transformation en liquide. Pour décrire les propriétés des gaz réels, on utilise diverses équations d'état différant de l'équation de Clapeyron-Mendéléev.

2° L'*équation de Van der Waals* d'état d'un gaz réel ($V_0 = V_\mu$ est le volume d'une mole de gaz):

$$\left(p + \frac{a}{V_0^2}\right)(V_0 - b) = RT,$$

où a/V_0^2 est la *pression interne* conditionnée par les forces attractives s'exerçant entre les molécules, b la correction au *volume propre* des molécules tenant compte de l'influence des forces répulsives intermoléculaires et égale au volume quadruplé des molécules dans une mole de gaz:

$$b = N_A \cdot \frac{2}{3} \pi d^3,$$

où N_A est le nombre d'Avogadro, d le diamètre d'une molécule. La grandeur a est égale à

$$a = -2\pi N_A^2 \int^{\infty} W_P(r) r^2 \, dr.$$

où $W_p(r)$ est l'énergie potentielle d'attraction de deux molécules ($W_p < 0$). Les grandeurs a et b sont liées aux paramètres p_{cr}, $V_{0\,cr}$ et T_{cr} de l'état critique d'un gaz (p. 263) de la façon suivante:

$$b = \frac{1}{3} V_{0\,cr} \quad a = \frac{9}{8} RT_{cr} V_{0\,cr}$$

$$V_{0\,cr} = 3b, \quad p_{cr} = \frac{a}{27b^2}, \quad T_{cr} = \frac{8a}{27Rb}.$$

3° A l'aide des variables sans dimension

$$\pi = \frac{p}{p_{cr}}, \quad \varphi = \frac{V_0}{V_{0\,cr}}, \quad \tau = \frac{T}{T_{cr}},$$

appelées ***paramètres d'état réduits***, l'équation de Van der Waals se recopie sous la forme d'***équation d'état réduite:***

$$\left(\pi + \frac{3}{\varphi^2}\right)(3\varphi - 1) = 8\tau,$$

ne contenant pas de constantes caractérisant la substance.

Deux substances dont les états sont déterminés par les mêmes valeurs de deux paramètres réduits se trouvent dans des états correspondants ***(loi des états correspondants)***.

4° L'***équation d'état de Berthelot:***

$$\left(p + \frac{a}{TV_0^2}\right)(V_0 - b) = RT.$$

Les constantes a et b sont liées aux paramètres d'état critique p_{cr}, $V_{0\,cr}$ et T_{cr} (p. 263) par les relations:

$$a = \frac{27}{64} R^2 \frac{T_{cr}^3}{p_{cr}}, \quad b = \frac{1}{4} V_{0\,cr}$$

5° L'***équation d'état de Vukalovitch et Novikov:***

$$pV_0 = RT\left[1 + \frac{B_1(T)}{V_0} + \frac{B_2(T)}{V_0^2} + \dots\right],$$

où B_1, B_2, etc., sont les ***coefficients viriels***, le calcul desquels est assez laborieux. Il est effectué en tenant compte de l'***association des molécules*** ayant lieu sous l'influence des forces attractives de Van der Waals réunissant des molécules gazeuses en groupes (complexes).

6° L'*équation d'état de Mayer:*

$$pV_0 = RT\left[1 - \sum_{k \geqslant 1} \frac{k}{k+1} \frac{\beta_k N_A^k}{V_0^k}\right],$$

où

$$\beta_k = \frac{1}{k!V_0} \iint \ldots \int \sum_{k+1 \geqslant i > j \geqslant 1} \prod f_{ij}\, d\tau_1\, d\tau_2 \ldots d\tau_{k+1},$$

$$f_{ij} = e^{-\frac{W_{pij}}{kT}} - 1 \text{ et } d\tau_l = dq_{l_1} \ldots dq_{l_n},$$

W_{pij} est l'énergie potentielle mutuelle des i-ième et j-ième molécules interagissant d'après la loi des forces centrales, de sorte que W_{pij} dépend de la distance entre ces molécules, q_{l_1}, ..., q_{l_n} sont les coordonnées généralisées de la l-ième molécule possédant n degrés de liberté.

L'expression sous l'intégrale dans la formule de β_k représente la somme des produits f_{ij} de toutes les combinaisons possibles d'interactions dans un groupe de $k + 1$ molécules. Cette sommation s'étend à tous les produits contenant au moins deux fonctions f_{ij} identiques

2. Forces d'interaction intermoléculaires dans les gaz

1° Entre les molécules de n'importe quel gaz interviennent des *forces d'attraction* ou de *répulsion intermoléculaires*, qui sont de nature électromagnétique et quantique. Les forces d'attraction s'exerçant aux distances r entre les centres des molécules de l'ordre de 10^{-7} cm sont appelées *forces de Van der Waals*. Elles sont la cause de la correction imposée sur la pression interne dans l'équation d'état de Van der Waals et décroissent avec la distance $f \sim \frac{1}{r^7}$. Ceci correspond à une énergie potentielle variant suivant la loi $U \sim \frac{1}{r^6}$. On distingue trois sortes de forces de Van der Waals.

a) Les *forces d'orientation*, qui surgissent entre deux molécules ayant des moments dipolaires permanents p_e(p. 361), tendent à ordonner les molécules de manière que les vecteurs moments dipolaires s'orientent suivant une même droite. L'agitation ther-

mique des molécules en empêche. Aux températures élevées l'énergie potentielle d'orientation U_{or} est:

$$U_{or} = -\frac{p_e^4}{24\pi^2\varepsilon_0^2 kT}\frac{1}{r^6} \qquad \text{(en unités SI)},$$

où k est la constante de Boltzmann, T la température absolue, ε_0 la constante diélectrique (p. 357).

b) Les *forces d'induction*, qui interviennent entre les molécules ayant une polarisabilité élevée. Si les molécules sont suffisamment rapprochées, il apparaît sous l'influence du champ électrique d'une molécule dans une autre molécule un moment dipolaire induit $p_e = \varepsilon_0 \alpha E$, où α est la polarisabilité de la molécule, E le champ de la première molécule. L'énergie potentielle d'induction U_{ind} ne dépend pas de la température:

$$U_{ind} = -\frac{\alpha p_e^2}{8\pi^2\varepsilon_0^2}\cdot\frac{1}{r^6} \qquad \text{(en unités SI)}.$$

c) Les *forces de dispersion*, qui surgissent par suite de l'excitation des oscillations des électrons dans une molécule (atome) sous l'influence des oscillations des électrons dans une autre molécule (atome). Les oscillations des électrons de molécules voisines ont lieu avec la même phase et conduisent à l'attraction de deux molécules (atomes). La valeur des forces de dispersion est déterminée par le point zéro de l'énergie (p. 244) des molécules (atomes) si leurs oscillations peuvent être considérées comme celles d'oscillateurs harmoniques linéaires (p. 119). Dans cette approximation l'énergie potentielle de dispersion U_{disp} est:

$$U_{disp} = -\frac{e^4 h\nu_0}{32\pi^2\varepsilon_0^2 a^2}\cdot\frac{1}{r^6}, \qquad \text{(en unités SI)},$$

où h est la constante de Planck, e la charge de l'électron, $\nu_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{a}{m}}$ la fréquence d'oscillations des atomes-oscillateurs, a le coefficient d'élasticité.

L'énergie potentielle totale U des forces de Van der Waals est:

$$U = U_{or} + U_{ind} + U_{disp}.$$

Les forces d'orientation jouent le rôle principal dans le cas des molécules polaires, les forces de dispersion, dans celui des autres molécules. L'énergie d'attraction de Van der Waals est de l'ordre 0,1-1 kcal/mol. La plupart du temps les forces d'attraction de Van

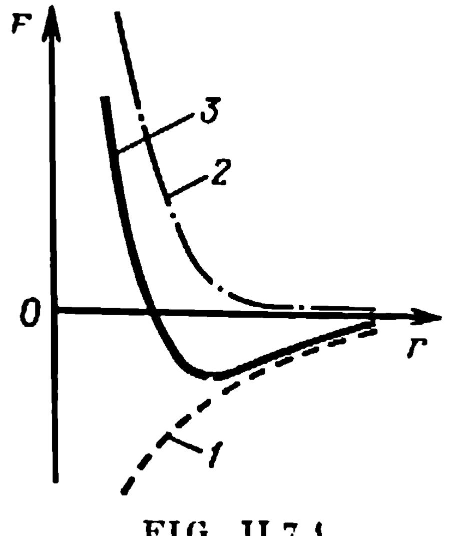


FIG. II.7.1.

der Waals sont dépassées de loin par les forces attractives de valence avec des énergies de l'ordre de 10-100 kcal/mol.

D'après le modèle simplifié des forces de Van der Waals, les molécules gazeuses, représentant des sphères absolument élastiques, s'attirent par des forces atteignant leur valeur maximale lors du contact immédiat de ces molécules. Les forces répulsives qui se manifestent à de plus petites distances sont remplacées par une force élastique qui est infiniment grande lors du contact des sphères. Dans ce modèle, à la distance intermoléculaire r égale au diamètre moléculaire, la pression interne dans le gaz atteint son maximum.

2° L'interaction intermoléculaire aux petites distances ne peut pas être exprimée par une puissance de r, elle est plus complexe. Aux distances entre les centres des molécules $r \leqslant 10^{-8}$ cm surgit une interaction quantique d'échange entre les atomes neutres, conduisant soit à une forte attraction (liaison chimique, p. 805), soit à l'apparition des forces de répulsion considérables.

3° Les forces répulsives décroissent avec l'augmentation de la distance entre les centres des molécules d'après la loi $f_{\text{rép}} \backsim 1/r^n$, où $n \geqslant 9$, c'est-à-dire beaucoup plus rapidement que les forces attractives. La dépendance de r des forces d'attraction (courbe 1), des forces de répulsion (courbe 2) et de la force d'interaction résultante (courbe 3) est représentée fig. II.7.1. Le domaine de l'espace dans lequel se manifestent essentiellement les forces d'interaction d'une molécule donnée avec d'autres particules est appelé *sphère de son action moléculaire.*

3. Etranglement des gaz. Effet Joule-Thomson

1° On appelle *étranglement* d'un gaz la décroissance de sa pression lors du passage adiabatique du gaz à travers un orifice étroit ou une paroi poreuse. Le processus d'étranglement est irréversible; il s'accompagne d'une croissance de l'entropie (p. 187). Lors de l'étranglement l'enthalpie (p. 163) du gaz ne varie pas aux états initial et final.

2° La variation de la température d'un gaz lors d'étranglement est appelée *effet Joule-Thomson*. L'effet différentiel Joule-Thomson se décrit par l'équation:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H = \frac{1}{C_p}\left[T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p - V\right]$$

et s'observe lors d'une chute de pression suffisamment petite entre p et $p + dp$. On distingue:

l'*effet négatif* Joule-Thomson $T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p - V < 0,\ dT > 0$;

l'*effet positif* $T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p - V > 0,\ dT < 0$.

Si $T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p - V = 0$, on a $dT = 0$, autrement dit, l'effet Joule-Thomson est absent. Dans les gaz parfaits l'effet Joule-Thomson fait toujours défaut.

La température à laquelle l'effet Joule-Thomson change de signe pour un gaz donné est appelée *température d'inversion* T_{inv}:

$$T_{\text{inv}} = V\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p.$$

3° L'*effet intégral* Joule-Thomson s'observe lors d'une chute finie de pression dans l'étrangleur.

L'équation de l'effet est la suivante:

$$\Delta T = -\frac{\Delta W_{\text{p}}}{C_{\text{V}}} - \frac{\Delta(pV)}{C_{\text{V}}},$$

où ΔW_{p} est la variation de l'énergie potentielle d'interaction des molécules gazeuses.

4. Isothermes des gaz réels. Vapeurs. Etat critique de la substance

1° On appelle *isotherme d'un gaz réel* la courbe exprimant la dépendance du volume molaire du gaz de la pression lors de transformation isotherme. Les isothermes expérimentales du gaz carbonique $T_1 < T < T_2 < T_{\text{cr}} < T_3 < T_4$) sont données fig. II.7.2.

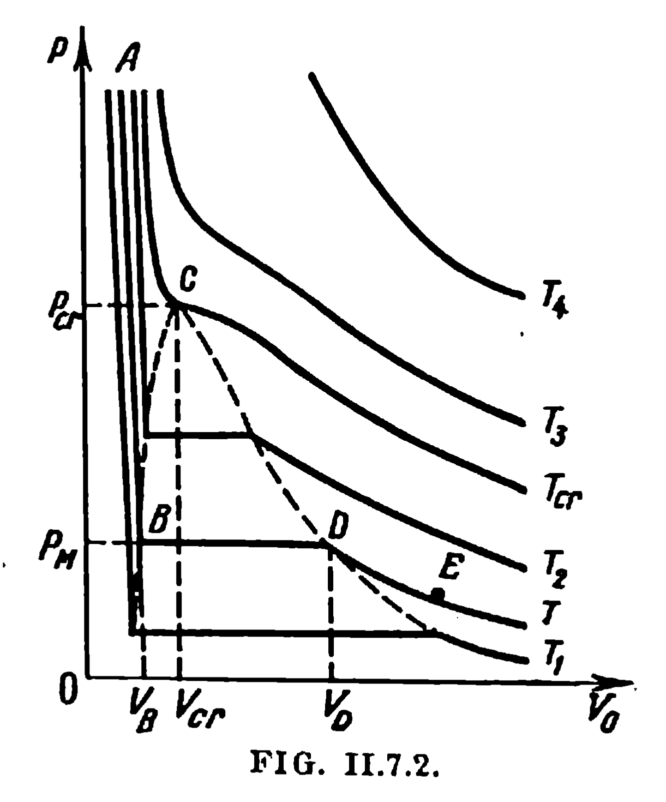


FIG. II.7.2.

2° Toute isotherme sous-critique ($T < T_{cr}$) représente la courbe de passage continu de la substance de l'état gazeux à l'état liquide. Quand $T > T_{cr}$ la substance se trouve à l'état gazeux. Le point E caractérise la *vapeur surchauffée*. La compression de cette vapeur conduit celle-ci au point D, c'est-à-dire à l'état de *vapeur saturée sèche* se trouvant en équilibre thermodynamique avec le liquide. La pression de la vapeur saturée sèche p_M dépend uniquement de la température et de la nature chimique de la vapeur. Elle s'accroît avec l'élévation de température. La vapeur surchauffée a une température plus élevée que celle de la vapeur saturée à la même pression. La différence de température de ces vapeurs est appelée *surchauffage de la vapeur*. La compression de la vapeur saturée sèche transforme celle-ci en *vapeur saturée humide:* état diphasé de la substance (mélange de liquide en ébullition et de vapeur saturée sèche). La quantité de vapeur saturée sèche dans 1 kg de vapeur saturée humide est appelée *sécheresse de la vapeur*. La quantité de liquide dans 1 kg de vapeur saturée humide est appelée *humidité de la vapeur*. La compression de la vapeur saturée humide la transforme en liquide. Le point B caractérise l'état de *liquide en ébullition*.

3° Le passage de la substance de l'état gazeux à l'état liquide est appelé *condensation de la vapeur*. La quantité de vapeur se condensant en 1 s par 1 cm² de surface du liquide est égale à (en $g \cdot cm^{-2} \cdot s^{-1}$):

$$M = 4{,}374 \cdot 10^{-5} p \sqrt{\frac{\mu}{T}},$$

où p est la pression du gaz en dyn/cm², μ le poids moléculaire de la substance, T la température absolue. Pour les vapeurs pures, qui ne sont pas en contact ni avec la phase liquide, ni avec les corps solides actifs à l'adsorption (p. 292), la condition nécessaire pour qu'il y ait condensation de la vapeur saturée et même *sursaturée* (dont la pression est $p > p_M$) est la présence de *centres de condensation* (ions gazeux, particules de poussière). Si les centres de condensation font défaut, la condensation de la vapeur commence aux endroits de tassements de la substance, revêtant le caractère de fluctuations de densité (p. 250).

4° A la température critique ($T = T_{cr}$) la différence des volumes molaires de la vapeur saturée sèche et du liquide devient nulle. Le palier de l'isotherme se change en point d'inflexion C *(point critique)*.

Au point critique

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_{T=T_{cr}} = 0, \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)_{T=T_{cr}} = 0.$$

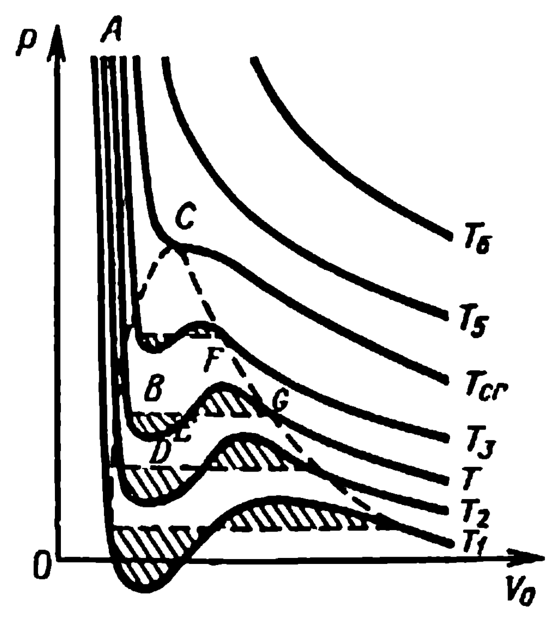


FIG. II.7.3.

Les valeurs de la pression p_{cr}, du volume molaire $V_{0\,cr}$ et de la température T_{cr} au point critique sont appelées *paramètres critiques* du gaz. Lorsque $T \to T_{cr}$, la différence entre les états liquide et gazeux s'efface, la chaleur spécifique de vaporisation et le coefficient de tension superficielle deviennent nuls. On observe, dans le voisinage du point critique, l'*opalescence critique*, c'est-à-dire la diffusion intense de la lumière dans la substance, engendrée par son hétérogénéité optique qui est liée aux fluctuations de densité et à l'augmentation de la compressibilité (cf. p. 710).

5° Les isothermes des gaz réels, construites d'après l'équation de Van der Waals (p. 256), ont dans le domaine de vapeur saturée une *boucle* (boucle $BDEFG$ sur la figure II.7.3) coupée par la droite horizontale BG, correspondant au processus normal de transition de phase, en deux parties de même aire *(règle de Maxwell)*. Les états métastables (p. 206) de la substance, caractérisés par les points de la courbe BD, sont appelés *liquide surchauffé*. La portion GF d'isotherme correspond à la vapeur sursaturée. La portion FED est pratiquement irréalisable.

5. Liquéfaction des gaz

1° *Liquéfaction des gaz:* transformation des gaz en liquides, est réalisée sous pression donnée par refroidissement au-dessous de la température d'ébullition (p. 273). Par diminution de volume ceci est atteint seulement dans les cas où la température du gaz est inférieure à la température critique. Pour liquéfier les gaz dont la température critique est au-dessous de 223° K (chlore, ammoniac, etc.), on les soumet à une compression dans le compresseur, suivie de condensation dans l'échangeur.

2° Par le *procédé de la cascade* l'ammoniac (T_{cr} = 405,5 °K) est transformé en liquide par compression isotherme et entre en

ébullition lorsqu'on abaisse la pression. La chaleur d'ébullition est enlevée d'un autre gaz satisfaisant à la condition: 405,5 °K > T_{cr} > T', où T' est la température d'ébullition de l'ammoniac. Cela conduit au refroidissement du second gaz jusqu'à une température inférieure à son T_{cr}, ce gaz se transforme par compression isotherme successive. On peut liquéfier par ce procédé à la troisième cascade et aux suivantes l'oxygène, l'azote, l'hydrogène (à la cinquième cascade) et l'hélium (à la sixième cascade).

3° Le procédé industriel de liquéfaction des gaz est basé sur l'utilisation de l'effet positif Joule-Thomson. Dans ce procédé, le gaz fortement comprimé et refroidi jusqu'à la température ambiante est soumis plusieurs fois à un étranglement adiabatique lors duquel il se refroidit jusqu'à ce que commence sa liquéfaction.

4° Les machines frigorifiques les plus parfaites et les plus productives sont les *détendeurs* (à pistons et à turbines), dans lesquels le gaz comprimé se détend adiabatiquement soit dans un cylindre avec piston, soit dans une turbine. Le refroidissement et la liquéfaction du gaz s'opèrent au compte d'un travail de détente.

CHAPITRE 8

Liquides

1. Propriétés générales et structure des liquides

1° On appelle *liquides* les corps qui ont un volume défini, mais n'ont pas d'*élasticité de forme* (le module de rigidité fait défaut, p. 296). Les liquides se distinguent par une forte interaction intermoléculaire et donc par une faible compressibilité. Leur faible compressibilité s'explique par le fait que même une faible diminution de la distance petite entre les molécules conduit à l'apparition des forces de répulsion considérables. Le coefficient de compressibilité (p. 196) des liquides varie dans les limites de $2 \cdot 10^{-6}$ à $2 \cdot 10^{-4}$ atm^{-1}.

2° Les liquides ordinaires sont isotropes, à l'exception des *cristaux liquides*, l'anisotropie desquels par rapport à toute une série de propriétés physiques est liée à la prépondérance d'une orientation définie de leurs molécules dans différents microvolumes.

3° On observe dans les liquides un ordre à petite distance: une disposition relative ordonnée (ou orientation mutuelle dans les cristaux liquides) des particules voisines du liquide à l'intérieur de microvolumes de celui-ci. La structure du liquide et ses propriétés physiques sont décrites par un système de *fonctions de distribution* des positions que' occupent des groupes de particules du liquide. La *fonction radiale de distribution* $G(r)$ est de la plus grande importance. Le nombre de particules se trouvant dans une couche de sphère d'épaisseur dr à la distance r d'une particule choisie arbitrairement (centrale) est:

$$dN = 4\pi n_0 G(r) r^2 dr,$$

où $n_0 = N/V$ est la concentration moyenne des particules.

La fonction radiale de distribution est déterminée des données de l'analyse aux rayons X (p. 649), ainsi que de l'étude par diffraction des électrons (p. 649) et des neutrons (p. 649).

Pour les *liquides simples* composés de molécules sphériques symétriques, on obtient, en supposant que l'interaction entre molécules ait lieu par couples et qu'elle soit réalisée par des forces centrales de potentiel $U(r)$, l'équation d'état:

$$\frac{pv}{kT} = 1 - \frac{2\pi}{3vkT}\int_0^\infty \frac{dU(r)}{dr} G(r) r^3 dr,$$

où p est la pression, v le volume moyen d'une particule du liquide, k la constante de Boltzmann, T la température absolue.

L'énergie moyenne $\bar{E}$ correspondant à une particule est:

$$\bar{E} = \frac{3}{2} kT + \frac{2\pi}{v}\int_0^\infty U(r) G(r) r^2 dr.$$

La forme explicite de la fonction $p = p(v, T)$ est déterminée à partir de la forme des fonctions $U(r)$ et $G(r)$ pour la recherche desquelles est élaborée toute une série de méthodes théoriques.

4° Les molécules du liquide effectuent des oscillations thermiques autour de leur position d'équilibre avec une fréquence moyenne $1/\tau_0$, proche des fréquences d'oscillation des atomes dans les cristaux, et avec une amplitude déterminée par le «volume libre» mis à la disposition d'une molécule par ses voisines. Le temps $\tau \gg \tau_0$ étant écoulé, ces positions d'équilibre se déplacent à une distance de l'ordre de 10^{-8} cm. Le temps moyen $\bar{\tau}$ (pour l'ensemble d'un grand nombre de molécules) appelé *temps de relaxation* est le temps caractérisant le déplacement des particules du liquide à une distance δ, égale en ordre de la grandeur à la distance moyenne entre molécules voisines:

$$\bar{\delta} \sim \sqrt[3]{\frac{1}{n_0}} = \sqrt[3]{\frac{\mu}{N_A \rho}},$$

où μ est le poids moléculaire, ρ la densité du liquide, N_A le nombre d'Avogadro. Pour l'eau $\bar{\delta} \sim 3 \cdot 10^{-8}$ cm.

Ces déplacements ont lieu de façon discontinue, sous forme de sauts activés en franchissant la barrière de potentiel de hauteur W (*énergie d'activation*). L'énergie W est conditionnée par le lien de la molécule avec les particules voisines. La durée $\bar{\tau}$ de «vie sédentaire»

de la molécule à la position temporaire d'équilibre diminue avec l'élévation de température d'après la loi:

$$\bar{\tau} \backsim e^{\frac{W}{kt}},$$

où k est la constante de Boltzmann.

Le temps $\bar{\tau}$ détermine la vitesse moyenne $\bar{v}$ de l'agitation thermique des molécules dans un fluide:

$$\bar{v} = \frac{\bar{\delta}}{\bar{\tau}}.$$

5° Les notions existant sur le caractère de l'agitation thermique des molécules d'un liquide (4°) expliquent la propriété fondamentale du liquide, sa *fluidité*. La force extérieure constante F, agissant sur le liquide, conduit à la prépondérance des sauts des particules suivant la direction d'action de la force, autrement dit, à la fluidité. Comme mesure de la fluidité du liquide sert la grandeur $1/\eta$, où η est le coefficient de viscosité. Si la force extérieure F est variable, mais sa période $T \gg \bar{\tau}$, il surgit comme auparavant un flux de particules du liquide et sa fluidité. Si $T \ll \bar{\tau}$, le mécanisme de fluidité n'a pas assez de temps pour se manifester et le liquide subit des déformations élastiques non seulement de type traction-compression mais aussi des cisaillements (p. 296) liés aux contraintes tangentielles existant dans le liquide.

6° Toute une série de faits témoignent de la ressemblance des liquides aux solides. L'analyse aux rayons X montre que la disposition des particules dans les liquides à des températures proches de la température de cristallisation n'est pas chaotique. Les images radiographiques des liquides à des températures peu élevées ressemblent aux images radiographiques des polycristaux. On peut considérer un liquide comme un corps constitué d'un très grand nombre de cristaux de dimensions submicroscopiques orientés de façon désordonnée. Dans les limites de chacun de ces éléments la disposition relative des particules conserve une régularité suffisante.

7° Beaucoup de propriétés physiques des liquides diffèrent peu des propriétés des solides. Ainsi, les corps cristallins possèdent une petite fluidité, qui se manifeste dans leur déformation plastique. Lors de la fusion des solides l'augmentation relative de leurs volumes est insignifiante (~ 10 %). Aussi les distances entre les particules du liquide formé ne varient-elles presque pas en comparaison des distances entre les particules du solide, et la disposition des particules des liquides rappelle celle des particules des solides. La comparaison des chaleurs de fusion et de vaporisation montre que la chaleur de vaporisation est 30-40 fois plus grande que la chaleur

de fusion. Ceci aussi témoigne de la petitesse des variations des distances entre les particules de la substance lors de son passage de l'état cristallin à l'état liquide. La capacité calorifique des corps ne varie presque pas lors de leur fusion.

8° Les liquides sont *non associés* et *associés*. Les premiers se distinguent par de petites valeurs de perméabilité relative ε (p. 357) ne dépendant pas de la température; les moments dipolaires de leurs molécules (p. 377) sont nuls (hexane, benzène, etc.). Les seconds jouissent d'une polarisation élevée; leurs molécules ont $p_e \neq 0$, et ε dépend de la température (eau, alcools, etc.). Des complexes d'un grand nombre de molécules se forment dans les liquides associés. La valeur de ε pour les liquides varie de 2 (hydrocarbures non polaires) à 81 (eau).

9° Dans les liquides lorsque l'homogénéité spatiale de la densité, de la température ou de la vitesse du mouvement ordonné est compromise, surgissent des phénomènes de transfert (p. 219) obéissant aux mêmes équations différentielles que les phénomènes de transfert dans les gaz. Néanmoins, les expressions des coefficients de transfert pour les gaz sont inapplicables aux liquides.

Aux températures élevées proches de la température critique, l'apparition de frottement interne dans les liquides est liée au transport d'impulsions par les molécules. Aux températures proches de la température de fusion (de solidification), l'impulsion d'une molécule isolée oscille conformément aux oscillations des particules autour de leur position temporaire d'équilibre. Aux basses températures la viscosité des liquides varie d'après la loi:

$$\eta \backsim T e^{\frac{W}{kT}},$$

où W est l'énergie d'activation (p. 266); η décroît rapidement avec l'élévation de T, alors que pour les gaz η croît proportionnellement à $\sqrt{T}$. Sous fortes pressions la viscosité des liquides augmente rapidement avec l'élévation de pression. Ceci est lié à la croissance de l'énergie d'activation et à l'augmentation correspondante du temps de relaxation (p. 266).

10° Dans un liquide chimiquement homogène le coefficient de diffusion D croît de façon brusque avec la température d'après la loi:

$$D \backsim \frac{d^2}{6\tau_0} e^{-\frac{W}{kT}},$$

où d est la distance moyenne entre les molécules dans le liquide, τ_0 la période moyenne d'oscillation d'une molécule autour de sa posi-

tion d'équilibre. La croissance de D avec l'élévation de T s'explique principalement par une diminution brusque du temps de relaxation τ et une certaine augmentation de d. Aux températures proches de la température critique, les coefficients de diffusion dans les liquides se rapprochent des coefficients de diffusion dans les gaz (p. 223).

2. Propriétés de la couche superficielle du liquide

1° Sur la surface de séparation de deux phases (liquide et vapeur saturée, deux liquides non miscibles complètement, liquide et solide), il apparaît, par suite de la différence d'interaction intermoléculaire des phases en contact, une résultante des forces par cm² de couche superficielle, qui est dirigée vers l'intérieur de l'une de ces phases. En particulier, sur l'interface liquide-vapeur cette force est dirigée vers l'intérieur du liquide.

2° Pour transférer les molécules de l'intérieur de la phase dans la couche superficielle, on doit effectuer un travail allant sur l'augmentation de l'*énergie superficielle*, c'est-à-dire sur la création d'un excédent d'énergie des particules de la couche superficielle comparativement à leurs énergies à l'intérieur du volume restant de la phase.

Pour l'expansion isotherme de la couche superficielle du liquide au compte des molécules se trouvant à l'intérieur du volume on doit effectuer un travail allant sur l'augmentation de l'énergie superficielle du liquide:

$$A = \overline{(F_S - F_V)}N,$$

où $\overline{F_S - F_V}$ est la différence moyenne entre l'énergie libre sur la surface F_S et dans le volume F_V (rapportée à une molécule), N le nombre de molécules dans la couche superficielle du liquide.

3° Le travail allant sur la formation isotherme de 1 cm² de surface (énergie superficielle libre spécifique) est appelé *tension superficielle* σ d'un liquide donné sur la limite de séparation avec une autre phase:

$$\sigma = \frac{A}{S} = \overline{(F_S - F_V)}\,\frac{N}{S} = \overline{(F_S - F_V)}n_1,$$

où $n_1 = N/S$ est le nombre de molécules par cm² de couche superficielle. La tension superficielle s'exprime également par la formule

$$\sigma = \frac{\Delta F}{\Delta S},$$

où ΔF est la variation de l'énergie superficielle libre, ΔS la variation de l'aire de la couche superficielle. A la limite de séparation du liquide et de sa vapeur, σ varie dans les limites de 15 erg/cm² (hydrocarbures) à 2 000 erg/cm² (métaux en fusion). Avec l'élévation de température et de son rapprochement de la température critique s'effacent les différences entre le liquide et sa vapeur saturée. A proximité de la température critique quand $T \to T_{cr}$, $\sigma \to 0$. Loin de T_{cr} la grandeur σ décroît linéairement avec l'élévation de température. La baisse de tension superficielle est atteinte par addition au liquide de *corps tensio-actifs*, s'adsorbant sur les interfaces et faisant baisser l'énergie superficielle libre (savons, acides gras, p. 293).

4° Si la surface du liquide est limitée par un périmètre de mouillage, la grandeur σ est égale à la force agissant sur l'unité du périmètre de mouillage et dirigée normalement à cette surface. Cette force est située dans le plan tangent à la surface libre du liquide.

5° La condition d'équilibre stable des liquides est le *minimum de l'énergie superficielle libre.* En l'absence de forces extérieures, le liquide a une aire de surface minimale (pour le volume donné) et accepte une forme sphérique.

3. Mouillage. Capillarité

1° On observe à la surface de séparation de trois phases (1 — liquide, 2 — gaz, 3 — solide) des phénomènes que l'on appelle *mouillage* (fig. II.8.1). La surface libre du liquide est incurvée près de la surface solide et s'appelle *ménisque.* La ligne suivant laquelle le ménisque coupe le solide est le *périmètre de mouillage.* Les phénomènes de mouillage sont caractérisés par l'*angle de raccordement* θ entre la surface mouillée du solide et le ménisque aux points de leur intersection (périmètre de mouillage).

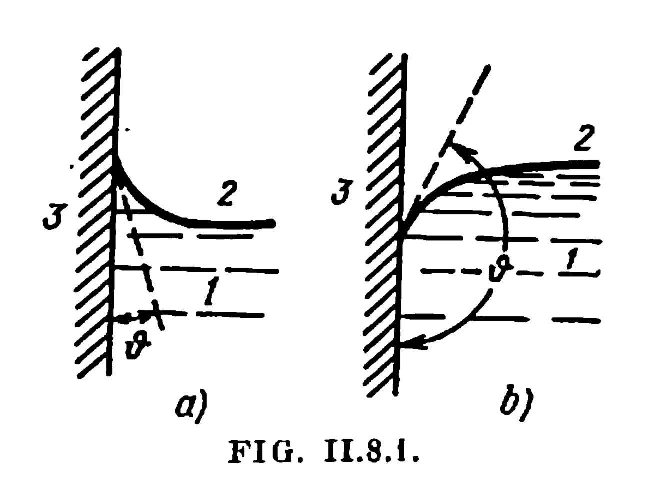


FIG. II.8.1.

2° La grandeur $\cos\theta$, considérée comme mesure de mouillage, est déterminée par l'équation

$$\cos\theta = \frac{\sigma_{23} - \sigma_{13}}{\sigma_{12}},$$

où σ_{ik} sont les tensions superficielles sur les trois interfaces. Si $\sigma_{23} > \sigma_{13}$, on a $\theta < \pi/2$; le liquide a un ménisque convexe et mouille

le solide (fig. II.8.1, *a*), la surface de celui-ci est appelée ***hydrophile*** (carbonates, silicates, sulfates, quartz). Si $\sigma_{23} < \sigma_{13}$, on a $\theta > \pi/2$; le liquide a un ménisque convexe et ne mouille pas le solide (fig.II. 8.1,*b*), la surface de ce dernier est appelée ***hydrophobe*** (métaux purs, sulfures, graphite). Si $\sigma_{23} - \sigma_{13} \to \sigma_{12}$, on a $\theta \to 0$, autrement dit, le ménisque est tangent à la surface du solide ***(mouillage parfait)***. Dans ce cas les forces intermoléculaires, agissant sur une particule de la couche superficielle, sont entièrement compensées et l'énergie superficielle libre de cette couche a une valeur minimale. Si $\sigma_{23} \to \sigma_{13}$, on a $\theta \to \pi/2$; le liquide a une surface libre plane. Ce cas est appelé ***absence de mouillage et non mouillage.***

3° La déformation de la couche superficielle conduit à l'apparition d'une pression complémentaire sur le liquide, qui dépend de la tension superficielle σ et de la courbure de la surface. En vertu de la *loi de Laplace*, pour une courbure de surface moyenne

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

déterminée par les rayons de courbure R_1 et R_2, la pression sous la surface incurvée du liquide est:

$$p_M = p_{0M} + \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

où p_{0M} est la pression dans le cas d'une surface plane du liquide, $p_{RM} = \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = 2\sigma H$ est la pression complémentaire dépendant de la courbure; $p_{RM} > 0$ si le ménisque est convexe, $p_{RM} < 0$ si le ménisque est concave. Si le ménisque a la forme d'une surface cylindrique, on a $R_1 = R$, $R_2 = \infty$ et

$$p_{RM} = \frac{\sigma}{R}.$$

Pour une surface sphérique, $R_1 = R_2 = R$,

$$p_{RM} = \frac{2\sigma}{R}.$$

La pression complémentaire à l'intérieur d'une bulle de rayon R est engendrée par les deux surfaces de la pellicule: $p_{RM} = \frac{4\sigma}{R}$.

4° Dans des tubes cylindriques étroits *(capillaires)* de rayon r le niveau du liquide mouillant (non mouillant) est plus haut (bas) que dans un large vase communiquant avec ceux-ci d'une grandeur

$$h = \frac{2\sigma \cos\theta}{r\rho g}$$

(formule de Jurin), où ρ est la densité du liquide, g l'accélération de la pesanteur; θ l'angle de raccordement.

Si le tube capillaire a la forme d'une ouverture étroite d'épaisseur constante δ, le ménisque du liquide représente une surface cylindrique de rayon $\delta/2$ dont la hauteur d'ascension (du liquide mouillant) ou de dépression (du liquide non mouillant) dans le tube capillaire est égale à

$$h = \frac{2\sigma \cos\theta}{\delta\rho g}.$$

5° La pression de la vapeur saturée (p. 261) au-dessus de la surface incurvée du liquide dépend de la forme du ménisque. Dans le cas d'une surface concave (convexe) elle est plus petite (plus grande) que celle exercée au-dessus d'une surface plane d'une grandeur

$$\Delta p_M = \frac{\rho}{\rho_1 - \rho} p_{RM},$$

où ρ est la densité de la vapeur saturée, ρ_1 la densité du liquide, p_{RM} la pression complémentaire due à la courbure de la surface.

4. Evaporation et ébullition des liquides

1° On appelle *évaporation* le processus de vaporisation qui se produit à la surface libre du liquide. L'évaporation a lieu à n'importe quelle température et augmente avec l'élévation de celle-ci. L'évaporation consiste en la fuite des molécules possédant la vitesse et l'énergie cinétique les plus grandes à partir de la couche superficielle du liquide, ce qui entraîne son refroidissement. La vitesse d'évaporation u, autrement dit la quantité de liquide se transformant en vapeur en 1 s, dépend de la pression extérieure et du mouvement de la phase gazeuse au-dessus de la surface libre du liquide:

$$u = \frac{CS}{p_0}(p_V - p),$$

où C est une constante, S l'aire de la surface libre du liquide, p_V la pression de la vapeur saturée, p la pression de la vapeur de liquide au-dessus de sa surface libre, p_0 la pression atmosphérique.

2° On appelle *ébullition* le processus de vaporisation intense qui se produit non seulement à la surface libre du liquide mais aussi dans tout le volume du liquide par création des bulles d'air. La pression p à l'intérieur d'une bulle est déterminée par la formule

$$p = p_0 + \rho g h + p_{RM},$$

où p_0 est la pression atmosphérique, $\rho g h$ la pression hydrostatique des couches supérieures du liquide, $p_{RM} = 2\sigma/r$ la pression complémentaire due à la courbure, r le rayon d'une bulle de vapeur, h la distance du centre de la bulle à la surface du liquide; ρ et σ la densité et la tension superficielle du liquide.

3° L'ébullition du liquide commence à une température telle que

$$p_v \geqslant p_0 + \rho g h + \frac{2\sigma}{r},$$

où p_v est l'élasticité (la pression) de la vapeur saturée à l'intérieur de la bulle (cf. les notations 2°).

Pour de petits r la pression p_v est suffisamment grande et l'ébullition des liquides a lieu à des températures relativement élevées. S'il y a des centres de vaporisation (particules de poussière, bulles de gaz dissous et de vapeur) dans le liquide, on a habituellement $p_{RM} \ll p_0$ et l'ébullition commence à des températures plus basses. Si $\rho g h \ll p_0$ la condition approximative d'ébullition est:

$$p_v \approx p_0.$$

La température du liquide à laquelle la pression de sa vapeur saturée est égale à la pression extérieure est appelée *température* ou *point d'ébullition.*

4° Si l'ébullition d'un liquide a lieu à pression constante p_0, sa température reste constante. La chaleur fournie au liquide est dépensée uniquement sur la vaporisation. La chaleur $r_{\text{éb}}$ indispensable pour l'évaporation d'une unité de masse de liquide réchauffé jusqu'à la température d'ébullition est appelée *chaleur spécifique de vaporisation (chaleur latente d'ébullition).*

La variation de l'énergie interne du liquide lors de la transformation d'une unité de sa masse en vapeur à la température d'ébullition est appelée *chaleur spécifique interne de vaporisation.* La chaleur spécifique de vaporisation décroît avec l'élévation de température d'ébullition et devient nulle à la température critique (p. 262).

5° L'ébullition du liquide et la condensation de la vapeur sont des exemples de transitions du phase du premier ordre.

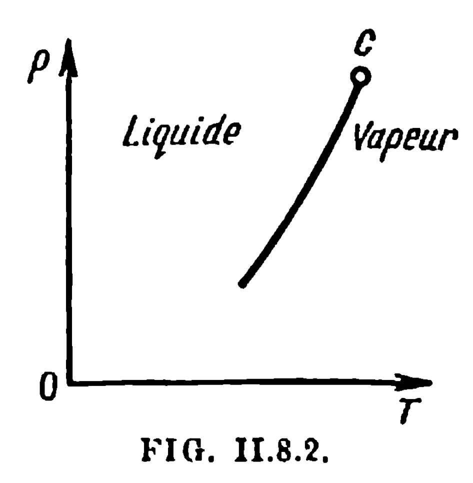


FIG. II.8.2.

Les chaleurs spécifiques des transitions de phase des processus de vaporisation et de fusion (p. 289) sont déterminées à partir de l'équation de Clapeyron-Clausius (p. 208). Pour l'ébullition du liquide elle est de la forme

$$r_{\text{éb}} = (v_{\text{v}} - v_{\text{l}})\, T \frac{dp}{dT},$$

où v_{l} et v_{v} sont les volumes spécifiques du liquide et de la vapeur à la température d'ébullition T. La dépendance de la température d'ébullition vis-à-vis de la pression est déterminée par l'équation

$$\frac{dT}{dp} = \frac{v_{\text{v}} - v_{\text{l}}}{r_{\text{éb}}} T.$$

Etant donné que $v_{\text{v}} > v_{\text{l}}$ et $r_{\text{éb}} > 0$, on a $\frac{dT}{dp} > 0$. La courbe d'équilibre des phases du processus de vaporisation est représentée fig. II.8.2. Elle s'arrête au point critique C.

La température d'ébullition s'élève avec l'augmentation de la pression.

5. Propriétés des solutions diluées

1° On entend par *solutions diluées* un mélange de plusieurs substances dans lequel prédomine une de ces substances alors que toutes les autres sont présentes en faible quantité. La substance prédominante est le *solvant*, les autres substances, les *solutés*. La solution peut se trouver à l'état solide *(solutions solides)*, liquide *(solutions vraies*, acqueuses et non acqueuses*)* et gazeux *(mélanges gazeux)*.

Si le soluté est fractionné en molécules isolées *(dispersion moléculaire)*, il se forme une *solution molaire vraie*. Dans le cas de *solutions ioniques vraies* a lieu la dissociation du soluté en ions. Il existe en outre des *solutions colloïdales* représentant des particules de substance suspendues dans le solvant.

2° On caractérise la quantité de soluté par sa *concentration*.

Les solutions dans lesquelles les molécules de soluté sont entièrement dissociées en ions dans des solvants associés intensément sont appelées *solutions d'électrolytes forts*. Les ions formés interagissent avec les molécules de solvant *(hydratation)*.

3° On observe dans les solutions diluées un mouvement chaotique des molécules de soluté analogue au mouvement des molécules gazeuses. Cependant, la loi de distribution des vitesses de Maxwell (p. 214), la loi de distribution des parcours libres (p. 218) et autres régularités gazocinétiques ne sont pas valables pour les molécules dissoutes.

4° Les observations faites sur le phénomène d'*osmose* constituent une méthode expérimentale pour l'étude des propriétés des solutions vraies: passage du solvant dans la solution à travers une membrane, imperméable à la substance dissoute et séparant la solution du liquide pur. L'échange des molécules de solvant se trouvant des deux côtés de la membrane se réalise par traversée de celle-ci. Par suite du mouvement prédominant des molécules de solvant vers la solution l'équilibre dans le système solvant-membrane-solution se maintient grâce à la *pression osmotique* exercée par la substance dissoute dans la solution. La pression osmotique p_{osm} se calcule d'après l'*équation de Van't Hoff*

$$p_{osm} = \frac{n}{V} RT,$$

où n est le nombre de moles du soluté dans le volume V de la solution, R la constante universelle des gaz, T la température absolue.

L'analogie entre les équations de Van't Hoff et de Clapeyron-Mendéléev (p. 158) est cause de l'interprétation fausse de la pression osmotique comme résultat des chocs des molécules de la solution contre les parois du récipient.

5° La concentration équilibrée d'une solution diluée, obtenue lors de la dissolution d'un gaz dans un liquide ou un solide, est proportionnelle à la pression du gaz et ne dépend pas de la nature du gaz et de la phase condensée *(loi de solubilité de Henry)*. Cette affirmation est vraie en l'absence d'adsorption chimique, représentant l'interaction chimique entre un gaz et un solvant solide (p. 291).

6° La pression de la vapeur saturée au-dessus de la solution diluée est inférieure à sa pression au-dessus d'un liquide pur. L'abaissement relatif de la pression de la vapeur est proportionnel à la concentration de la solution et ne dépend pas de la nature chimique du soluté *(loi de Raoult)*.

7° L'introduction des molécules de soluté dans le solvant fait monter la température d'ébullition et baisser la température de solidification des solutions d'une grandeur proportionnelle à la concentration de la solution et ne dépendant pas de la nature chimique du soluté *(loi de Raoult)*.

Sur la cristallisation des solutions cf. p. 290.

6. Superfluidité de l'hélium

1° Aux températures très basses l'hélium offre des singularités dans ses propriétés:

a) absence de point triple (p. 292);

b) aux pressions $p < 24$ atm l'hélium ne cristallise pas même lors de refroidissement jusqu'à des températures extrêmement basses;

c) les paramètres critiques (p. 263) de l'isotope He^4 sont: $T_{cr} = 5{,}19$ °K, $p_{cr} = 2{,}26$ atm. Sous pression normale He^4 se liquéfie à $T = 4{,}2$ °K, la densité de l'hélium liquide étant anormalement faible.

2° Lors de la baisse de la température jusqu'à $T = 2{,}2$ °K, à pression normale, He^4 subit une transformation λ, qui est une transition de phase du deuxième ordre (p. 207): He liquide I se transforme en He II. Lors de l'élévation de pression la température de la transition λ baisse.

3° On appelle *superfluidité* le phénomène d'absence presque complète de viscosité (p. 220) décelé dans l'hélium liquide II lorsqu'il s'écoule à travers des tubes capillaires très minces (de rayon $r \approx 10^{-5}$ cm). Le coefficient de viscosité est alors inférieur à 10^{-11} poise.

4° Conformément au *modèle à deux liquides*, l'hélium liquide de masse m à $T < 2{,}2$ °K représente un mélange de deux composants interpénétrant entièrement sans frottement: composant normal (de masse m_n) et composant superfluide (de masse $m_s = m - m_n$). Ceci correspond à deux types de mouvement existant simultanément dans l'hélium II. Le premier de ces mouvements correspond à l'écoulement du liquide dans lequel est excité un mouvement thermique considéré comme ensemble d'«excitations thermiques élémentaires» avec les énergies $h\nu_i$, où h est la constante de Planck, ν_i les fréquences des phonons correspondant à ces excitations (p. 286). Cet écoulement est appelé normal, il ressemble au mouvement d'un liquide visqueux ordinaire. A cet écoulement est liée une réserve d'énergie interne de l'hélium II et la présence dans celui-ci de viscosité. Le deuxième type de mouvement correspond à l'écoulement du liquide sans excitation thermique, sans réserve d'énergie interne et sans viscosité. L'étude détaillée du mécanisme de naissance des « excitations thermiques élémentaires » dans l'hélium II, fondée sur les lois de la conservation de l'énergie et de l'impulsion, affirme la possibilité de tels états (lors desquels ne surgissent pas d'excitations élémentaires) de l'hélium II. Dans ces états les particules de l'hélium II forment une agglomération (un *con-*

densat) de particules interagissant fortement entre elles. Le composant superfluide de l'hélium II correspond à de tels états.

A $T = 0$ les « excitations élémentaires » font défaut et tout l'hélium II est superfluide. Avec l'élévation de T augmente la fraction de composant normal de l'hélium II. A $T = 2{,}2$ °K a lieu la transition continue de l'hélium II en hélium I (transition de phase du premier ordre, p. 207).

5° L'hélium II possède une conductibilité thermique extrêmement élevée, dépassant des centaines de fois la conductibilité thermique des métaux à température ordinaire. C'est pourquoi il est impossible d'obtenir un gradient sensible de température dans l'hélium II, celui-ci ne peut entrer en ébullition, mais seulement s'évaporer à partir d'une surface libre. La conductibilité thermique élevée de l'hélium II est due aux courants convectifs intenses, qui surgissent dans l'hélium liquide réchauffé non uniformément par suite de l'augmentation de la fraction de son composant normal au voisinage de la source chaude. Deux mouvements contraires du liquide existent simultanément dans l'hélium II dans le cas de conductibilité thermique stationnaire (p. 284): mouvement normal, de la source chaude vers la source froide, et mouvement superfluide, de la source froide vers la source chaude. Un transport d'énergie sous forme de chaleur est réalisé dans le mouvement normal. De nouvelles portions de liquide aptes à entrer en mouvement normal sont transmises à la source chaude au compte du mouvement superfluide. Dans ce cas aucun transport macroscopique de masse n'a lieu, les deux mouvements se compensant l'un l'autre.

6° Lorsque l'hélium II s'écoule à travers un tube capillaire très mince réunissant deux récipients, la température du récipient d'où s'écoule (dans lequel se déverse) l'hélium II s'élève (baisse). Ce phénomène appelé *effet thermomécanique* s'explique par le fait que le composant superfluide de l'hélium II s'écoulant du récipient ne possède pas d'énergie interne et, par conséquent, n'en emporte pas. C'est pourquoi l'énergie interne spécifique et la température correspondante du liquide resté dans le récipient s'élèvent.

CHAPITRE 9

Corps solides cristallins

1. Propriétés fondamentales et structure des solides

1° On appelle *solides* les corps se distinguant par une constance de forme et de volume. Les corps solides sont cristallins ou amorphes.

2° Les *cristaux* sont des solides ayant une disposition périodique régulière des particules dont ils sont constitués *(ordre à longue distance, réseau cristallin)*. Les cristaux sont limités par des faces planes d'orientation régulière, qui se coupent en formant les arêtes et les sommets. Aux températures au-dessous du point de cristallisation (p. 290) l'état cristallin est stable pour tous les solides.

Les *monocristaux* ont la forme de polyèdres réguliers, dépendant de leur composition chimique. La plupart des solides (*polycristaux*) ont une structure cristalline fine, autrement dit, se composent d'un grand nombre de menus cristaux soudés, ces derniers (grains de cristaux) étant disposés de façon chaotique.

3° Les cristaux présentent une certaine *symétrie*, qui consiste en ce qu'à toute direction donnée dans le cristal correspond une ou plusieurs directions qui sont identiques du point de vue des propriétés considérées. L'étude de la symétrie des cristaux est réalisée à l'aide d'*opérations de symétrie* qui permettent de faire coïncider le cristal avec lui-même en différentes positions. Les opérations les plus simples de coïncidence (rotation, réflexion, translation) sont liées aux *éléments de symétrie*. Les éléments de symétrie les plus simples sont les *axes* et les *plans*. On appelle *classe de symétrie* un ensemble des transformations symétriques consistant habituellement en des combinaisons de rotations, de réflexions et de rotations avec réflexion.

4° On distingue les propriétés physiques scalaires, vectorielles et tensorielles des cristaux. Les *propriétés scalaires* (densité, capa-

cité calorifique, etc.) sont déterminées de façon univoque par la donnée des valeurs numériques. Les *propriétés vectorielles* (conductibilité thermique, résistance électrique, etc.) sont définies par la donnée des valeurs qui les caractérisent sur chacune des trois directions caractéristiques du cristal (suivant les axes de coordonnées fondamentaux du cristal). Les *propriétés tensorielles* sont déterminées par la donnée de leurs valeurs sur plus de trois directions dans le cristal (constante diélectrique relative, propriétés élastiques, etc.).

5° D'après le caractère des forces d'interaction, le type de liaison et la nature des particules disposées aux nœuds du réseau cristallin, on distingue les types suivants de corps solides.

a) *Cristaux métalliques* (Na, Fe, etc.). Lors du rapprochement des atomes situés au début de chaque période du système périodique de Mendéléev (p. 797), les électrons de valence quittent leurs atomes et deviennent les électrons communs formant un gaz électronique dans les métaux (p. 240). De ce fait il se crée une distribution uniforme de la densité électronique dans tout le réseau. Au voisinage des nœuds du réseau cristallin seulement la densité électronique s'accroît au compte des électrons des couches internes. Une *liaison métallique* surgit dans le réseau entre les ions positifs et le gaz électronique. Elle représente un type particulier de liaison chimique, attendu que les conditions nécessaires pour la formation d'une liaison ionique (hétéropolaire) (p. 807) ou atomique (homéopolaire) (p. 811) font défaut chez les atomes du métal. Les électrons communs des métaux « attirent » par forces électrostatiques les ions positifs, équilibrant de la sorte la répulsion entre les ions. Avec la diminution de la distance interatomique dans le réseau augmentent la densité électronique et les forces attractives ainsi que les forces répulsives entre ions. A distances définies *(période de réseau)* ces forces s'équilibrent et il apparaît un réseau métallique stable du cristal. L'énergie potentielle d'interaction dans le cas de liaison métallique constitue des dizaines de kcal/mol (par exemple 26 kcal/mol pour Na et 94 kcal/mol pour Fe). Les métaux se distinguent par des conductibilités thermique et électrique élevées.

b) Les *cristaux ioniques* (NaCl, LiF, les oxydes des métaux, les sulfures, les carbures, les séléniures, etc.) sont caractérisés par une liaison ionique (p. 807) entre les ions positifs et négatifs, qui alternent régulièrement aux nœuds du réseau cristallin. L'énergie potentielle de liaison constitue des centaines de kcal/mol (par exemple 180 kcal/mol pour NaCl, 240 kcal/mol pour LiF) ou 10^5 J/mol. Les propriétés caractéristiques des cristaux ioniques sont: points de fusion élevés, hautes chaleurs de sublimation, absorption intense

dans le domaine infrarouge, conductibilités électrique et thermique faibles aux basses températures. On observe aux températures élevées une conductibilité ionique notable.

c) Les *cristaux atomiques* (C, Ge, Te, etc.) sont caractéristiques des réseaux cristallins des semiconducteurs (p. 416), de nombreux corps organiques solides. On les observe également dans certains métaux et combinaisons intermétalliques. La liaison chimique entre atomes neutres (liaison covalente) (p. 811) est conditionnée par une interaction quantomécanique. L'énergie potentielle de liaison constitue des centaines de kcal/mol (l'énergie de liaison du diamant par exemple est 170 kcal/mol). Les propriétés essentielles des cristaux atomiques sont: hautes températures de fusion et hautes chaleurs de sublimation, dureté élevée, conductibilité électrique faible dans des échantillons purs.

d) Les *cristaux moléculaires* (Ar, CH_4, paraffine, beaucoup de composés organiques solides). Des molécules sont disposées aux nœuds des réseaux cristallins, la liaison entre molécules est réalisée par les forces de Van der Waals, principalement de dispersion (p. 258). L'énergie potentielle de liaison constitue plusieurs unités de kcal/mol (par exemple celle de Ar est 1,8 kcal/mol, celle de CH_4 2,4 kcal/mol). Leurs propriétés essentielles sont: points de fusion et d'ébullition bas, *empilement compact* des cristaux. Les gaz inertes se transformant en corps solides constituent un assemblage cubique compact.

e) *Cristaux à liaisons hydrogène* (glace, HF, etc.). L'atome d'hydrogène, ayant une liaison covalente (atomique) (p. 811), entre dans certains cas en liaison avec deux atomes sous l'action des forces attractives, formant une *liaison hydrogène* avec l'énergie potentielle de liaison ~ 5 kcal/mol. La formation de liaison s'opère de telle façon que l'atome d'hydrogène cède son électron à l'un des atomes de la molécule et l'ion hydrogène (proton) obtenu crée, au compte de l'interaction ionique, une liaison hydrogène. Dans ce cas les atomes sont très rapprochés et le proton ne peut assurer la liaison de plus de deux atomes. Une telle liaison existe entre les molécules d'eau et, avec l'attraction des moments dipolaires des molécules H_2O, assure les propriétés particulières de l'eau et de la glace au voisinage de 4 °C. Une liaison hydrogène est réalisée entre les molécules protéiques assurant leur géométrie spécifique et jouant un très grand rôle dans le processus de polymérisation consistant en la formation de groupements de molécules de même type (p. 305).

6° Il existe entre la structure cristalline des corps solides et leur composition chimique des relations qui sont étudiées en cristal-

lochimie. Chaque substance chimiquement individuelle est caractérisée par des éléments de symétrie déterminés des cristaux. Les thèses les plus importantes de la cristallochimie sont: a) la ressemblance de la forme des cristaux des substances de composition chimique analogue *(isomorphisme)*; b) la possibilité de l'existence de plusieurs formes cristallines des corps solides de même composition chimique, chacune desquelles est stable dans différentes conditions *(polymorphisme)*. L'analyse par diffraction de rayons X joue un grand rôle dans le développement de la cristallochimie et de toute l'étude des corps solides cristallins. On établit à son aide que chaque élément structural d'un cristal (atome, ion) a pratiquement une « sphère d'action » impénétrable et les distances interatomiques dans les cristaux représentent les sommes des rayons de leurs sphères d'action. Ainsi, la structure des cristaux ioniques dépend essentiellement du rapport des rayons ioniques.

7° Le mouvement thermique des particules liées de corps solides consiste en oscillations de particules par rapport aux nœuds du réseau cristallin. Par suite de l'influence en commun des forces attractives et des forces répulsives entre particules, ainsi que par suite de l'absence de périodicité parfaite dans les cristaux réels, ces oscillations sont *anharmoniques*.

Aux oscillations harmoniques correspond une dépendance quadratique entre l'énergie potentielle d'interaction des particules $U(q)$ et l'écart q des particules de leur position d'équilibre (p. 120). L'*anharmonicité* des oscillations est prise en considération par les termes postérieurs au terme quadratique dans le développement de $U(q)$ en série des puissances de q. En première approximation l'anharmonicité est prise en considération par conservation du terme cubique dans le développement de l'énergie potentielle d'interaction des particules en série des puissances de q: $U(q) = U_0 + \beta_0 \frac{q^2}{2} - \frac{bq^3}{3}$, où U_0 est la valeur de U quand $q = 0$, β_0 le coefficient de la force quasiélastique (p. 120).

2. Dilatation thermique des corps solides

1° Avec l'élévation de température a lieu la *dilatation thermique* des solides. On distingue les dilatations thermiques linéaire et volumique caractérisées par les *coefficients moyens de dilatation linéaire* α_l *et volumique* α_V dans un intervalle donné de températures.

2° Si l_0 est la longueur initiale du corps, Δl l'allongement de ce corps lorsqu'on le réchauffe de Δt degrés, α_l dans cet intervalle de températures est déterminé par la formule

$$\alpha_l = \frac{1}{l_0} \frac{\Delta l}{\Delta t}.$$

La grandeur α_l caractérise l'*allongement relatif* $\Delta l/l_0$ qui a lieu lorsqu'on réchauffe le corps d'un degré. La longueur du corps réchauffé est:

$$l = l_0 \ (1 + \alpha_l \Delta t).$$

La valeur de α_l dépend du matériau et pour la plupart des corps est de l'ordre de grandeur de $10^{-5} \div 10^{-6}$ degré$^{-1}$. On observe également une faible dépendance entre α_l et la température.

3° Lors du chauffage, le volume du corps solide croît, en première approximation, proportionnellement au premier degré de l'accroissement de la température:

$$V = V_0 (1 + \alpha_V \Delta t),$$

où V_0 est le volume initial du corps, α_V le coefficient moyen de dilatation volumique pour l'intervalle de températures Δt, caractérisant l'*augmentation relative du volume* $\Delta V/V_0$ qui s'opère lorsqu'on réchauffe le corps d'un degré:

$$\alpha_V = \frac{1}{V_0} \frac{\Delta V}{\Delta t}.$$

En première approximation le lien existant entre les coefficients α_V et α_l est de la forme:

$$\alpha_V = 3\alpha_l.$$

4° La dilatation thermique du corps solide est liée à l'anharmonicité des oscillations thermiques (p. 281) des particules de son réseau cristallin. La force agissant sur une particule est

$$F(q) = -\frac{\partial U(q)}{\partial q} = -\beta_0 q + bq^2.$$

A l'état d'équilibre du cristal, la valeur moyenne de cette force est $\overline{F} = 0$, c'est pourquoi lors d'oscillations rigoureusement harmoniques $(F = -\beta_0 q)$ $\bar{q} = -\frac{\overline{F}}{\beta_0} = 0$ et aucune dilatation thermique ne peut avoir lieu. Cependant, en réalité

$$\overline{q} = \frac{b}{\beta_0} \overline{q^2}.$$

Mais selon la loi de l'équipartition de l'énergie par degrés de liberté (p. 233)

$$\beta_0 \frac{\overline{q^2}}{2} = \frac{1}{2} kT,$$

où k est la constante de Boltzmann, T la température absolue; donc

$$\bar{q} = \frac{bk}{\beta_0^2} T.$$

Par suite de l'anharmonicité des oscillations thermiques, la distance d'équilibre r_0 entre les particules voisines d'un corps solide croît avec l'élévation de température. Le coefficient de dilatation linéaire est lié au *coefficient d'anharmonicité* b de la manière suivante:

$$\alpha_l = \frac{\bar{q}}{r_0 T} = \frac{bk}{\beta_0^2} \frac{1}{r_0}.$$

3. Conductibilité thermique des solides

1° Le phénomène de *conductibilité thermique* des solides consiste en la transmission de l'énergie sous forme de chaleur dans un corps solide chauffé non uniformément (sans émission de chaleur). Dans le cas général, la température T varie en différents points du corps au cours du temps: $T = f(x, y, z, t)$ où x, y, z sont les coordonnées du point, t le temps. On établit la forme de la fonction f par résolution de l'équation différentielle de la conductibilité thermique de Fourier, qui pour un corps isotrope homogène est de la forme:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \Delta T + \frac{q_V}{c\rho},$$

où q_V est la quantité de chaleur dégagée par les sources de chaleur internes par unité de volume du corps en 1 s, c la chaleur spécifique du corps, ρ sa densité, Δ l'opérateur différentiel de Laplace. La grandeur a caractérisant la vitesse avec laquelle s'égalise la température dans un corps chauffé non uniformément est appelée *coefficient de diffusivité thermique*. Elle a le sens du coefficient réduit de conductibilité thermique K (p. 219) et est liée à celui-ci par la relation

$$a = \frac{K}{c\rho}$$

(pour les gaz $c = c_p$).

2° Pour la conductibilité thermique stationnaire $\left(\frac{\partial T}{\partial t}=0\right)$

$$a\Delta T+\frac{q_V}{c\rho}=0.$$

En l'absence de sources de chaleur internes ($q_V=0$)

$$\Delta T=0.$$

Pour la résolution pratique de l'équation de la conductibilité thermique doivent être données: a) les conditions initiales $T=f(x, y, z, 0)$; b) les conditions aux limites (les conditions d'échange de chaleur à la frontière du corps).

3° Dans le cas d'une paroi infinie plane séparant deux milieux 1 et 2 de températures constantes T_{m1} et T_{m2} ($T_{m1}>T_{m2}$), le flux de chaleur spécifique[1] à travers la paroi est

$$q=\frac{K}{d}(T_{s1}-T_{s2}),$$

ou bien

$$q=\frac{T_{m1}-T_{m2}}{\frac{1}{\alpha_1}+\frac{d}{K}+\frac{1}{\alpha_2}}=\frac{T_{m1}-T_{m2}}{R},$$

où T_{s1} et T_{s2} sont les températures des surfaces extérieures de la paroi, d l'épaisseur de la paroi, K le coefficient de conductibilité thermique du matériau dont est faite la paroi (p. 219), α_1 et α_2 les *coefficients de transmission de chaleur* (p. 342): du premier milieu à la paroi et de la paroi au second milieu. La grandeur

$$R=\frac{1}{\alpha_1}+\frac{d}{K}+\frac{1}{\alpha_2}$$

est appelée ***résistance thermique***, $\frac{1}{R}$ est le *coefficient d'échange de chaleur*.

Les températures sur les surfaces extérieures sont:

$$T_{s1}=T_{m1}-\frac{q}{\alpha_1},\quad T_{s2}=T_{m2}+\frac{q}{\alpha_2}.$$

La température d'une paroi à couche unique à la distance l de la surface 1 est alors:

$$T=T_{s1}-\frac{T_{s1}-T_{s2}}{d}l.$$

---

[1] On appelle *flux de chaleur spécifique* la quantité de chaleur transportée en 1 s à travers l'unité de surface à température constante dans la direction de la normale à cette surface.

Ces formules peuvent être utilisées pour des parois à dimensions finies, à condition que $L \gg d$, où L sont les dimensions linéaires de la surface latérale de la paroi.

4° Pour une paroi en forme de long cylindre creux (les températures des milieux à l'intérieur et à l'extérieur du cylindre T_{m1} et T_{m2} ($T_{m1} > T_{m2}$) sont constantes), le flux de chaleur par unité de longueur de la paroi en 1 s est:

$$q_l = \frac{2\pi K(T_{s1} - T_{s2})}{\ln \frac{d_2}{d_1}},$$

ou bien

$$q_l = \frac{\pi(T_{m1} - T_{m2})}{\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2K} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}},$$

où T_{s1} et T_{s2} sont les températures des surfaces intérieure et extérieure du cylindre, d_1 et d_2 les diamètres intérieur et extérieur du cylindre, K le coefficient de conductibilité thermique du matériau dont est faite la paroi, α_1 et α_2 les cœfficients de transmission de chaleur aux surfaces intérieure et extérieure du cylindre. Les températures sur les surfaces intérieure et extérieure de la paroi sont:

$$T_{s1} = T_{m1} - \frac{q_l}{\pi} \frac{1}{\alpha_1 d_1}, \quad T_{s2} = T_{m2} + \frac{q_l}{\pi} \frac{1}{\alpha_2 d_2}. \qquad (*)$$

La température d'une paroi à couche unique à la distance r de l'axe du cylindre est

$$T = T_{s1} - \frac{q_l}{2\pi K} \ln \frac{2r}{d_1}.$$

5° Pour une paroi en forme de sphère de diamètres intérieur d_1 et extérieur d_2, séparant deux milieux à températures constantes T_{m1} et T_{m2} ($T_{m1} > T_{m2}$), le flux de chaleur Q à travers la paroi en 1 s est:

$$Q = \pi K \frac{d_1 d_2}{d} (T_{s1} - T_{s2}),$$

où d est l'épaisseur de la paroi, ou bien

$$Q = \frac{\pi(T_{m1} - T_{m2})}{\frac{1}{\alpha_1 d_1^2} + \frac{1}{2K}\left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}\right) + \frac{1}{\alpha_2 d_2^2}},$$

(cf. notations 4°). Les températures des parois sont calculées à l'aide des formules analogues à (*). La température de la paroi sphérique à la distance r du centre est:

$$T = T_{s1} - \frac{T_{s1} - T_{s2}}{\frac{2}{d_1} - \frac{2}{d_2}} \left(\frac{2}{d_1} - \frac{1}{r} \right).$$

6° Les métaux se distinguent par leur bonne conductibilité de la chaleur qui se réalise principalement au compte du transfert d'énergie par les électrons libres. Le *coefficient de conductibilité thermique électronique des métaux* est:

$$K = \frac{\pi^2}{3} \frac{k^2 n_0 \lambda (W_F)}{m \bar{u} (W_F)} T,$$

où k est la constante de Boltzmann, n_0 le nombre d'électrons par 1 cm³ de métal, $\lambda(W_F)$ et $\bar{u}(W_F) = p_F/m$ le parcours libre moyen et la vitesse moyenne de l'agitation thermique des électrons, correspondant à l'énergie limite W_F de la distribution de Fermi des électrons entre leurs énergies à la température $T = 0$ (p. 240), m la masse de l'électron.

En approximation classique du gaz électronique idéal

$$K = \frac{1}{2} k n_0 \bar{\lambda} \bar{u},$$

où $\bar{\lambda}$ et $\bar{u}$ sont le parcours libre moyen et la vitesse moyenne de l'agitation thermique des électrons. La conductibilité thermique des métaux réalisée par le réseau cristallin *(conductibilité thermique réticulaire)* est beaucoup plus faible que la conductibilité thermique électronique.

7° Dans les cristaux métalliques le mécanisme de conductibilité thermique consiste en une transmission de chaleur par les électrons de conduction (p. 392). Dans les diélectriques cristallins c'est la transmission de chaleur des oscillations liées des nœuds du réseau qui joue le rôle important. En première approximation ce processus peut être représenté sous forme de propagation dans le cristal d'un ensemble d'ondes harmoniques élastiques de différentes fréquences ν_i. En théorie quantique, on identifie à ces ondes des quasi-particules appelées *phonons* avec les énergies $h\nu_i$ et les impulsions $h\nu_i/v$, où v est la vitesse des ondes élastiques (vitesse du son).

Le processus de conductibilité thermique réticulaire peut être considéré comme une propagation (mouvement) de phonons dans le cristal. Le parcours libre moyen $\bar{\lambda}$ des phonons représente une

caractéristique cinétique analogue au parcours libre moyen de la molécule (p. 218). Le ***coefficient de conductibilité thermique réticulaire des cristaux*** est:

$$K = \frac{1}{3} c v \bar{\lambda},$$

où c est la capacité calorifique par unité de volume, v la vitesse du son, $\bar{\lambda}$ le parcours libre moyen des phonons. Par exemple, pour le réseau de NaCl à $t = 0°C$ et les valeurs $c = 0{,}45$ cal·cm³ et $K = 0{,}17$ cal·cm⁻¹·degré⁻¹·s⁻¹, on a $\bar{\lambda} = 23 \cdot 10^{-8}$ cm, ce qui est 4 fois plus que la distance d entre les ions voisins du réseau cubique à faces centrées de NaCl: $d = 5{,}63 \cdot 10^{-8}$ cm (période du réseau). On obtient $\bar{\lambda}$ des phonons par les expériences de diffusion géométrique des phonons (diffusion intercristalline, diffusion dans les défauts du réseau et les structures amorphes) et diffusion des phonons dans les oscillations anharmoniques des nœuds du réseau (diffusion des phonons dans les phonons). Dans les oscillations harmoniques ce processus n'a pas lieu. La diffusion des phonons dans les phonons conduit, aux températures élevées $T > T_c$, où T_c est la température caractéristique du cristal (p. 288), à la dépendance $\bar{\lambda} \sim \frac{1}{T}$; quand $T \ll T_c$, $\bar{\lambda} \sim e^{-T_c/2T}$. La diffusion géométrique est considérable pour de grandes valeurs de $\bar{\lambda}$, comparables aux dimensions linéaires d de l'échantillon. Dans ce cas observé aux basses températures, a lieu une diminution brusque de la conductibilité thermique des cristaux purs, et la relation $K \approx \frac{1}{3} c v d$ est valable. Aux températures pas trop basses $K \sim 1/T$ conformément à la dépendance $\bar{\lambda} \sim 1/T$. Aux basses températures $K \sim T^3$, étant donné que $c \sim T^3$ (p. 289).

4. Capacité calorifique des corps solides

1° Dans le cas des solides on ne distingue pas les capacités calorifiques C_p et C_V (p. 167). On a ici à considérer les chaleurs spécifique et atomique ou molaire (p. 165). Dans le cas de corps solides non métalliques, le plus grand apport dans la capacité calorifique donne l'énergie des oscillations thermiques des particules disposées aux nœuds du réseau cristallin. Pour les métaux, il faut, de plus, tenir compte de la faible capacité calorifique du gaz électronique dégénéré (p. 242).

2° Les oscillations liées des particules d'un cristal contenant N atomes peuvent être considérées en première approximation comme un système de $3N$ oscillateurs linéaires indépendants (correspondant à $3N$ degrés de liberté) avec leurs fréquences entre 0 et ν_{max},

$$\nu_{max} = \left(\frac{9}{4\pi}\frac{N}{V}\frac{v_l^3 v_t^3}{2v_l^3 + v_t^3}\right)^{1/3},$$

où v_l et v_t sont les vitesses des ondes élastiques longitudinales et transversales dans un cristal de volume V.

3° On calcule l'énergie de 1 atome-gramme de corps solide U et sa capacité calorifique atomique C_a à l'aide de l'intégrale d'état Z (p. 232) d'après les formules du tableau p. 233. La théorie de la capacité calorifique des solides fondée sur l'existence des ondes élastiques dans le cristal conduit à la formule

$$\ln Z = -\frac{9N_A T_c}{8T} - 9N_A\left(\frac{T}{T_c}\right)^3 \int_0^{T_c/T} x^2 \ln(1 - e^{-x})dx,$$

où T est la température du cristal, $T_c = h\nu_{max}/k$ la *température caractéristique de Debye*, k la constante de Boltzmann, h la constante de Planck, N_A le nombre d'Avogadro.

4° Dans le domaine des hautes températures $(T \gg T_c)$

$$\ln Z \approx -3N_A \ln\frac{T_c}{T} - \frac{9}{8}N_A\frac{T_c}{T} + N_A,$$

$$U = kT^2\frac{\partial \ln Z}{\partial T} \approx 3N_A kT.$$

D'où

$$C_a = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = 3N_A k = 3R = 5{,}97\ \frac{\text{cal}}{\text{atome-g}\cdot\text{degré}}.$$

Ce résultat peut être obtenu de la loi de l'équipartition de l'énergie par degrés de liberté (p. 233) et coïncide avec la *loi de Dulong et Petit* établie expérimentalement. La capacité calorifique atomique de tous les solides cristallins chimiquement simples est environ égale à 6 cal/atome-g · degré.

5° Dans le domaine des basses températures $(T \ll T_c)$

$$\ln Z = -\frac{9N_A T_c}{8T} + \frac{\pi^4 N_A}{5}\left(\frac{T}{T_c}\right)^3,$$

$$U = kT^2\frac{\partial \ln Z}{\partial T} = \frac{9}{8}N_A kT_c + \frac{3\pi^4}{5}\frac{N_A kT^4}{T_c^3}.$$

Le premier terme dans le second membre de l'expression de U représente l'énergie du cristal à $T \to 0$. La capacité calorifique du cristal aux basses températures est proportionnelle à T^3 (*loi de Debye*):

$$C_a = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \frac{12\pi^4 N_A k}{5T_c^3} T^3.$$

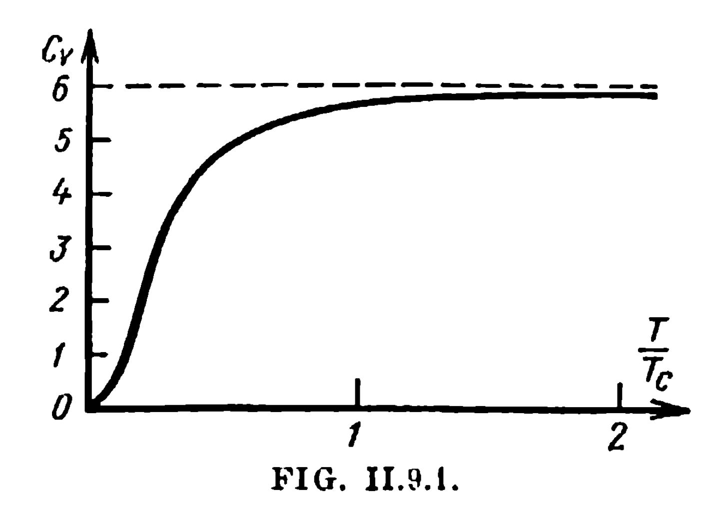


FIG. II.9.1.

6° Dans le domaine intermédiaire ($T \approx T$) l'énergie et la capacité calorifique du cristal représentent des fonctions de la température, dépendant du résultat de l'intégration numérique de $\ln Z$ (cf. 3°). L'allure générale de la dépendance entre la capacité calorifique atomique et la température est représentée fig. II.9.1.

5. Transformations de phase des corps solides

1° Lorsqu'on chauffe un corps solide, la chaleur fournie à celui-ci est dépensée principalement sur l'accroissement de la réserve d'énergie interne du cristal (d'énergie cinétique des oscillations thermiques et d'énergie potentielle d'interaction des particules disposées aux nœuds du réseau cristallin). Le chauffage intense peut conduire au passage de la substance de la phase cristalline à la phase liquide (fusion) ou gazeuse (sublimation). Ceci s'opère à une température telle que les déplacements des particules de leurs positions d'équilibre soient commensurables aux distances équilibrées entre les particules dans le réseau.

2° La *fusion* d'un corps solide commence à une température déterminée T_{fus} appelée *température de fusion*. Le processus de fusion d'un cristal à un constituant (p. 152) s'opère à une température constante T_{fus} sous pression donnée.

3° La quantité de chaleur qui doit être fournie à une unité de masse d'un solide à la température constante T_{fus} pour la réalisation de sa fusion est appelée *chaleur spécifique de fusion* r_{fus}:

$$r_{fus} = u_l - u_s + p(v_l - v_s),$$

où u_l et u_s sont respectivement les énergies internes par unité de masse de substance en phase liquide et solide, v_l et v_s les

volumes spécifiques du liquide et du solide, p la pression constante de la transition de phase du premier ordre (p. 207).

4° La dépendance entre la température de fusion et la pression se décrit par l'équation de Clapeyron-Clausius (p. 209):

$$\frac{dT_{fus}}{dp} = \frac{T_{fus}(v_l - v_s)}{r_{fus}}.$$

Comme règle, $v_l > v_s$, et puisque $r_{fus} > 0$, on a $\frac{dT_{fus}}{dp} > 0$. Pour la plupart des substances, la température de fusion s'élève avec l'augmentation de pression. Pour certaines substances (eau, gallium, bismuth) la densité de la phase liquide est plus grande que celle de la phase solide, $v_l - v_s < 0$ et $\frac{dT_{fus}}{dp} < 0$; la température de fusion de telles substances baisse avec l'élévation de pression. Sur la figure II.9.2. sont représentées les courbes d'équilibre d'un système diphasé: solide-liquide. Le processus de fusion est lié à l'accroissement de l'entropie (p. 187) du système, comme passage d'un état plus ordonné (cristallin) à un état moins ordonné (liquide).

5° Lorsqu'on refroidit les liquides jusqu'à une certaine température appelée *température de cristallisation (de solidification)* de la phase liquide T_{crist}, commence le passage de la substance de l'état liquide à l'état solide cristallin *(cristallisation)*. La cristallisation est liée au dégagement d'une certaine quantité de chaleur égale à la chaleur de fusion. Pour les liquides chimiquement purs elle a lieu à température constante, T_{crist} coïncidant avec la température de fusion T_{fus}.

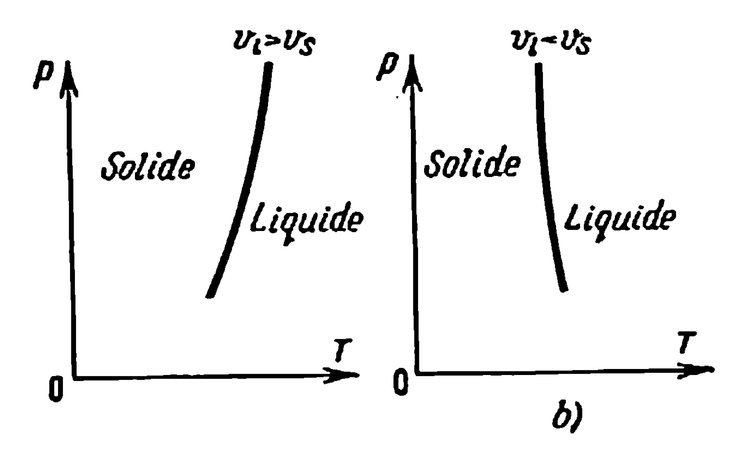


FIG. II.9.2.

6° Au cours du processus de cristallisation le mouvement des particules du liquide devient plus ordonné, la durée de leur existence «sédentaire» s'accroît (temps de relaxation, p. 266). Progressivement, le mouvement des particules se change en oscillations thermiques liées autour de certaines positions équilibrées, les nœuds du réseau cristallin.

7° Pour que la cristallisation puisse commencer, il faut qu'il y ait dans le liquide des *germes de cristallisation* (impuretés, particules de poussière, bulles gazeuses, concentrations locales au sein du liquide). En ces endroits surgit en premier lieu une disposition régulière des particules et commence la formation de la phase solide.

8° S'il n'y a pas de germes de cristallisation dans le liquide et qu'on évacue de celui-ci une certaine quantité de chaleur de façon suffisamment lente et régulière, ce liquide peut être refroidi jusqu'à une température inférieure à la température de cristallisation (*liquide surfondu*). Cet état du liquide est métastable (cf. vapeur sursaturée, p. 262) et peut être facilement troublé (à titre d'exemple notons que le liquide surfondu cristallise dès qu'on l'agite).

9° La température de cristallisation d'une solution dépend de sa composition. Les points A et B (fig. II.9.3) déterminent les températures de cristallisation (de fusion) des substances pures A et B. L'addition de l'une de ces substances à l'autre provoque la baisse de la température de cristallisation de la solution (ou bien de la température de fusion de l'alliage formé). La température de cristallisation (de fusion) atteint une valeur minimale lors d'une certaine concentration c_E de la substance B (point E). On appelle *eutectique* une solution de telle composition et *point eutectique* la température de fusion de l'eutectique.

10° La vaporisation des corps solides *(sublimation)*, qui a lieu à toute température, s'accompagne d'absorption de la chaleur de vaporisation dépensée pour vaincre les forces de liaison entre les particules du corps solide et «arracher» les particules de la surface du cristal. La différence entre les chaleurs spécifiques de vaporisation des solides et des liquides à la température de fusion est égale à la chaleur spécifique de fusion.

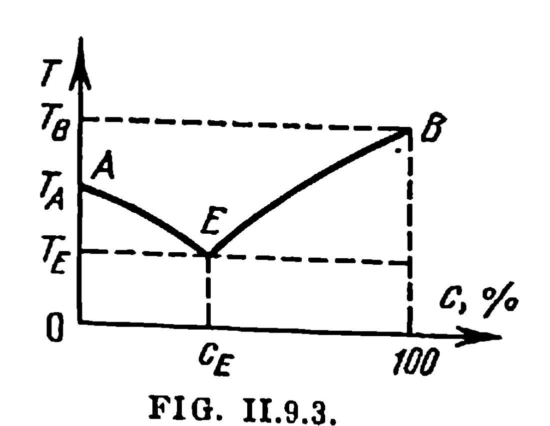


FIG. II.9.3.

11° La courbe d'équilibre solide-vapeur dans le diagramme p—T est appelée *courbe de sublimation*. Sur la

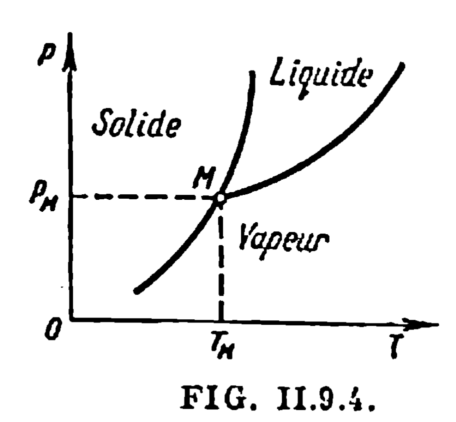


FIG. II.9.4.

figure II.9.4 sont représentées les courbes d'équilibre solide-vapeur, solide-liquide et liquide-vapeur pour une substance quelconque. Ces courbes s'intersectent au point triple M, où la substance se trouve simultanément dans les phases solide, liquide et vapeur coexistant en équilibre l'une avec l'autre.

6. Adsorption

1° On appelle *adsorption* la concentration (condensation) de l'une des substances (constituants) qui s'opère dans la couche limite attenante à la surface de séparation de deux phases. Par exemple, sur la surface d'un solide ou d'un liquide a lieu la concentration des substances à partir du gaz ou de la solution. La notion de *sorption* inclut aussi bien la rétention superficielle de la substance par le liquide ou le solide *(adsorption)* que la pénétration de la substance dans le sein du liquide ou du solide *(absorption)*. La substance adsorbée est appelée *adsorbat* et le corps formant la surface adsorbante *adsorbant*. La *désorption* est le processus inverse à la sorption consistant à éliminer de la surface la substance adsorbée auparavant par celle-ci.

Les particules adsorbées sont retenues en surface un certain temps dépendant de la nature de l'adsorbant et de l'adsorbat, ainsi que de la température et de la pression. A mesure que se développe le processus d'adsorption, son intensité diminue, et le processus de désorption devient plus marqué. On appelle *équilibre d'adsorption* l'établissement de vitesses égales des processus d'adsorption et de désorption.

2° On appelle *adsorption physique* l'adsorption lors de laquelle les particules de l'adsorbat conservent leurs propriétés individuelles. Dans le cas d'*adsorption chimique (chimisorption)* les molécules de l'adsorbat forment avec l'adsorbant un composé chimique. Lors d'adsorption physique les forces d'adsorption sont de même nature que les forces d'interaction intermoléculaire dans les gaz, liquides et solides (p. 258). L'adsorption physique évolue très rapidement si elle ne s'accompagne pas de processus accessoires. Aux basses températures l'adsorption chimique se déroule lentement et, de même que la vitesse des réactions chimiques, sa vitesse s'accroît avec l'élévation de température *(adsorption activée)*.

Le processus d'adsorption s'accompagne d'un dégagement de chaleur. La chaleur d'adsorption physique est de l'ordre de gran-

deur de la chaleur de condensation. Elle constitue 1-5 kcal/mol pour les molécules simples et 10-20 kcal/mol pour les molécules complexes. Les chaleurs d'adsorption chimique sont comparables à la chaleur des réactions chimiques (10-100 kcal/mol).

L'adsorption est un processus qui s'accompagne d'une diminution d'énergie libre de la couche superficielle de l'adsorbant (p. 269). L'adsorbat doit apporter moins d'énergie libre superficielle que l'adsorbant, autrement dit la tension superficielle de l'adsorbat doit être inférieure à celle de l'adsorbant (p. 269).

3° La caractéristique quantitative de l'adsorption est la quantité d'adsorption Γ, qui représente l'excès de masse d'un constituant donné en moles par 1 cm² de couche superficielle par rapport à sa teneur dans un même volume des phases en contact; d'après l'*équation de Gibbs*

$$\Gamma = -\frac{\partial \sigma}{\partial \mu},$$

où σ est la tension superficielle, μ le potentiel chimique (p. 202) d'un constituant donné à l'équilibre des phases. Si l'absorption du constituant s'opère à partir du milieu dans lequel sa concentration c est faible, l'équation de Gibbs se ramène à la forme

$$\Gamma = -\frac{c}{RT}\frac{\partial \sigma}{\partial c},$$

où $\frac{\partial \sigma}{\partial c} = A$ est l'*activité superficielle de l'adsorbat* caractérisant sa capacité de faire baisser l'énergie superficielle de l'adsorbant.

7. Propriétés élastiques des corps solides

1° On appelle *déformation* d'un corps solide le changement des dimensions et du volume de celui-ci, s'accompagnant souvent d'une modification de la forme du corps. Les déformations sont provoquées soit par une variation de la température, soit par l'action des forces extérieures. Lors des déformations, les particules disposées aux nœuds des réseaux cristallins des solides s'écartent de leurs positions d'équilibre initiales pour en occuper de nouvelles. Les forces d'interaction entre particules s'y opposent, il apparaît alors dans le corps déformé des *forces élastiques* intérieures, qui équilibrent les forces extérieures appliquées au corps.

2° La déformation est dite *élastique* si elle disparaît dès qu'on fait cesser l'action de la force qui la provoque. Dans ce cas ont lieu des déplacements « réversibles » des particules de leurs nouvelles

positions d'équilibre dans le réseau cristallin à leurs positions de départ. Les déformations anélastiques d'un corps solide, qui s'accompagnent d'une reconstruction irréversible de son réseau cristallin, sont appelées *déformations plastiques*.

3° On appelle *contrainte* σ la grandeur numériquement égale à la force élastique $F_{él}$ rapportée à une unité d'aire S de la section du corps:

$$\sigma = \frac{dF_{él}}{dS}.$$

La contrainte est *normale* si la force $dF_{él}$ est normale à la surface dS, et *tangentielle* si la force est tangente à cette surface.

4° La *déformation relative* $\frac{\Delta x}{x}$, qui est le quotient de la déformation absolue Δx par la valeur initiale de la grandeur x caractérisant les dimensions ou la forme du corps, mesure la déformation.

5° *Loi de Hooke:* lors de déformation élastique du corps la contrainte σ est proportionnelle à la déformation relative:

$$\sigma = K \frac{\Delta x}{x},$$

où K est le *module d'élasticité*, numériquement égal à la contrainte surgissant lors d'une déformation relative qui vaut l'unité.

La grandeur $a = 1/K$ est le *coefficient d'élasticité*. La loi de Hooke est vraie dans des limites déterminées de déformations. La contrainte lors de laquelle est compromise la proportionnalité entre la contrainte et la déformation est appelée *limite de proportionnalité*.

6° La *traction* (la *compression*) *longitudinale* consiste en l'allongement (la contraction) du corps sous l'action de la force de traction (de compression) F. La déformation élastique par traction (par compression) cesse lorsque $F_{él} = F$, où $F_{él}$ est la force élastique. L'*allongement* (la *contraction*) *relatif* $\frac{\Delta l}{l}$ mesure la déformation. Dans ce cas $K = E$ est appelé *module de Young*.

Alors $\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta l}{l}$. En vertu de la loi de Hooke:

$$\Delta l = \frac{Fl}{ES},$$

où l est la longueur initiale du corps, Δl la variation de la longueur sous l'effet de la charge F. Quand $\Delta l = l$, le module de Young est $E = \frac{F}{S} = \sigma$, c'est-à-dire qu'il est numériquement égal à la con-

trainte surgissant dans l'éprouvette lorsqu'elle s'allonge (se contracte) de deux fois, toutes les autres conditions étant constantes.

7° La traction (la compression) longitudinale relative de l'éprouvette s'accompagne de sa *striction (extension) transversale relative* $\frac{\Delta d}{d}$, où d est la dimension transversale de l'éprouvette. On appelle *coefficient de Poisson* μ le rapport de la striction (de l'extension) transversale relative $\frac{\Delta d}{d}$ à l'allongement (la contraction) longitudinal relatif $\frac{\Delta l}{l}$:

$$\mu = \frac{\Delta d}{d} : \frac{\Delta l}{l}.$$

8° Quand la limite de proportionnalité est atteinte (5°) (le point A sur la figure II.9.5), l'allongement croît plus rapidement que la contrainte. On appelle *limite d'élasticité* (point A') la contrainte maximale à laquelle les *déformations résiduelles* ne sont pas encore observées. La *limite d'écoulement* (point B) caractérise l'état du corps déformé après lequel l'allongement croît sans qu'augmente la charge (palier BC). On appelle *résistance à la rupture* ou *charge de rupture* la contrainte correspondant à la charge maximale que le corps peut supporter avant de se rompre.

9° Dans le cas de déformations répétées lors du passage au-delà de la limite d'élasticité, suivi de libération de l'éprouvette des forces de déformation, l'élasticité du corps croît et la limite de proportionnalité augmente (la *trempe* ou l'*écrouissage* de l'éprouvette).

10° Lors de la traction (de la compression) la densité volumique w_σ de l'énergie potentielle du corps est déterminée par le travail spécifique $A_{\text{él}}$, calculé pour une unité de volume du corps, qui est effectué pour vaincre les forces élastiques. Dans le domaine où la loi de Hooke est valable

$$w_\sigma = A_{\text{él}} = \frac{\sigma^2}{2E},$$

où σ est la contrainte, E le module de Young.

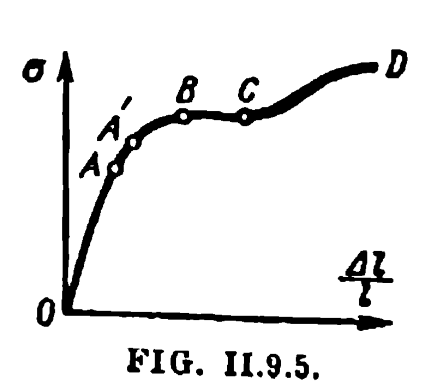


FIG. II.9.5.

11° La *déformation de traction (de compression) omnidirectionnelle* consiste en l'augmentation (la diminution) du volume du corps sans modification de sa forme sous l'influence de forces de traction (de compres-

sion) réparties uniformément sur toute la surface du corps. En vertu de la loi de Hooke

$$\sigma = K \frac{\Delta V}{V},$$

où $\frac{\Delta V}{V}$ est l'augmentation (la diminution) relative du volume du corps soumis à la contrainte σ. K est le *module d'élasticité volumique omnidirectionnelle* et a le sens de la contrainte, à laquelle l'augmentation (la diminution) relative du volume est égale à l'unité:

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\mu)},$$

où E est le module de Young, μ le coefficient de Poisson.

12° On appelle *cisaillement* la déformation lors de laquelle toutes les couches planes du solide qui sont parallèles à un certain plan *(plan de cisaillement)* se déplacent parallèlement l'une à l'autre (fig. II.9.6) sans se distordre et sans se modifier en dimensions. Le cisaillement a lieu sous l'action de la force **F** appliquée tangentiellement à la face BC, parallèle au plan de cisaillement. La face AD est fixée. L'*angle de cisaillement* θ *(cisaillement relatif)*, exprimé en radians, mesure la déformation $\frac{\Delta x}{x}$ (4°).

Pour de petites déformations

$$\theta \approx \operatorname{tg} \theta = \frac{\Delta x}{x},$$

où $\Delta x = CC'$ est le *cisaillement absolu.*

En vertu de la loi de Hooke le cisaillement relatif est proportionnel à la contrainte tangentielle (de cisaillement):

$$\sigma_\tau = \frac{F}{S} = G\theta,$$

où G est le *module de rigidité (module de cisaillement)*, numériquement égal à la contrainte tangentielle qui provoque un cisaillement relatif égal à l'unité. Il est lié au module de Young E (6°) et au coefficient de Poisson μ (7°) par la relation

$$G = \frac{E}{2}(1 + \mu)^{-1}.$$

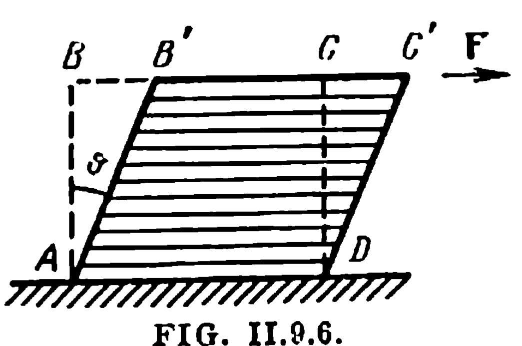


FIG. II.9.6.

13° L'énergie potentielle spécifique (par unité de volume) du corps déformé lors du cisaillement est:

$$w_s = \frac{\sigma_\tau^2}{2G}.$$

14° On appelle *torsion* la déformation d'une éprouvette, ayant une extrémité fixée, qui a lieu sous l'action d'un couple de forces, dont le plan est perpendiculaire à l'axe de l'éprouvette. Le moment M_t de ce couple est appelé *moment de torsion*. La torsion consiste en la rotation relative de sections parallèles l'une à l'autre et orientées perpendiculairement à l'axe de l'éprouvette. En cas de torsion d'un corps cylindrique circulaire, les sections perpendiculaires à son axe tournent autour de celui-ci, conservant leur forme et restant parallèles l'une à l'autre. Si φ est l'angle de rotation, z la distance de l'extrémité fixée, mesurée suivant l'axe de l'éprouvette, la différence des angles de rotation de deux sections infiniment proches (éloignées l'une de l'autre de dz) est alors:

$$d\varphi = \frac{d\varphi}{dz}\, dz = \theta' dz,$$

où $\theta' = \frac{d\varphi}{dz}$ est l'*angle de torsion relatif*; cet angle mesure la déformation. La rotation complète d'une section donnée est proportionnelle à sa distance de l'origine des coordonnées:

$$\varphi = \theta' z.$$

15° Loi de Hooke pour la torsion:

$$\theta' = \frac{M_t}{GJ_p},$$

où M_t est le moment de torsion, G le module de cisaillement, J_p le moment polaire d'inertie. Pour une section circulaire de rayon R, $J_p = \pi R^4/2$.

L'angle de rotation entre deux sections extrêmes de l'éprouvette de longueur L est:

$$\varphi = \frac{M_t L}{GJ_p}, \quad \text{ou} \quad M_t = \frac{GJ_p}{L}\varphi.$$

Le moment qui tourne d'un angle φ la barre circulaire homogène de longueur L et de rayon R est alors:

$$M_t = \frac{\pi G}{2}\frac{R^4}{L}\varphi$$

16° L'énergie potentielle spécifique (par unité de volume) d'un cylindre circulaire déformé est:

$$w_i = \frac{M_t^2 r^2}{2GJ_p^2},$$

où r est la distance de l'axe du cylindre.

17° Si à l'extrémité inférieure d'un fil cylindrique est fixé un corps dont le moment d'inertie par rapport à l'axe du fil est J, l'équation différentielle des *oscillations de torsion* (p. 123) est de la forme:

$$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{GJ_p}{L}\varphi.$$

Sa résolution permet de calculer la période des oscillations de torsion.

CHAPITRE 10

Corps amorphes

1. Propriétés générales et structure des corps amorphes

1° On appelle *corps amorphes* les substances qui à l'état condensé sont dépourvues de structure cristalline mais qui possèdent, à la différence des liquides, une élasticité de forme (leur module de rigidité n'est pas nul, p. 296). Le verre ordinaire, le soufre, le sélénium, la glycérine et la plupart des composés macromoléculaires (p. 305) se trouvent à l'état amorphe.

2° Dans des conditions déterminées, les corps amorphes *se vitrifient*, autrement dit, passent des propriétés et des lois de l'état liquide aux propriétés et aux lois de l'état solide.

3° Le passage d'un corps amorphe de l'état liquide à l'état solide par variation de la température ou de la pression est appelé *vitrification structurale*. Lors d'un tel passage le volume, l'enthalpie, ainsi que les propriétés mécaniques, électriques et autres subissent une certaine modification.

4° A chaque température donnée du liquide correspond sa structure moléculaire d'équilibre.

Avec la variation de température, la structure du liquide subit une reconstruction et à chaque nouvelle température tend vers la structure d'équilibre. La vitesse de reconstruction est déterminée par le temps de relaxation $\bar{\tau}$ (p. 266). Aux températures élevées $\bar{\tau}$ est petit et la structure du liquide ne diffère pratiquement pas de la structure d'équilibre. La variation des propriétés (du volume par exemple) est liée au changement de la disposition mutuelle des particules et des distances moyennes entre celles-ci (domaine AA' sur la figure II.10.1). Lors du refroidissement du corps avec une certaine vitesse finie, $\bar{\tau}$ croît et la variation de la structure se laisse dépasser par la variation de la température, et la structure cesse d'être équilibrée.

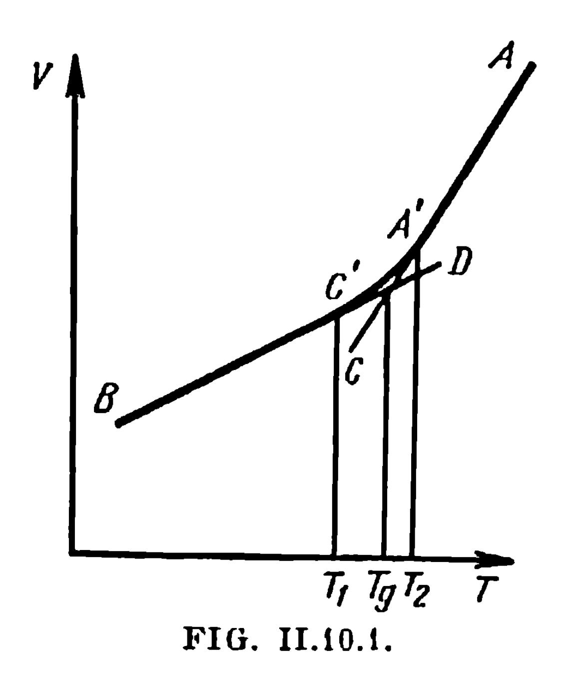


FIG. II.10.1.

La température T_2 (fig. II.10.1) est la limite supérieure du domaine de vitrification. Au-dessous d'une certaine température le temps de relaxation devient tellement grand que la variation de structure cesse entièrement. Cette température T_1 représente la limite inférieure du domaine de vitrification. Au-dessous de T_1 la substance se trouve en état solide ($C'B$ sur la figure II.10.1). Le corps amorphe à l'état solide est appelé *verre*.

5° La vitrification et le *ramollissement* (passage de l'état solide à l'état liquide avec l'élévation de température) ont lieu dans un domaine de températures assez grand s'étendant à plusieurs dizaines de degrés. Néanmoins, on caractérise conventionnellement la transition par une seule température, appelée respectivement *température de vitrification* T_g ou *température de ramollissement* T_g, choisie arbitrairement dans l'intervalle de transition. Dans l'étude des variations volumiques, on détermine habituellement ces températures par le point d'intersection des paliers (BD et CA sur la figure II.10.1), dans l'étude des variations de capacité calorifique, on les détermine par le point d'inflexion de la courbe C_p — — T, etc.

6° Lors du refroidissement du corps amorphe, les propriétés de celui-ci dépendent uniquement de la température et de la vitesse de refroidissement. La vitesse de refroidissement w détermine la position du domaine de vitrification sur l'échelle de températures (plus grande est w, plus élevée est T_g).

7° Lors du chauffage d'un corps amorphe solide, le caractère de variation des propriétés de celui-ci dans le domaine de ramollissement dépend du traitement thermique préalable (le traitement thermique influe quelque peu sur les propriétés de l'échantillon à l'état solide, mais surtout il se manifeste dans le domaine de ramollissement). Lors du chauffage les propriétés de l'échantillon dépendent non seulement de la vitesse de chauffage, mais aussi de la structure fixée dans l'échantillon, c'est-à-dire de la vitesse du refroidissement préalable qui détermine la structure de congélation.

Plus la structure fixée diffère de la structure d'équilibre (à une température donnée), plus « anomale » est la variation des propriétés dans le domaine de ramollissement. Si la vitesse de chauffage est plus grande que la vitesse du refroidissement préalable du corps, le domaine de ramollissement est au-dessus du domaine de vitrification. Dans le domaine de ramollissement, l'échantillon possède une structure plus compacte que la structure d'équilibre à une température donnée; la relaxation de la structure conduit à un empilement moins compact des particules, autrement dit, à une augmentation brusque du volume lors du ramollissement (fig. II.10.2).



FIG. II.10.2.

8° Lorsqu'on maintient la substance en état non équilibré à températures suffisamment élevées, sa structure au cours du temps se rapproche de la structure d'équilibre (relaxation). La vitesse de ce processus augmente de façon brusque avec l'élévation de température; pour les structures correspondant aux températures supérieures à la température de recuit, la vitesse de rapprochement de l'équilibre est plus grande que celle des structures correspondant aux températures inférieures à la température de recuit.

9° Lors de la vitrification (ou du ramollissement) les coefficients de dilatation thermique et la capacité calorifique changent de façon brusque, ce qui rend la vitrification semblable à une transition de phase du second ordre. Toutefois la différence de principe entre la vitrification structurale et la transition de phase consiste en ce qui suit:

a) la transition de phase se caractérise par un passage d'une structure moins ordonnée à une structure plus ordonnée; la transformation du liquide en verre n'est liée à aucune variation de mise en ordre de la structure;

b) lors d'une transition de phase on observe le passage d'une structure équilibrée thermodynamiquement à une autre structure équilibrée. Dans le cas de vitrification a lieu le passage d'une structure équilibrée (liquide) à une structure non équilibrée (verre);

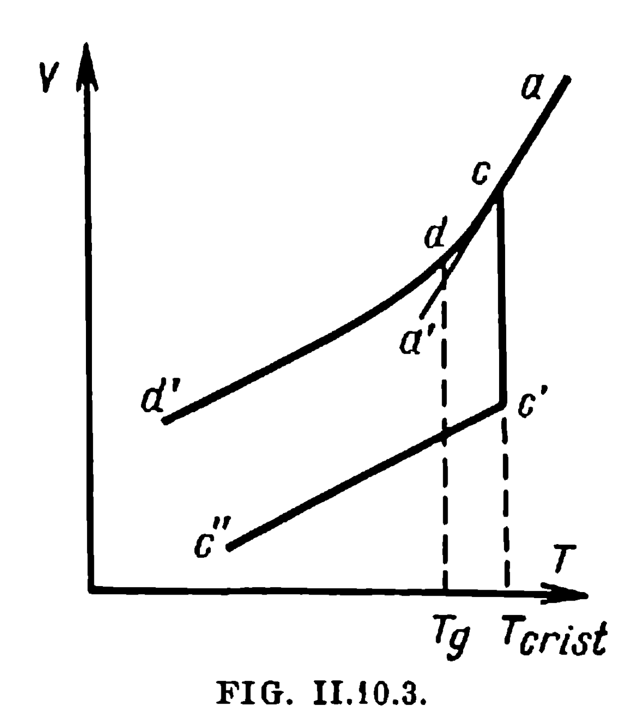


FIG. II.10.3.

c) aux grandes vitesses de refroidissement la température initiale de la transition de phase du premier ordre peut dépendre de la vitesse (une surfusion peut être observée). Dans ce cas, avec l'accroissement de la vitesse le degré de surfusion s'élève et la température initiale de la transition de phase s'abaisse. Par contre, la température de vitrification s'élève avec l'accroissement de la vitesse de refroidissement, ce qui montre la nature cinétique et non thermodynamique de ce passage.

10° La courbe *acc'c''* (fig. II.10.3) représente schématiquement la variation de volume du liquide au cours de la cristallisation. Aux températures inférieures à T_{crist}, le cristal possède une énergie libre minimale. La structure cristalline est thermodynamiquement équilibrée lorsque $T < T_{\text{crist}}$. Si l'on parvient à sous-refroidir le liquide, la substance se trouve être à l'état d'équilibre métastable (segment *ca'*) lorsque $T < T_{\text{crist}}$. On ne réussit à obtenir un liquide surfondu que dans un intervalle de température relativement petit (segment *cd*), un refroidissement très lent étant nécessaire pour la conservation de l'équilibre métastable. Au-dessous de cet intervalle, la substance se trouve en état non équilibré de vitrification (segment *dd'*). On voit que le liquide surfondu et les verres ne sont pas la même chose. L'état de liquide surfondu est un état limite « d'équilibre » pour les verres.

2. Propriétés visco-élastiques des corps amorphes

1° Les propriétés visco-élastiques des corps amorphes, autrement dit, la présence simultanée du module de cisaillement G et du coefficient de frottement interne (viscosité dynamique) η (p. 220), se manifestent de façon particulièrement nette dans le domaine de vitrification. Qualitativement la relation existant entre la con-

trainte tangentielle σ_τ (p. 296) et le cisaillement θ se décrit par l'*équation de Maxwell*:

$$\frac{d\sigma_\tau}{dt} + \frac{G}{\eta}\sigma_\tau = G\frac{d\theta}{dt}.$$

Il est possible également d'écrire une équation analogue pour la traction longitudinale (p. 294) en substituant au module de cisaillement le module de Young. (Généralement parlant, l'équation de Maxwell n'est pas applicable aux hauts polymères. Sur la visco-élasticité des polymères cf. p. 320.)

2° La solution de l'équation de Maxwell pour un corps, qui n'était pas déformé jusqu'à l'instant $t = 0$, est de la forme

$$\sigma_\tau(t) = G\theta(t) - \frac{G}{\tau_M}\int_0^t e^{\frac{u-t}{\tau_M}}\theta(u)du,$$

où $\tau_M = \eta/G$ est appelé *temps maxwellien de relaxation*. Le sens de ce terme est mis en évidence quand on suit la variation de σ_τ lors d'une déformation qui devient permanente après l'instant t':

$$\sigma_\tau(t) = \sigma_\tau(t')\, e^{-\frac{t-t'}{\tau_M}} \quad (t \geqslant t').$$

Par conséquent τ_M est le temps caractérisant la *relaxation des contraintes.*

3° En cas de déformation périodique $\theta = \theta_0 \sin \omega t$, on a:

$$\sigma_\tau(t) = \frac{\eta\omega\theta_0}{\sqrt{1+\tau_M^2\omega^2}}\sin(\omega t + \delta),$$

où le déphasage est $\delta = \mathrm{arc\,cotg}\, \omega\tau_M$. Aux hautes fréquences telles que $\omega \gg \tau_M^{-1}$

$$\sigma_\tau(t) = G\theta(t),$$

ce qui signifie qu'aux hautes fréquences la loi de Hooke a lieu. Aux basses fréquences telles que $\omega \ll \tau_M^{-1}$

$$\sigma_\tau = \eta\frac{d\theta}{dt},$$

ce qui représente l'équation de Newton pour la viscosité (p. 220). Donc, aux hautes fréquences les corps visco-élastiques se compor-

tent comme des solides, et aux basses fréquences comme des liquides visqueux.

4° Le frottement interne conduit à la dissipation de l'énergie mécanique (p. 72). Dans le cas où le corps visco-élastique est soumis à la charge périodique, la dissipation d'énergie par unité de volume en une période est égale à

$$\pi\eta\theta_0^2\,\omega/(1+\tau_M^2\omega^2).$$

Cette grandeur atteint son maximum pour $\omega=\tau_M^{-1}$. Parfois on appelle également température de vitrification la température à laquelle est observé un maximum de dissipation (maximum de pertes mécaniques). Toutefois, on doit tenir compte de la différence entre la vitrification sous l'action extérieure variable et la vitrification structurale, étant donné que la première n'est liée à aucune variation de structure du corps.

CHAPITRE 11

Polymères

1. Propriétés générales et structure des polymères

1° On appelle *polymères* les composés dont les molécules sont formées d'un nombre énorme de groupes répétés de *motifs monomères* (les groupes se trouvant aux extrémités de la molécule, appelés *groupements terminaux*, diffèrent quelque peu par leur structure des monomères fondamentaux). Le nombre de motifs monomères d'une molécule est appelé *degré de polymérisation*.

2° Les polymères se divisent en polymères *linéaires* et *tridimensionnels*. Les polymères linéaires sont les corps composés constitués de molécules linéaires, c'est-à-dire de molécules dans lesquelles chaque monomère, à l'exception des groupements terminaux, est lié seulement à deux monomères voisins. Les molécules linéaires sont appelées également *chaînes polymères*. Les formules structurales des molécules de quelques polymères linéaires importants sont données ci-après:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & H & & H & & H & & H & & H & & H & & H & \\
 & | & & | & & | & & | & & | & & | & & | & \\
\ldots - & C & - & C & - & C & - & C & - & C & - & C & - & C & - \ldots \\
 & | & & | & & | & & | & & | & & | & & | & \\
 & H & & H & & H & & H & & H & & H & & H &
\end{array} \quad \text{polyéthylène (polytène),}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & F & & F & & F & & F & & F & & F & \\
 & | & & | & & | & & | & & | & & | & \\
\ldots - & C & - & C & - & C & - & C & - & C & - & C & - \ldots \\
 & | & & | & & | & & | & & | & & | & \\
 & F & & F & & F & & F & & F & & F &
\end{array} \quad \text{polytétrafluoréthylène (téflon),}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & \mathrm{H} & & \mathrm{H} & & \mathrm{H} & & \mathrm{H} & & \mathrm{H} & & \mathrm{H} & \\ & | & & | & & | & & | & & | & & | & \\ \ldots - & \mathrm{C} & - & \mathrm{C} & - & \mathrm{C} & - & \mathrm{C} & - & \mathrm{C} & - & \mathrm{C} & - \ldots \\ & | & & | & & | & & | & & | & & | & \\ & \mathrm{H} & & \mathrm{Cl} & & \mathrm{H} & & \mathrm{Cl} & & \mathrm{H} & & \mathrm{Cl} & \end{array}$$ polychlorure de vinyle,

$$\begin{array}{ccccccccccc} & \mathrm{H} & & \mathrm{H} & & \mathrm{H} & & \mathrm{H} & & \mathrm{H} & \\ & | & & | & & | & & | & & | & \\ \ldots - & \mathrm{C} & - & \mathrm{C} & - & \mathrm{C} & - & \mathrm{C} & - & \mathrm{C} & - \ldots \\ & | & & | & & | & & | & & | & \\ & \mathrm{H} & & \mathrm{C} & & \mathrm{H} & & \mathrm{C} & & \mathrm{H} & \\ & & \mathrm{CH} & & \mathrm{CH} & \mathrm{CH} & & \mathrm{CH} & & & \\ & & | & & \| & | & & \| & & & \\ & & \mathrm{CH} & & \mathrm{CH} & \mathrm{CH} & & \mathrm{CH} & & & \\ & & & \mathrm{CH} & & & \mathrm{CH} & & & & \end{array}$$ polystyrène,

$$\begin{array}{ccccccccc} & \mathrm{H} & & \mathrm{CH_3} & & \mathrm{H} & & \mathrm{CH_3} & \\ & | & & | & & | & & | & \\ \ldots - & \mathrm{C} & - & \mathrm{C} & \text{———} & \mathrm{C} & - & \mathrm{C} & - \ldots \\ & | & & | & & | & & | & \\ & \mathrm{H} & & \mathrm{C=O} & & \mathrm{H} & & \mathrm{C=O} & \\ & & & | & & & & | & \\ & & & \mathrm{O-CH_3} & & & & \mathrm{O-CH_3} & \end{array}$$ polyméthacrylate de méthyle (plexiglas),

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & \mathrm{H} & & \mathrm{H} & & & & \mathrm{H} & & \mathrm{H} & & & \\ & & & | & & & & | & & | & & & \\ \ldots - & \mathrm{C} & - & \mathrm{C} & = & \mathrm{C} & \text{——} & \mathrm{C} & - & \mathrm{C} & = & \mathrm{C} & - \ldots \\ & | & & & & | & & | & & & & | & \\ & \mathrm{H} & & & & \mathrm{CH_3} & & \mathrm{H} & & & & \mathrm{CH_3} & \end{array}$$ polyisoprène (caoutchouc naturel, gutta-percha),

$$\begin{array}{ccccccc} & \mathrm{CH_3} & & & \mathrm{CH_3} & & \\ & | & & & | & & \\ \ldots - & \mathrm{Si} & - \mathrm{O} & \text{——} & \mathrm{Si} & - \mathrm{O} & - \ldots \\ & | & & & | & & \\ & \mathrm{CH_3} & & & \mathrm{CH_3} & & \end{array}$$ polydiméthylsiloxane.

3° Il n'existe pratiquement pas de molécules polymères rigoureusement linéaires; toutes sont plus ou moins *ramifiées*, c'est-à-dire qu'on rencontre dans celles-ci des motifs monomères auxquels adhèrent trois motifs voisins et plus *(points de ramification)*. On distingue habituellement dans les molécules ramifiées la *chaîne principale* et les *chaînes latérales*.

4° Dans les polymères tridimensionnels les molécules sont réunies entre elles par des liaisons chimiques (par des liaisons trans-

versales) de telle façon qu'il se forme un réseau spatial à trois dimensions. Dans le cas où les liaisons transversales sont à ce point rares que les tronçons de molécules polymères linéaires entre les liaisons transversales contiennent un grand nombre d'unités moléculaires, ces polymères tridimensionnels sont appelés ***polymères réticulés*** et leurs tronçons ***chaînes du réseau***.

5° Les polymères linéaires sont solubles, ils forment des solutions vraies (p. 274) et peuvent exister à l'état liquide. Les polymères tridimensionnels sont infusibles et insolubles, ils peuvent seulement gonfler dans le solvant, absorbant une quantité limitée de celui-ci et conservant principalement les propriétés du corps solide.

6° Les polymères dont les molécules sont constituées de motifs monomères de différente nature chimique (habituellement de deux types) sont appelés ***copolymères***. Les copolymères dans les molécules desquels de longues séquences ***(blocs)*** constituées de monomères d'un même type alternent avec des séquences de monomères d'un autre type sont appelés ***copolymères à longues séquences***. Si, dans un polymère ramifié, de longues chaînes latérales sont formées de monomères d'un type autre que celui de la chaîne principale, le polymère est dit ***greffé***.

7° On classe également les polymères suivant la régularité de la disposition des chaînes latérales par rapport à la chaîne principale. Imaginons que la chaîne polymère s'étire en ligne, dans ce cas les chaînes latérales peuvent se disposer d'un même côté du plan de la chaîne principale ou se disposer de part et d'autre du plan de la chaîne principale, en présentant une alternance régulière ou bien irrégulière (polymères ***isotactique***, ***syndiotactique*** et ***atactique*** respectivement). Les formules structurales du polypropylène iso, syndio et atactique sont amenées ci-après:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccccccccc}
 & & H & & H & & H & & H & & H & & H & & H & & H & & H & & H & & \\
 & & | & & | & & | & & | & & | & & | & & | & & | & & | & & | & & \\
\ldots & - & C & - & C & - & C & - & C & - & C & - & C & - & C & - & C & - & C & - & C & - & \ldots, \\
 & & | & & | & & | & & | & & | & & | & & | & & | & & | & & | & & \\
 & & H & & CH_3 & & H & & CH_3 & & H & & CH_3 & & H & & CH_3 & & H & & CH_3 & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccccccccc}
 & & H & & H & & H & & CH_3 & & H & & H & & H & & CH_3 & & H & & H & & \\
 & & | & & | & & | & & | & & | & & | & & | & & | & & | & & | & & \\
\ldots & - & C & - & C & - & C & - & C & - & C & - & C & - & C & - & C & - & C & - & C & - & \ldots, \\
 & & | & & | & & | & & | & & | & & | & & | & & | & & | & & | & & \\
 & & H & & CH_3 & & H & & H & & H & & CH_3 & & H & & H & & H & & CH_3 & &
\end{array}
$$

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} & \mathrm{H} & \mathrm{H} & \mathrm{H} & \mathrm{H} & \mathrm{H} & \mathrm{CH_3} & \mathrm{H} & \mathrm{H} & \mathrm{H} & \mathrm{CH_3} & \mathrm{H} & \mathrm{CH_3} & \\ & | & | & | & | & | & | & | & | & | & | & | & | & \\ \ldots - & \mathrm{C}- & \mathrm{C}- & \mathrm{C}- & \mathrm{C}- & \mathrm{C}- & \mathrm{C}- & \mathrm{C}- & \mathrm{C}- & \mathrm{C}- & \mathrm{C}- & \mathrm{C}- & \mathrm{C}- & \ldots \\ & | & | & | & | & | & | & | & | & | & | & | & | & \\ & \mathrm{H} & \mathrm{CH_3} & \mathrm{H} & \mathrm{CH_3} & \mathrm{H} & \mathrm{H} & \mathrm{H} & \mathrm{CH_3} & \mathrm{H} & \mathrm{H} & \mathrm{H} & \mathrm{H} & \end{array}$$

8° A la différence des substances à bas poids moléculaire, les polymères n'ont pas de poids moléculaire déterminé. Ils représentent un mélange de molécules de poids différent ou, autrement dit, de différent degré de polymérisation. Par fractionnement on peut diviser la substance en fractions contenant des molécules à peu près de même poids. La distribution suivant les poids moléculaires dans un polymère est donnée par les concentrations pondérales des fractions g_i ou par les grandeurs N_i, qui représentent les nombres de molécules dans la i-ième fraction.

9° Il existe plusieurs définitions des poids moléculaires moyens des polymères. Les plus usités sont le *poids moléculaire moyen en nombre:*

$$\bar{\mu}_N = \frac{\sum\limits_i N_i \mu_i}{\sum\limits_i N_i} = \frac{1}{\sum\limits_i g_i / \mu_i},$$

où μ_i est le poids moléculaire de la i-ième fraction, la sommation s'étend à toutes les fractions; le *poids moléculaire moyen en poids:*

$$\bar{\mu}_w = \sum g_i \mu_i = \frac{\sum\limits_i N_i \mu_i^2}{\sum\limits_i N_i \mu_i}$$

et le *poids moléculaire moyen viscosimétrique* (p. 315). La grandeur $\bar{\mu}_w$ est toujours plus grande que $\bar{\mu}_N$. La différence entre elles caractérise l'amplitude de la distribution suivant les poids moléculaires ou, autrement dit, la *polydispersion* du polymère.

10° Dans les molécules polymères ayant de simples liaisons de valence dans leur chaîne principale (des liaisons unités C—C par exemple), on note une *rotation interne* plus ou moins freinée autour de ces liaisons. De ce fait la molécule polymère ayant un grand nombre de telles liaisons possède une quantité immense de *configurations (conformations)* diverses. Ceci même montre la souplesse de la chaîne polymère qui tient des liaisons unités. La rotation autour des liaisons doubles est freinée si intensément que seulement de faibles oscillations de torsion y sont possibles (p. 123). Les longueurs

des liaisons de valence entre atomes et les angles entre liaisons de valence (angles de valence) subissent également de faibles oscillations. Par comparaison avec la grande amplitude de la rotation autour des liaisons simples, ces petites oscillations sont à négliger, et on considère que la chaîne polymère est constituée d'éléments rigides: *maillons*, qui peuvent tourner l'un par rapport à l'autre suivant les cônes des angles de valence (fig. II.11.1). Par exemple, dans le polyéthylène la liaison C—C représente un maillon, la chaîne du polyisoprène est constituée de deux maillons alternatifs: liaison C—C et groupe C—C = C—C.

11° Les configurations d'une chaîne polymère sont fonction d'un jeu d'angles de rotation interne φ_i (i est le numéro du maillon) déterminant la rotation par rapport à une certaine position initiale. Habituellement on accepte comme origine du barème la *transconformation* pour laquelle les maillons $i-2$, $i-1$, i sont situés dans un même plan et le i-ième maillon est parallèle au $i-2$-ième maillon (fig. II.11.1).

12° Aux différentes valeurs de φ_i correspond différente énergie potentielle de rotation interne. Les configurations répondant à un minimum d'énergie potentielle (configurations stables) sont appelées *isomères de rotation*. Parmi les nombreux jeux possibles d'isomères de rotation il y en a énergétiquement plus stables, répondant à de plus bas minimums d'énergie potentielle. Les configurations les plus stables des polymères stéréospécifiques iso et syndiotactiques (p. 307) sont les configurations dans lesquelles les atomes de la chaîne principale sont situés sur une ligne hélicoïdale (configuration en spirale). Le zigzag plan (transconformation) est un cas particulier de configuration en spirale.

13° La complexité de la structure moléculaire des polymères conditionne la diversité des structures supermoléculaires des polymères: d'une structure entièrement amorphe à une structure entièrement ordonnée (structure cristalline). Voilà pourquoi on ne peut pas toujours dire dans quel état, liquide ou solide, cristallin ou amorphe, se trouve le polymère.

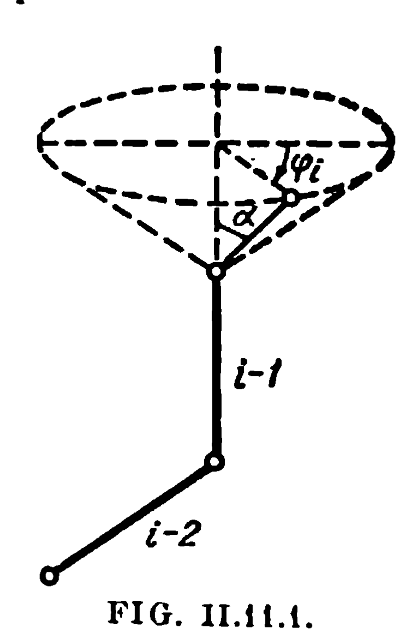


FIG. II.11.1.

14° Aux températures inférieures aux températures de vitrification (p. 299) ou de fusion (p. 317) ont lieu des sauts brusques entre les isomères de rotation, ce qui entraîne une variation continue des configurations de la chaîne. Les mouvements des

tronçons de chaîne suffisamment éloignés les uns des autres peuvent être admis indépendants. De tels tronçons sont appelés segments cinétiques ou simplement segments et le mouvement thermique lors duquel s'opère la modification des conformations de toute la chaîne, mouvement segmentaire. Dans les polymères, à part le mouvement segmentaire, ont lieu d'autres mouvements de petite échelle, principalement du type oscillations de torsion (p. 123) des chaînes latérales ou de petits tronçons de la chaîne principale. Ces mouvements (par groupes) peuvent avoir lieu également à des températures inférieures aux températures de vitrification ou de fusion.

2. Statistique de configuration des chaînes polymères

1° La chaîne polymère possède un grand nombre de degrés de liberté; aussi les grandeurs caractérisant la molécule, obtenues expérimentalement, sont-elles des moyennes statistiques (p. 229) suivant toutes les configurations possibles. Le calcul de ces moyennes s'effectue à l'aide des méthodes de la *statistique de configuration des chaînes polymères.*

2° Les interactions intermoléculaires se divisent en deux types. Au premier type se rapportent les interactions conduisant au freinage de la rotation interne: ce sont les interactions entre maillons proches appelées *interactions à courte distance.* Au second type se rapportent les interactions entre maillons qui sont éloignés d'une distance considérable, mais qui peuvent éventuellement se rapprocher au cours de l'agitation thermique et entrer alors en *interactions à longue distance.* Le trait le plus essentiel de ces interactions consiste en ce que le volume de l'espace occupé par un maillon est inaccessible aux autres maillons. C'est pourquoi les interactions à longue distance sont encore appelées *effets volumiques (effets de volume exclu).*

3° A l'aide de la statistique de configuration sont calculés en particulier le carré moyen de la distance entre les extrémités de la chaîne $\overline{h^2}$ et le carré moyen du rayon de giration $\overline{R^2} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\overline{r_i^2}$, où $\overline{r_i^2}$ est le carré moyen de la distance entre le i-ième maillon et le centre d'inertie de la molécule et N le nombre de maillons dans une molécule. Les grandeurs $\overline{h^2}$ et $\overline{R^2}$ caractérisent la souplesse de la chaîne polymère. En plus du calcul des valeurs

moyennes, s'impose le problème du calcul des fonctions de distribution, par exemple des fonctions de distribution pour la distance entre les extrémités de la chaîne $w(h)$, autrement dit, de la probabilité $w(h)\,dh$ pour que les extrémités de la chaîne soient éloignées d'une distance comprise entre h et $h + dh$.

4° L'influence du solvant peut conduire à la possibilité de négliger les interactions à longue distance (voir pour plus de détails pp. 312-314) à une certaine température. Dans ces conditions on ne tient compte que des interactions à courte distance.

5° Comme dans les autres problèmes de physique statistique, la molécule polymère réelle est remplacée par un modèle reflétant plus ou moins ses propriétés. Le modèle le plus simple et le plus grossier est le *modèle des segments articulés librement*, d'après lequel la chaîne polymère est constituée de *z segments rigides* de longueur a. Les directions de ces segments dans l'espace sont entièrement indépendantes. Le segment est toujours plus grand que le maillon et sa longueur représente un paramètre qui caractérise la souplesse de la chaîne. Dans ce modèle

$$\overline{h^2} = za^2, \qquad \overline{R^2} = \overline{h^2}/6.$$

6° La formulation de modèles plus exacts inclut des suppositions sur le caractère de l'énergie potentielle de la chaîne $W_p(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N)$, où φ_i sont les angles de rotation interne (p. 308). La négligence du freinage de rotation interne signifie que $W_p = 0$. Admettant, pour simplifier, que tous les maillons sont identiques et de longueur l et que les angles de valence sont égaux à $\pi-\alpha$, on trouve lors de la réalisation des conditions $N \gg 1$ et $W_p = 0$:

$$\overline{h^2} = Nl^2 \frac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}.$$

7° La prise en considération du freinage de rotation interne ou, autrement dit, des interactions à courte distance conduit à l'apparition d'un facteur complémentaire $\sigma^2 > 1$ et

$$\overline{h^2} = Nl^2 \frac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}\,\sigma^2.$$

Le facteur σ dépend de la structure d'une macromolécule concrète, en particulier, il peut être exprimé par la différence des énergies des isomères de rotation.

8° La distribution des distances entre les extrémités de la chaîne (p. 310), compte tenu des interactions à courte distance seulement pour les *chaînes très enroulées* (les chaînes pour lesquelles h est très inférieur à sa valeur maximale correspondant à une chaîne

entièrement étirée (transconformation)), coïncide avec la distribution de Gauss:

$$w(h)dh = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left(\frac{6}{\overline{h^2}}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{3h^2}{2\overline{h^2}}\right) h^2dh.$$

La distribution valable pour tout le domaine de variation de h n'est obtenue que pour le modèle des segments articulés librement. Quand $z \gg 1$, elle prend la forme:

$$\ln\left[\frac{w(h)}{4\pi h^2}\right] = z\left[ln\,\frac{sh\,L^{-1}(t)}{L^{-1}(t)} - tL^{-1}(t)\right],$$

où $t = h/za$ est l'extension relative de la chaîne, $L^{-1}(t)$ la fonction inverse de Langevin (p. 380). Le développement en série par rapport à t conduit à la relation

$$\ln\left[\frac{w(h)}{4\pi h^2}\right] = -z\left[\frac{3}{2}t^2 + \frac{9}{20}t^4 + \frac{99}{350}t^6 + \ldots\right],$$

où le terme quadratique correspond à la distribution de Gauss. Ces formules décrivent suffisamment bien la distribution pour une chaîne polymère réelle.

9° Les interactions à longue distance conduisent à la *dilatation de la pelote moléculaire* consistant en l'accroissement des distances moyennes entre les extrémités de la chaîne. La dilatation se décrit approximativement par le paramètre α montrant de combien de fois ont augmenté les dimensions linéaires moyennes de la pelote par comparaison avec ses dimensions données sans tenir compte des interactions à longue distance. La théorie thermodynamique approchée donne:

$$\alpha^5 - \alpha^3 = 2C_\mu\Psi_1\left(1 - \frac{\Theta}{T}\right)\sqrt{\mu}.$$

Ici Ψ_1 est un paramètre caractérisant la variation de l'entropie lors du mélange des segments de la chaîne et des molécules de solvant, Θ la *température de Flory* caractérisant l'énergie d'interaction des segments par rapport à l'énergie d'interaction des segments avec le solvant, μ le poids moléculaire de la chaîne,

$$C_\mu = \frac{27}{2^{5/2}\,\pi^{3/2}}\,\frac{\bar{v}^2}{N_A v_1}\left(\frac{\overline{h_0^2}}{\mu}\right)^{-3/2},$$

$\bar{v}$ est le volume spécifique du polymère, v_1 le volume molaire du solvant, N_A le nombre d'Avogadro, $\overline{h_0^2}$ le carré moyen de la distance entre les extrémités de la chaîne en l'absence d'interactions à longue distance; $\overline{h_0^2}/\mu$ ne dépend pas de μ.

10° A la température Θ (au point Θ) $\alpha = 1$, et l'effet sphérique n'influe pas sur les dimensions de la chaîne. Dans les solvants actifs Θ est plus basse que la température de congélation du solvant. Le point Θ ne peut être atteint que dans les solvants faibles. La température T_c à laquelle le polymère précipite est liée à la température de Flory par la relation

$$\frac{1}{T_c} = \frac{1}{\Theta}\left(1 + \frac{b}{\sqrt{\mu}}\right),$$

où b est une constante. Par conséquent, le point Θ est la température de précipitation d'un polymère de poids moléculaire infiniment grand.

11° La formule 9° concorde quantitativement mal avec les résultats de l'expérience vu la grossièreté des hypothèses faites lors de sa déduction. On ne réussit à développer une théorie exacte que dans le domaine d'interactions à longue distance insignifiantes. Elle est fondée sur le *modèle du «collier de perles»* d'après lequel la chaîne est constituée de segments articulés librement qui interagissent entre eux par des forces centrales. Pour plus de clarté, on peut s'imaginer que la chaîne en «collier de perles» est constituée de grains enfilés sur des tiges (infiniment fines) articulées librement. On applique dans les théories fondées sur le modèle du «collier de perles» le développement par rapport au petit paramètre:

$$\xi = \left(\frac{3}{2\pi}\right)^{3/2} \frac{\sqrt{z}\, v_0}{a^3},$$

où z est le nombre de segments, a la longueur d'un segment (p. 310) et la quantité

$$v_0 = 4\pi \int_0^\infty \left(1 - e^{-W_p(r_{ij})/kT}\right) dr_j$$

est le *volume exclu efficace*; ici r_{ij} est la distance entre les i-ième et j-ième segments de la chaîne et $W_p(r_{ij})$ l'énergie potentielle d'interaction des segments, excédentaire par rapport à l'énergie d'interaction entre les segments et les molécules de solvant. Si les segments interagissent comme des sphères rigides, $W_p(r_{ij}) = \infty$ quand $r_{ij} \leqslant d$; $W_p(r_{ij}) = 0$ quand $r_{ij} > d$; dès lors $v_0 = \frac{4}{3}\pi d^3$ est égal au volume de la sphère.

12° Si le volume exclu est à ce point petit que $\xi \ll 1$, les relations

$$\overline{h^2} = \overline{h_0^2}\left(1 + \frac{4}{3}\xi - 2{,}08\xi^2 + \ldots\right),$$

$$\overline{R^2} = \overline{R_0^2}\left(1 + \frac{134}{105}\xi - \ldots\right)$$

sont valables. Ici l'indice «zéro» spécifie les grandeurs calculées sans tenir compte des interactions à longue distance.

13° A courtes distances les segments se repoussent et $W_p > 0$; à longues distances la répulsion se change en attraction et $W_p < 0$. v_0 se décompose alors en deux parties qui dépendent de différente façon de la température: à une certaine température ces parties peuvent se compenser, et alors $v_0 = 0$. Donc, le point Θ correspond à la température à laquelle les interactions à longue distance se compensent ($v_0 = 0$). C'est pourquoi les relations données 12° sont valables seulement au voisinage du point Θ.

3. Solutions diluées de polymères

1° La loi de Van't Hoff (p. 275) pour les solutions de polymères est de la forme

$$\lim_{g\to 0} \frac{p}{g} = \frac{RT}{\bar{\mu}_N},$$

où $\bar{\mu}_N$ est le poids moléculaire moyen en nombre (p. 308). Les mesures de la pression osmotique p pour de faibles concentrations de g permettent de déterminer $\bar{\mu}_N$.

2° La viscosité des solutions polymères est caractérisée par les grandeurs suivantes: *viscosité relative* ou *rapport de viscosité* $\eta_{rel} = \eta/\eta_0$, où η et η_0 sont respectivement les coefficients de viscosité (p. 220) de la solution et du solvant pur; *viscosité spécifique* $\eta_{sp} = \eta_{rel} - 1$; *viscosité réduite (indice de viscosité)* $\eta_{réd} = \eta_{sp}/g$, où g est la concentration de la solution; *viscosité logarithmique* $\{\eta\} = \ln \eta_{rel} - \ln g$; *viscosité caractéristique (indice limite de viscosité)* $[\eta] = \lim\limits_{g\to 0} \eta_{réd} = \lim\limits_{g\to 0} \{\eta\}$.

3° Pour la viscosité caractéristique existe la formule empirique

$$[\eta] = k\bar{\mu}_v^a,$$

où k, a sont des constantes caractérisant le couple solvant-polymère,

$$\overline{\mu}_v = \left[\sum_{i=1}^{\infty} g_i \mu_i^a\right]^{1/a} = \left[\sum_{i=1}^{\infty} N_i \mu_i^{1+a} \Big/ \sum_{i=1}^{\infty} N_i \mu_i\right]^{1/a}$$

est le poids moléculaire moyen viscosimétrique (p. 308). $\overline{\mu}_v$ diffère du poids moléculaire moyen en poids $\overline{\mu}_w$ (p. 308) de 20%. Lorsque $a = 1$, $\overline{\mu}_w = \overline{\mu}_v$.

4° La viscosité caractéristique peut être calculée théoriquement en se fondant sur le modèle du «collier de perles» (p. 313). Suffisamment exacte pour les molécules longues est la supposition que le solvant se trouvant à l'intérieur de la pelote moléculaire est entièrement entraîné par celle-ci. Dans ce cas pour un polymère monodispersé:

$$[\eta] = \Phi(\overline{h^2})^{3/2}/\mu,$$

où Φ est une constante égale à $\sim 2{,}8 \cdot 10^{23}$ au voisinage du point Θ, qui décroît jusqu'à $\sim 2{,}0 \cdot 10^{23}$ dans les solvants actifs. Pour les macromolécules ramifiées (p. 306) Φ est plus grande que pour les macromolécules linéaires.

5° Le coefficient de diffusion (p. 221) des molécules polymères dans les solutions diluées peut être calculé à l'aide de la relation d'Einstein (pp. 254-255). Dans ce cas, pour un solvant totalement entraîné, le coefficient de diffusion est:

$$D = kT/P(\overline{h^2})^{1/2}\eta_0,$$

où k est la constante de Boltzmann (p. 158), T la température absolue et P un facteur numérique dépendant de la structure de la chaîne. Pour les macromolécules linéaires souples au voisinage du point Θ $P = 5{,}20$.

6° Aux poids moléculaires suffisamment grands, les dimensions de la chaîne polymère sont comparables en ordre de grandeur à la longueur d'onde λ de la lumière. Dans ce cas, la diffusion de la lumière (p. 710) par les solutions polymères est asymétrique. La fonction $P(\theta) = I(\theta)/I(0)$, où $I(\theta)$ est l'intensité de la lumière diffusée sous l'angle θ par rapport à la direction du faisceau incident, sert à mesurer l'asymétrie de la diffusion.

Pour de petits angles θ dans les solutions diluées la relation

$$P(\theta) = 1 - \frac{x^2}{3}$$

est valable, où $x^2 = \left(\frac{4\pi}{\lambda}\right)^2 \overline{R^2} \sin^2 \frac{\theta}{2}$, $\overline{R^2}$ est le carré moyen du rayon de giration (p. 310) de la chaîne.

D'après les valeurs connues de $P(0)$ pour de petits angles 0, on peut déterminer $\bar{R}^2$. Si l'on décrit la distribution des distances entre deux atomes quelconques de la chaîne par la fonction de Gauss, ce qui est vrai pour des chaînes suffisamment longues et souples au point Θ, on a:

$$P(\theta) = \frac{2}{x^2} (e^{-x} - 1 + x).$$

4. Cristallinité des polymères

1° Quand la température de cristallisation T_{crist} (p. 290) d'un polymère est supérieure à sa température de vitrification (p. 300), les polymères peuvent être en état cristallin. Toutes les autres conditions étant égales, ce sont des polymères de structure régulière qui ont T_{crist} plus élevée. Cristallisent aisément les polymères dont les chaînes latérales sont de même composition chimique ou au moins de dimensions identiques. Les copolymères (p. 307) cristallisent difficilement. T_{crist} des polymères iso et syndiotactiques est d'ordinaire supérieure à T_{crist} des polymères atactiques. Les polymères à chaînes rigides cristallisent plus facilement que les polymères à chaînes souples.

2° Il existe trois types de polymères cristallins:

a) les polycristaux où l'ordre de la disposition de maillons est à longue distance. Les dimensions des cristallites (p. 278) sont habituellement de l'ordre de 10^2 Å, c'est-à-dire plus petites que les dimensions des chaînes; elles ne sont pas décelables au microscope;

b) les cristaux globulaires où l'ordre de la disposition de molécules est à longue distance, celles-ci ont la forme de pelote compacte: *globule* dans lequel les maillons sont disposés de façon désordonnée. Les cristaux globulaires représentent un cas particulier des cristaux moléculaires (p. 280);

c) les monocristaux où l'ordre de la disposition de maillons est à longue distance. Les monocristaux polymères sont d'ordinaire visibles au microscope.

La grande majorité des polymères cristallins appartient au premier type.

3° La cohésion des maillons dans la chaîne polymère s'oppose à l'établissement d'une disposition ordonnée des maillons appartenant à différentes molécules, aussi les cristaux polymères contiennent-ils un grand nombre de défauts. Sur les diagrammes X

des polymères du premier type il y a, en plus des taches caractéristiques des cristaux, un halo diffus caractéristique de l'état amorphe. Ceci permet de parler des domaines cristallins et amorphes dans les polymères polycristallins et d'introduire le ***degré de cristallisation*** λ comme rapport du poids du domaine cristallin au poids total de l'échantillon. La grandeur λ indique en réalité le degré d'imperfection des cristaux.

La grandeur λ peut être déterminée par analyse aux rayons X, par mesures de la densité, de l'indice de réfraction, de la chaleur spécifique de fusion, etc. Les valeurs du degré de cristallisation obtenues par différentes méthodes ne coïncident pas toujours étant donné le caractère conventionnel de la détermination de λ.

4° La haute viscosité des polymères conditionne la longue durée du processus de cristallisation, qui dure parfois nombre de jours. Aussi les polymères polycristallins sont-ils dans la plupart des cas thermodynamiquement non équilibrés (p. 152). Le non-équilibre se manifeste, en particulier, dans ce que pratiquement la température de fusion T_{fus} est toujours supérieure à T_{crist} et le processus de fusion occupe un certain intervalle de température. L'existence de l'intervalle des températures de fusion est liée non seulement au non-équilibre, mais aussi à l'imperfection des cristaux. Les cristallites de plus petites dimensions et plus défectueuses entrent en fusion à des températures plus basses. La fusion équilibrée des polymères polycristallins représente une transition de phase du premier ordre (p. 207).

La dépendance de T_{fus} du poids moléculaire μ est de la forme:

$$\frac{1}{T_{fus}} - \frac{1}{T^{\circ}_{fus}} = \frac{R}{r_{fus}\mu},$$

où T°_{fus} est la température de fusion d'un cristal parfait formé de molécules avec $\mu = \infty$, R la constante universelle des gaz (p. 158), r_{fus} la chaleur spécifique de fusion.

5° La température de cristallisation et, par conséquent, le pouvoir de cristallisation des polymères augmentent lors de leur étirage. Certains polymères ne peuvent cristalliser que lorsqu'on les étire. L'étirage conduit à l'orientation des chaînes polymères (p. 305) facilitant l'empilement des maillons. Les cristallites des polymères cristallisés sous tension sont orientées dans le sens de l'étirage.

5. Propriétés mécaniques des polymères

1° L'importance des polymères pour différentes applications dépend en premier lieu de leurs propriétés mécaniques extraordinaires: leur aptitude aux déformations et leur grande sensibilité aux variations de la température et de la fréquence des influences extérieures.

2° La déformation des polymères représente un processus complexe caractérisé par trois types: a) *déformation élastique* analogue aux déformations élastiques des solides ordinaires et liée à la variation des distances interatomiques et intermoléculaires; b) *déformation de haute élasticité* due au déplacement des maillons des molécules sans déplacement relatif des molécules elles-mêmes; elle s'accompagne d'une modification de la forme des molécules: par exemple, lors d'étirage les pelotes moléculaires se détordent; c) *déformation plastique* (écoulement) correspond aux déplacements relatifs des molécules les unes par rapport aux autres.

Une haute élasticité n'est propre qu'aux polymères. Il est indispensable pour son développement que les chaînes soient suffisamment longues. Lors d'une déformation élastique les dimensions du corps subissent une modification de quelques pourcent seulement et lors d'une déformation de haute élasticité, de plusieurs centaines de pourcent. A la différence de la déformation plastique la déformation de haute élasticité est réversible.

3° Tous les trois types de déformation des résines ont leur temps de relaxation. Pratiquement la déformation élastique suit immédiatement l'action d'une force appliquée. Le temps de relaxation dépend intensément d'une température. Le temps de relaxation des déformations de haute élasticité et plastique pour les polymères à l'état vitreux (p. 299) est tellement grand qu'il n'est pas observé du tout, et les polymères à l'état vitreux sont déformés comme des solides ordinaires. La cristallinité des polymères, elle aussi, rend difficile le développement des déformations de haute élasticité et plastique.

4° Dans les polymères réticulés (p. 306) les molécules sont entrecroisées, ce qui empêche la déformation plastique. En principe, l'observation d'une déformation de haute élasticité thermodynamiquement équilibrée (p. 155) des polymères est possible. Toutefois ceci est très difficile, le temps de relaxation d'une déformation de haute élasticité pouvant être très grand. De plus, il y a toujours des ruptures de liaisons transversales et de chaînes, ce qui conduit à l'apparition d'une déformation plastique irréversible.

5° Les particularités essentielles de la haute élasticité peuvent être éclaircies sur l'exemple d'une traction longitudinale (p. 294). Lors de cette déformation un cube de côté l_0 se transforme en parallélépipède de longueur l.

Les substances à haute élasticité jouissent d'une propriété telle que lors des déformations non suivies de variations de température ou de pression, le volume varie de façon insignifiante. Cette propriété est appelée «incompressibilité». Elle est analogue à la propriété correspondante des liquides (p. 265). Par conséquent, avec une bonne précision les dimensions transversales du parallélépipède seront égales à $\sqrt{l_0^3/l}$.

Etant donné que lors d'une déformation de haute élasticité la section transversale change beaucoup, il faut distinguer la vraie contrainte σ (p. 294), numériquement égale à la force élastique par unité d'aire de la section transversale du corps déformé, de la contrainte conventionnelle S par unité d'aire du corps non déformé. Pour les corps incompressibles les contraintes vraie et conventionnelle sont liées par la relation $\sigma = Sl/l_0$.

6° La variation de l'énergie interne U (p. 161) lors de traction longitudinale est déterminée par la relation

$$\left(\frac{\partial U}{\partial l}\right)_{V,T} = F_{\text{é}} - T\left(\frac{\partial F_{\text{él}}}{\partial T}\right)_{l,V},$$

où $F_{\text{él}}$ est la force élastique et $(\partial F_{\text{él}}/\partial T)_{l,V}$ est la dérivée par rapport à la température, l et V étant constants. La relation indiquée permet de déterminer expérimentalement la variation de l'énergie interne lors d'une déformation.

La variation relative de l'énergie interne des résines molles à des chaînes suffisamment souples est beaucoup plus petite que la variation relative de l'entropie. De telles résines rappellent un gaz parfait dont la variation isotherme du volume ne s'accompagne pas de variation de l'énergie interne (p. 162). Pour les résines parfaites en ce sens, la force élastique est proportionnelle à la température absolue (analogiquement à la pression d'un gaz parfait).

Lors de la déformation des polymères réticulés à des chaînes plus rigides, par exemple le polyéthylène réticulé, la variation relative de l'énergie interne est comparable à la variation relative de l'entropie.

7° La théorie statistique de la déformation équilibrée de haute élasticité est fondée sur la supposition que lors du calcul de l'énergie libre de déformation on peut ne pas prendre en considération l'interaction des chaînes. Cette théorie est applicable à des

réseaux suffisamment espacés. On entend par réseaux espacés les réseaux dont les chaînes représentent à l'état normal des pelotes très serrées.

Dans le domaine des déformations éloignées de la déformation limite (déformations lors desquelles les chaînes sont presque entièrement déroulées) la distribution des distances entre les extrémités des chaînes dans le réseau peut être décrite par la distribution de Gauss (p. 311). Dans ce cas la théorie statistique de haute élasticité donne la relation suivante entre la véritable contrainte et l'allongement:

$$\sigma = RTQ \ (l^2/l_0^2 - l_0/l),$$

où R est la constante des gaz (p. 158), Q une constante dépendant du nombre de liaisons transversales entre les chaînes (Q croît avec l'augmentation du nombre de liaisons) et de la souplesse de ces dernières.

Cette formule décrit qualitativement bien l'extension des caoutchoucs dans le domaine où la variation de l/l_0 ne dépasse pas 300-400%. A de plus grandes extensions, la contrainte croît beaucoup plus rapidement qu'il s'ensuit de la formule théorique.

Cette divergence s'explique par le fait que dans ce domaine d'extensions les pelotons moléculaires sont très étirés et l'approximation de Gauss pour la fonction de distribution n'est plus applicable. Ce domaine est appelé domaine non gaussien.

Cette divergence est due aux déformations qui ne sont pas suffisamment équilibrées, ainsi qu'au caractère grossier des suppositions à la base de cette théorie. La *formule empirique de Mooney-Rivlin* décrit de façon plus précise l'extension des caoutchoucs dans le domaine gaussien:

$$\sigma = C_1(l^2/l_0^2 - l_0/l) + C_2(l/l_0 - l_0^2/l^2),$$

où C_1 et C_2 sont les constantes d'élasticité.

8° Dans le domaine d'extensions faibles,

$$\frac{l - l_0}{l} = \frac{\Delta l}{l_0} \ll 1$$

la formule de la théorie statistique de haute élasticité se change en la loi de Hooke (p. 294):

$$\sigma = 3RTQ \ \Delta l/l_0,$$

autrement dit, le module de Young est égal à $3RTQ$.

9° L'équation de Maxwell (p. 303) n'est pas applicable pour décrire les propriétés visco-élastiques des polymères, premièrement, parce qu'elle conduit à une relation linéaire entre la contrainte et

la déformation et, donc, n'est valable que pour le domaine de déformations faibles, et, secondement, parce que la complexité de la structure moléculaire et supramoléculaire des polymères conduit à la nécessité de caractériser leurs propriétés visco-élastiques par un grand jeu de temps de relaxation. La description de la visco-élasticité dans le cas de grandes déformations représente un problème très compliqué. De façon relativement simple peuvent être caractérisées les propriétés visco-élastiques dans le domaine de déformations faibles, domaine de *visco-élasticité linéaire.*

10° Le lien existant entre la contrainte $\sigma(t)$ et la déformation $\varepsilon(t)$, dans le cas général d'un corps linéairement visco-élastique, est donné par la relation

$$\sigma(t) = E_\infty \varepsilon(t) - \int_0^\infty K(u)\, \varepsilon(t-u)\, du,$$

où E_∞ est le *module instantané* ou *limite*, $K(u)$ la fonction de relaxation. Aux hautes fréquences cette relation se transforme en la loi de Hooke:

$$\sigma(t) = E_\infty \varepsilon(t),$$

dévoilant le sens de E_∞.

11° Si a lieu une déformation très rapide jusqu'à la valeur ε_0, qui est ensuite maintenue invariable, la *relaxation des contraintes* dans ce cas se décrit par la formule

$$\sigma(t) = [E_\infty - E(0) + E(t)]\, \varepsilon_0,$$

où

$$E(t) = \int_t^\infty K(u)\, du$$

est appelé *module de relaxation*. La différence $E_\infty - E(0)$ est le *module d'équilibre.*

12° Pour comparer le module de relaxation avec la relaxation des contraintes dans un corps maxwellien, on l'écrit sous la forme:

$$E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\tau) e^{-t/\tau} \frac{d\tau}{\tau},$$

où τ est appelé temps de relaxation et la fonction $H(\tau)$, *spectre des temps de relaxation.* La grandeur $H(\tau) d \ln \tau$ montre quel est l'apport des temps de relaxation, compris dans l'intervalle entre $\ln \tau$ et

ln $\tau + d$ lnτ, à la relaxation. Le domaine dans lequel la fonction $H(\tau)$ est notablement différente de zéro est appelé largeur du spectre. Les spectres des polymères s'élargissent avec l'augmentation du poids moléculaire.

13° Dans les polymères linéaires, aux températures supérieures aux températures de vitrification ou de fusion, le module d'équilibre devient nul et se trouve être possible l'observation de l'écoulement réel décrit par l'équation de Newton (p. 220) avec le coefficient de viscosité

$$\eta = \int_0^\infty G(u)\ du = \int_{-\infty}^\infty H\ (\tau)\ d\tau,$$

où $G(u)$ est le module relaxationnel de rigidité et $H(\tau)$ le spectre correspondant des temps de relaxation.

14° La viscosité des polymères dépend intensément du poids moléculaire et de la température. Il existe pour chaque polymère un certain poids moléculaire critique tel que, pour des poids moléculaires inférieurs au poids moléculaire critique, η soit proportionnel au poids moléculaire, et, pour des poids moléculaires supérieurs au poids moléculaire critique, η soit proportionnel à $\overline{\mu}_w^{3,4}$, où $\overline{\mu}_w$ est le poids moléculaire moyen en nombre (p. 308).

La dépendance de la viscosité des polymères vis-à-vis de la température est décrite par l'*équation de Williams-Landel-Ferry* (WLF):

$$\lg \frac{\eta(T)}{\eta(T_s)} = - \frac{C_1(T - T_s)}{C_2 + T - T_s},$$

où η (T) est le coefficient de viscosité à la température T, T_s une certaine température réduite (T_s est supérieure à la température de vitrification T_g), C_1 et C_2 des constantes. Si $T_s = T_g$, on a $C_1 = 17{,}78°$, $C_2 = 51{,}6$ °K pour la plupart des polymères amorphes.

15° L'équation de WLF pour la viscosité représente la conséquence d'une loi générale appellée *principe d'invariance de la température-temps*. Ce principe porte qu'avec l'élévation de température tous les temps de relaxation sont multipliés par un même facteur décrit par l'équation de WLF. Le principe d'invariance de la température-temps n'est applicable qu'aux polymères amorphes.

TROISIÈME PARTIE

Eléments d'hydroaéromécanique

CHAPITRE PREMIER

Hydroaérostatique

1. Introduction

1° On appelle *hydroaéromécanique* la partie de la physique qui étudie les lois d'équilibre et de mouvement des liquides et des gaz, ainsi que l'interaction des liquides et des gaz en mouvement avec les solides qu'ils baignent. On fait abstraction en hydroaéromécanique de la structure moléculaire des liquides et des gaz en les considérant comme un milieu *continu* réparti de façon ininterrompue dans l'espace[1]).

L'*hydroaérostatique* est la partie d'hydroaéromécanique qui étudie les lois et les conditions d'équilibre des liquides et des gaz sollicités par des forces appliquées.

L'*hydroaérodynamique* est la partie d'hydroaéromécanique qui étudie les lois de mouvement des liquides et des gaz et leurs interactions avec les solides.

2° Une particularité distinctive des liquides et des gaz par rapport aux solides est leur *fluidité*, c'est-à-dire leur résistance insignifiante au cisaillement (p. 296). Lors d'une diminution illimitée de la vitesse de déformation les forces de résistance du liquide ou du gaz à cette déformation tendent vers zéro.

La différence entre un gaz et un liquide réside dans le caractère de la dépendance de leur densité envers la pression; on distingue alors l'incompressibilité pratique des liquides et la compressibilité notable des gaz.

3° En hydroaéromécanique, on emploie habituellement le

---

[1]) Ce modèle n'est pas applicable aux gaz raréfiés (p. 224) que l'on ne peut étudier par les méthodes d'hydroaérodynamique. Les gaz raréfiés sont étudiés en physique moléculaire.

terme «fluide» (incompressible et compressible) qui englobe les liquides à gouttes et les gaz.

On appelle *fluide incompressible* le liquide à gouttes ou le gaz pour lesquels la dépendance entre la densité et la pression peut être négligée dans le problème considéré. On appelle *fluide compressible* le gaz p ur lequel la dépendance entre la densité et la pression ne peut être négligée dans le problème considéré.

Le fluide au sein duquel il n'existe pas de frottement interne est dit *parfait*. Les fluides sont appelés *visqueux* si l'on peut négliger les phénomènes de frottement interne.

On appelle fluide *barotrope* le fluide dont la densité dépend uniquement de la pression.

2. Hydroaérostatique

1° La considération des problèmes d'hydrostatique peut être basée sur le principe de solidification: l'équilibre du fluide n'est pas troublé si l'on suppose solidifié un élément quelconque de son volume, c'est-à-dire si on le remplace en pensée par un élément de corps solide de même forme et de même volume, ayant la même densité que le fluide considéré.

On distingue deux types de forces extérieures agissant sur un élément de volume du fluide: les forces de masse et les forces superficielles.

Les *forces de masse* sont les forces dont l'action ne dépend pas de la présence d'autres portions du fluide, à part l'élément considéré, et dont la valeur numérique est proportionnelle à la masse de cet élément. Comme exemple de force de masse peut servir la force de pesanteur. La force de masse est égale à $\mathbf{F}\rho dV$, où dV est le volume de l'élément de fluide considéré, ρ sa densité, $\mathbf{F}$ la force de masse rapportée à une unité de masse du fluide et appelée *intensité du champ de forces de masse* (par exemple, pour la force de pesanteur la grandeur $\mathbf{F}$ est égale à l'accélération $\mathbf{g}$ de la chute libre).

Les forces de masse sont dites *potentielles* si leur intensité $\mathbf{F}$ peut être représentée sous la forme:

$$\mathbf{F} = -\operatorname{grad} \varphi_F = -\nabla\varphi_F,$$

où $\operatorname{grad} \varphi_F = \frac{\partial\varphi_F}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\varphi_F}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\varphi_F}{\partial z}\mathbf{k}$ est le gradient de la fonction scalaire $\varphi_F(x, y, z, t,)$ appelé *potentiel des forces de masse*; $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ et $\mathbf{k}$ sont les vecteurs unités du système rectangulaire de co-

ordonnées cartésiennes; $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$ est l'opérateur de Hamilton.

On appelle *forces superficielles* les forces appliquées à un élément du fluide de la part des particules attenantes du fluide restant. Ces forces agissent sur la surface de l'élément considéré. La force superficielle rapportée à l'unité d'aire de la surface qu'elle sollicite est appelée *tension*. Chaque force superficielle peut être décomposée en composantes normale et tangente à la surface. On distingue respectivement la tension normale (ou la pression) p et la tension tangentielle τ. A l'état d'équilibre les tensions tangentielles dans le fluide sont nulles et les forces superficielles ne représentent que des forces de pression. Notons que la pression p en un point donné du fluide est la même dans tous les sens, autrement dit, ne dépend pas de l'orientation de la surface pour laquelle elle est déterminée.

2° *Equations d'équilibre du fluide:*

$$F_x = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \quad F_y = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \quad F_z = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z},$$

où F_x, F_y et F_z sont les projections sur les axes du système cartésien rectangulaire du vecteur $\mathbf{F}$ de la résultante des forces de masse agissant sur le fluide. Sous forme vectorielle l'équation d'équilibre est de la forme:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p.$$

Les équations d'équilibre s'obtiennent des équations du mouvement du fluide parfait (p. 333) en supposant que la vitesse de mouvement du fluide est nulle.

3° L'équilibre du fluide soumis à l'action des forces de masse n'est possible que dans le cas où le champ $\mathbf{F}$ de ces forces satisfait à la relation

$$F_x\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + F_y\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) + F_z\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) = 0$$

ou sous forme vectorielle

$$\mathbf{F} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{F} = 0,$$

où par définition $\operatorname{rot} \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\mathbf{k}$ (rot $\mathbf{F}$ est dit rotationnel du vecteur $\mathbf{F}$).

Si la densité du fluide ρ ne dépend pas des coordonnées, on a $\frac{1}{\rho}$ grad $p =$ grad $\frac{p}{\rho}$ et l'équilibre n'est possible que dans un champ de forces potentiel (p. 69) avec le potentiel $\varphi = -\frac{p}{\rho} +$ $+$ const. Les surfaces de même pression coïncident avec les surfaces équipotentielles.

4° Equilibre du fluide dans le champ homogène de la force de pesanteur ($\mathbf{F} = \mathbf{g} =$ const). Si l'axe Oz est dirigé dans le sens contraire à $\mathbf{g}$, on a $F_z = F = -g$, $F_x = F_y = 0$ et l'équation d'équilibre est de la forme

$$\frac{dp}{\rho} = -g\, dz.$$

Dans le cas général la densité des fluides est fonction de la pression et de la température: $\rho = \rho\,(p, T)$. Si la température du fluide est partout la même (condition d'équilibre thermique) et que le fluide soit incompressible, on a:

$$p + \rho g z = p_0,$$

où p_0 est la pression au niveau $z = 0$. Cette relation représente *l'équation fondamentale d'hydrostatique pour un fluide incompressible.* L'origine de z coïncide habituellement avec la surface libre du fluide; dans ce cas p_0 est la pression extérieure exercée sur cette surface. La différence $p - p_0$ ne dépend pas de p_0, autrement dit, la pression exercée sur le fluide par les forces extérieures est transmise par celui-ci uniformément dans toutes les directions *(loi de Pascal).*

Pour un fluide compressible en équilibre thermique et mécanique la somme $\Phi + gz$ doit être la même dans tout le volume, où Φ est le potentiel isobare-isotherme (p. 189) de l'unité de masse de fluide et gz l'énergie potentielle de l'unité de masse de fluide dans le champ de la force de pesanteur.

L'équilibre mécanique du fluide dans le champ de la force de pesanteur est possible également en l'absence d'équilibre thermique si la température du fluide varie uniquement le long de l'axe vertical Oz. Cet équilibre est stable si a lieu l'inégalité suivante *(condition d'absence de convection):*

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \frac{ds}{dz} > 0,$$

où v et s sont le volume spécifique et l'entropie de l'unité de masse de fluide. Pour la plupart des fluides $\left(\frac{\partial v}{dT}\right)_p > 0$ et la con-

dition d'absence de convection est de la forme:

$$\frac{dT}{dz} > -\frac{gT}{c_p v}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p,$$

où c_p est la chaleur spécifique du fluide dans une transformation isobare. Pour un gaz parfait

$$\frac{dT}{dz} > -\frac{g}{c_p}.$$

5° *Loi d'Archimède:* tout corps plongé dans un fluide est sollicité par une force, inverse de la force de pesanteur, qui est numériquement égale au poids du fluide déplacé et est appliquée au centre de gravité de ce corps plongé.

CHAPITRE 2

Hydroaérodynamique

1. Notions fondamentales

1° On appelle *particule d'un milieu continu* un élément suffisamment petit de volume de ce milieu, dont les dimensions sont en même temps bien des fois plus grandes que les distances intermoléculaires. Ces distances étant très petites (de l'ordre de 10^{-6} cm pour les gaz sous conditions normales), les particules du fluide peuvent être approximativement admises ponctuelles.

2° En cinématique des fluides, deux méthodes différentes de description du mouvement sont possibles. Dans l'une d'elles, appelée *méthode de Lagrange*, le mouvement du fluide est donné par indication de la dépendance entre les coordonnées de toutes ses particules et le temps t:

$$\left.\begin{aligned} x &= F_1(a, b, c, t), \\ y &= F_2(a, b, c, t), \\ z &= F_3(a, b, c, t), \end{aligned}\right\}$$

où a, b et c sont les coordonnées de la particule à l'instant initial $t = 0$, qui servent à désigner la particule. En éliminant entre ces équations le temps, on obtient l'équation de la trajectoire de la particule. Les grandeurs a, b, c et t sont appelées *variables de Lagrange.* Les projections sur les axes de coordonnées du vecteur vitesse $\mathbf{v}$ et du vecteur accélération $\mathbf{w}$ de la particule sont égales à

$$v_x = \frac{\partial x}{\partial t}, \quad v_y = \frac{\partial y}{\partial t}, \quad v_z = \frac{\partial z}{\partial t};$$

$$w_x = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \quad w_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad w_z = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}.$$

La méthode fondamentale d'hydroaérodynamique est la *méthode d'Euler* en vertu de laquelle le mouvement du fluide est défini par donnée du champ des vitesses du fluide dans l'espace en chaque instant, autrement dit

$$\mathbf{v} = f(\mathbf{r}, t)$$

ou, en projections sur les axes de coordonnées cartésiennes rectangulaires,

$$\left.\begin{aligned} v_x &= f_1(x, y, z, t), \\ v_y &= f_2(x, y, z, t), \\ v_z &= f_3(x, y, z, t), \end{aligned}\right\}$$

où $\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$ est la vitesse du fluide à l'instant t en un point de l'espace déterminé par le rayon vecteur $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Les grandeurs x, y, z, t sont appelées *variables d'Euler*. En tant que variables d'Euler, au lieu des coordonnées cartésiennes rectangulaires (x, y, z), on peut utiliser des coordonnées cylindriques, sphériques et autres.

Les projections sur les axes de coordonnées cartésiennes rectangulaires du vecteur accélération $\mathbf{w}$ des particules du fluide sont:

$$w_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z,$$

$$w_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial v_y}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z} v_z,$$

$$w_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial v_z}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_z}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_z}{\partial z} v_z.$$

On voit de ces expressions que l'accélération $\mathbf{w}$ de la particule du fluide est égale à la somme de deux accélérations $\mathbf{w} = \mathbf{w}_{\text{loc}} + \mathbf{w}_{\text{conv}}$, où

$$\mathbf{w}_{\text{loc}} = \frac{\partial v_x}{\partial t}\mathbf{i} + \frac{\partial v_y}{\partial t}\mathbf{j} + \frac{\partial v_z}{\partial t}\mathbf{k}$$

est l'*accélération locale* conditionnée par la variation du champ des vitesses dans le temps et

$$\mathbf{w}_{\text{conv}} = \left(v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)\mathbf{i} +$$
$$+ \left(v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\mathbf{j} + \left(v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\mathbf{k}$$

est l'*accélération de convection* conditionnée par l'hétérogénéité du champ des vitesses.

Par la suite toutes les équations d'hydrodynamique seront écrites à l'aide des variables d'Euler, et l'on comprend sous x, y, z les coordonnées cartésiennes rectangulaires.

3° Le mouvement du fluide est dit *stationnaire* si le champ de ses vitesses ne varie pas dans le temps. Dans le cas contraire le mouvement est dit *non stationnaire.* Lors d'un mouvement stationnaire du fluide, les champs de la pression et de la densité ne dépendent pas du temps.

Le mouvement du fluide est dit *potentiel* ou *irrotationnel* si en chaque instant dans tout le volume du fluide rot $\mathbf{v} \equiv 0$, autrement dit, si la vitesse est égale au gradient d'une certaine fonction scalaire des coordonnées et du temps $\varphi(x, y, z, t)$ appelée *potentiel des vitesses.* S'il existe des domaines du fluide dans lesquels rot $\mathbf{v} \neq 0$, le mouvement du fluide est dit *tourbillonnaire.*

4° On appelle *ligne de courant* la ligne dont la tangente en chaque point de celle-ci coïncide en direction à l'instant donné avec le vecteur vitesse du fluide en ce point. Dans le cas d'un mouvement stationnaire du fluide les lignes de courant coïncident avec les trajectoires des particules du fluide. L'*équation des lignes de courant* est de la forme:

$$\frac{dx}{v_x(x, y, z, t)} = \frac{dy}{v_y(x, y, z, t)} = \frac{dz}{v_z(x, y, z, t)},$$

où le temps t est un paramètre fixe.

On appelle *tube de courant* la surface formée par les lignes de courant menées par tous les points d'un petit contour fermé. La partie du fluide qui est limitée par un tube de courant est appelée *filet.* Dans le cas d'un mouvement stationnaire du fluide les tubes de courant ne varient pas dans le temps et les particules du fluide se déplacent de manière que chacune d'elles reste dans les limites d'un filet déterminé.

5° *Circulation de la vitesse* suivant le contour fermé L est appelée l'intégrale curviligne

$$\Gamma = \oint_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l},$$

où $d\mathbf{l}$ est le vecteur élémentaire, numériquement égal à la longueur d'arc de la portion élémentaire du contour et dirigé suivant la tangente au contour dans le sens de son parcours.

D'après le théorème de Stokes

$$\Gamma = \int_S \text{rot}_n \mathbf{v} \, dS,$$

où S est l'aire de la surface délimitée par le contour L; $\text{rot}_n \mathbf{v}$ la projection du rot $\mathbf{v}$ sur la direction de la normale extérieure $\mathbf{n}$ à l'élément dS de cette surface[1]). Dans le cas d'un mouvement potentiel du fluide $\Gamma \equiv 0$ indépendamment du choix du contour L.

6° On appelle *ligne tourbillonnaire* la ligne dont la tangente en chaque point de celle-ci, à l'instant donné t, coïncide en direction avec le rotationnel du vecteur vitesse rot $\mathbf{v}$ en ce point. L'*équation de la ligne tourbillonnaire* est de la forme:

$$\frac{dx}{\text{rot}_x \mathbf{v}} = \frac{dy}{\text{rot}_y \mathbf{v}} = \frac{dz}{\text{rot}_z \mathbf{v}},$$

où $\text{rot}_x \mathbf{v}$, $\text{rot}_y \mathbf{v}$ et $\text{rot}_z \mathbf{v}$ sont les projections du vecteur rot $\mathbf{v}$ sur les axes de coordonnées correspondants.

Le *tube tourbillonnaire* est la surface formée par les lignes tourbillonnaires passant par tous les points d'un petit contour fermé. Le fluide contenu à l'intérieur d'un tube tourbillonnaire est appelé *fil tourbillonnaire.*

L'*intensité du tourbillon (*du *tube tourbillonnaire)* est le produit du vecteur rot $\mathbf{v}$ dans une section normale quelconque du tube tourbillonnaire par l'aire σ de cette section. L'intensité du tourbillon est constante le long de tout le tube tourbillonnaire et égale à la circulation de la vitesse le long d'un contour fermé arbitraire mené sur la surface du tube tourbillonnaire et embrassant une fois le tube.

7° On appelle *courant de fluide* à travers une surface immobile S la masse m_s de fluide traversant cette surface par unité de temps:

$$m_s = \int_S \rho v_n \, dS = \int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} \, dS,$$

où $\mathbf{n}$ est le vecteur unité de la normale extérieure à l'élément de surface dS, v_n la projection de la vitesse du fluide sur la direction $\mathbf{n}$, $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ le vecteur densité de courant de fluide.

---

[1]) Les vecteurs $\mathbf{n}$ sont menés de manière que le parcours du contour L, accepté lors du calcul de la circulation, apparaisse évoluant dans le sens contraire des aiguilles d'une montre (si on l'observe de l'extrémité de ces vecteurs).

2. Equation de continuité

1° L'*équation de continuité* est l'expression mathématique de la loi de la conservation de la masse en hydroaéromécanique. A l'aide des variables d'Euler elle peut être écrite sous plusieurs formes équivalentes:

a) $\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ ou $\frac{d\rho}{dt} + \rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = 0,$

où ρ (x, y, z, t) est la densité du fluide, $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ sa vitesse et $\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$ la divergence du vecteur $\mathbf{v}$;

b) $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \mathbf{v}) = 0$ ou

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0;$$

c) $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \rho = 0$ ou

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) + \left(v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z}\right) = 0,$$

où grad ρ est le gradient de densité.

2° L'équation de continuité pour un fluide incompressible $\left(\frac{d\rho}{dt} = 0\right)$ est la suivante:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

L'équation de continuité pour un mouvement stationnaire du fluide est $\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0\right)$:

$$\operatorname{div} (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial (\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho v_z)}{\partial z} = 0.$$

Lors d'un écoulement stationnaire le courant de fluide à travers la section transversale du filet ne dépend pas de l'endroit où est située cette section. Pour deux sections transversales arbitraires dS_1 et dS_2 du filet élémentaire a lieu la condition $\rho_1 v_1 dS_1 = \rho_2 v_2 dS_2$.

3. Equations du mouvement d'un fluide

1° Equations du mouvement d'un fluide parfait *(équations d'Euler)*:

a) sous forme vectorielle

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p$$

ou encore

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{v} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p,$$

où $\mathbf{F}$ est l'intensité du champ de forces de masse (p. 324), p la pression, ρ la densité du fluide et l'opérateur

$$\mathbf{v}\cdot\nabla = v_x\frac{\partial}{\partial x} + v_y\frac{\partial}{\partial y} + v_z\frac{\partial}{\partial z}\ ;$$

b) en projections sur les axes de coordonnées

$$\left.\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{dv_y}{dt} &= F_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{dv_z}{dt} &= F_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned}\right\}$$

ou encore

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z} &= F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z} &= F_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z} &= F_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned}\right\}$$

Dans le cas d'un mouvement stationnaire $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0$ et $\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial y_z}{\partial t} = 0$.

2° Equation du mouvement d'un fluide visqueux *(équation de Navier-Stokes)*[1]*:*

a) sous forme vectorielle

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p + \nu\,\Delta\,\mathbf{v} + \left(\frac{\zeta}{\rho} + \frac{\nu}{3}\right)\mathrm{grad\ div}\,\mathbf{v},$$

où $\nu = \eta/\rho$ est la *viscosité cinématique* du fluide, η sa *viscosité dynamique* ou le *coefficient de frottement interne* (p. 220), ζ sa *deuxième viscosité* (cf. 3°) et $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ l'opérateur laplacien (on désigne souvent l'opérateur laplacien par ∇^2 également);

b) en projections sur les axes de coordonnées

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dv_x}{dt} &= F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right) + \\
&\quad + \left(\frac{\zeta}{\rho} + \frac{\nu}{3}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right),\\
\frac{dv_y}{dt} &= F_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right) + \\
&\quad + \left(\frac{\zeta}{\rho} + \frac{\nu}{3}\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right),\\
\frac{dv_z}{dt} &= F_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right) + \\
&\quad + \left(\frac{\zeta}{\rho} + \frac{\nu}{3}\right)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right).
\end{aligned}\right\}$$

---

[1]) On suppose que $\eta = \mathrm{const}$ et $\zeta = \mathrm{const}$. Dans le cas contraire les équations du mouvement ont une forme plus complexe:

$$\rho\frac{dv_x}{dt} = \rho F_x - \frac{\partial p}{\partial x} + 2\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta\frac{\partial v_x}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left[\eta\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)\right] +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial z}\left[\eta\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\right] - \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x}(\eta\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}) + \frac{\partial}{\partial x}(\zeta\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}),$$

$$\rho\frac{dv_y}{dt} = \rho F_y - \frac{\partial p}{\partial y} + 2\frac{\partial}{\partial y}\left(\eta\frac{\partial v_y}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left[\eta\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right)\right] +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial x}\left[\eta\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\right] - \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial y}(\eta\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}) + \frac{\partial}{\partial y}(\zeta\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}),$$

$$\rho\frac{\partial v_z}{dt} = \rho F_z - \frac{\partial p}{\partial z} + 2\frac{\partial}{\partial z}\left(\eta\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left[\eta\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right)\right] +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial y}\left[\eta\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\right] - \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial z}(\eta\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}) + \frac{\partial}{\partial z}(\zeta\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}).$$

Pour un fluide incompressible div $\mathbf{v} = 0$ (p. 332) et l'équation de Navier-Stokes est de la forme:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \Delta \mathbf{v}.$$

Cette équation peut être représentée sous une forme dans laquelle la pression p ne figure pas:

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{v} = \operatorname{rot} \mathbf{F} + \operatorname{rot} (\mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v}) + \nu \Delta \operatorname{rot} \mathbf{v}.$$

Si le champ de forces de masse est potentiel comme par exemple le champ de la pesanteur, rot $\mathbf{F} = 0$. Dans le cas d'un fluide parfait ($\nu = 0$) le dernier terme de l'équation est lui aussi nul.

3° La deuxième viscosité ζ est, de même que la viscosité dynamique η (la première viscosité), une grandeur positive. Elle dépend de la nature chimique du fluide compressible, de la pression et de la température. La première viscosité se manifeste lors de la déformation par cisaillement pur, la deuxième viscosité lors de la déformation de compression omnidirectionnelle qui s'accompagne d'une variation de densité du fluide. Lors de la compression et de l'expansion, l'équilibre thermodynamique du fluide est troublé et dans celui-ci prennent naissance des transformations tendant à rétablir cet équilibre. Les transformations tendant à rétablir l'équilibre étant irréversibles (p. 174), elles s'accompagnent d'accroissement de l'entropie (p. 187) attestant la dissipation d'énergie. Cette dissipation d'énergie et la deuxième viscosité ζ la déterminant seront d'autant plus grandes que plus lentement évoluent les processus de rétablissement de l'équilibre en comparaison du processus de compression ou d'expansion. Par exemple, la grandeur ζ doit être notable si, au cours de la compression ou de l'expansion du fluide, l'équilibre chimique est compromis et que dans le fluide se déroule une réaction chimique ayant un long temps de relaxation, c'est-à-dire une petite vitesse. Dans le cas de compressions et raréfactions engendrées par les ondes acoustiques (p. 560), ζ dépend de la fréquence *(dispersion de la deuxième viscosité)*.

4° Le *problème fondamental d'hydroaérodynamique* est la recherche des champs de vitesse, de pression et de densité dans un fluide se mouvant sous l'action de forces extérieures données,

c'est-à-dire la recherche de cinq fonctions de coordonnées et du temps suivantes:

$$v_x = f_1(x, y, z, t), \quad v_y = f_2(x, y, z, t),$$
$$v_z = f_3(x, y, z, t),$$
$$p = f_4(x, y, z, t) \quad \text{et} \quad \rho = f_5(x, y, z, t).$$

Les équations du mouvement et de continuité suffisent pour la résolution du problème fondamental d'hydroaérodynamique de tout fluide dont la densité et les deux viscosités dépendent uniquement de la pression, la forme de ces dépendances étant donnée: $\rho = \rho(p)$, $\zeta = \zeta(p)$ et $\eta = \eta(p)$. En particulier, ceci est vrai pour un fluide incompressible parfait ($\rho = \text{const}$, $\eta = \zeta = 0$), pour un fluide barotrope parfait ($\eta = \zeta = 0$), ainsi que pour le mouvement isotherme d'un fluide visqueux.

Dans tous les autres cas il est indispensable pour la résolution du problème fondamental d'hydroaérodynamique de considérer un système élargi d'équations constitué d'équations du mouvement, de continuité, de l'énergie (p. 340), d'état du fluide (p. 154) et d'équations exprimant les dépendances des viscosités dynamique et deuxième vis-à-vis des paramètres d'état du fluide (cf. renvoi p. 334).

5° Pour tenir compte des particularités spécifiques d'un problème concret et obtenir une solution univoque du système d'équations différentielles d'hydroaérodynamique indiqué ci-dessus, il est nécessaire d'indiquer également les conditions initiales et les conditions aux limites du problème considéré.

Les conditions initiales déterminent l'état du mouvement d'un fluide à l'instant initial $t = 0$:

$$v_{x_0} = f_1(x, y, z, 0), \quad v_{y_0} = f_2(x, y, z, 0), \text{ etc.}$$

Dans le cas d'un mouvement stationnaire du fluide la donnée des conditions initiales n'est plus nécessaire.

Les conditions aux limites déterminent les conditions particulières de mouvement du fluide à la limite de séparation avec les corps solides, sur la surface libre du fluide et sur les interfaces des fluides non miscibles.

6° Quelques cas de conditions aux limites pour un fluide parfait:

a) aux points de la surface d'une paroi rigide immobile, normale à la surface, la composante de la vitesse du fluide est nulle *(condition de glissement)*:

$$v_n = 0, \quad \text{ou} \quad v_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + v_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0,$$

où $\Phi(x, y, z) = 0$ est l'équation de la surface de la paroi;

b) si la paroi se déplace dans l'espace et, dans le cas général, subit une déformation, la vitesse d'un point arbitraire de la surface et la vitesse d'une particule de fluide se trouvant à un instant donné en ce point doivent avoir les mêmes projections sur la direction de la normale à la surface:

$$v_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + v_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0,$$

où $\Phi(x, y, z, t) = 0$ est l'équation de la surface mobile;

c) à la surface libre du fluide $\Phi(x, y, z, t) = 0$, à part la condition b), doit être réalisée la condition de constance de la pression: $p(x, y, z, t) = \text{const}$;

d) sur l'interface de deux fluides non miscibles doit être réalisée la condition d'égalité des pressions des deux fluides, ainsi que la condition d'égalité des composantes normales des vitesses de la surface elle-même et des deux fluides.

7° Quelques cas de conditions aux limites pour un fluide visqueux:

a) aux points de la surface d'une paroi immobile, la vitesse du fluide est nulle *(condition d'adhérence)*;

b) aux points de la surface d'une paroi mobile, la vitesse du fluide est égale à la vitesse du point correspondant de la paroi.

Etant donnée la complexité du système d'équations différentielles d'hydroaérodynamique, sa résolution par méthodes analytiques est liée généralement à des difficultés insurmontables et n'est possible que pour quelques cas simples de mouvement.

8° Le mouvement stationnaire d'un fluide barotrope parfait (p. 324) dans un champ de forces potentiel obéit à l'*équation de Bernoulli* (l'*intégrale de Bernoulli)*:

$$\varphi_F + \frac{v^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} = C,$$

où φ_F est le potentiel du champ de forces de masse et C une grandeur, qui est la même pour tous les points d'une ligne de courant donnée et qui, généralement parlant, varie lorsqu'on passe d'une ligne de courant à une autre.

Si, à part la force de pesanteur, le fluide n'est pas sollicité par d'autres forces de masse, on a $\varphi_F = gz$ (l'axe Oz est dirigé verticalement vers le haut) et l'équation de Bernoulli prend la forme:

$$gz + \frac{v^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} = C.$$

Pour un fluide incompressible

$$\rho gz + \frac{\rho v^2}{2} + p = C_1, \text{ ou } z + \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} = C_2,$$

où $\rho v^2/2$ est la *pression dynamique*, p la *pression statique*, $p/\rho g$ la *hauteur piézométrique*, $v^2/2g$ la *hauteur dynamique*.

Pour un fluide compressible l'intégrale $\int \frac{dp}{\rho}$ dépend de la manière dont varie son état. Dans le cas de transformations isotherme et adiabatique (isentropique) d'un gaz parfait (p. 155):

$$\int\limits_{\text{isotherme}} \frac{dp}{\rho} = k_1 \ln p + \text{const},$$

$$\int\limits_{\text{adiabatique}} \frac{dp}{\rho} = k_2 \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} p^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} + \text{const},$$

où $\varkappa = c_p/c_V$ est le rapport des chaleurs spécifiques du gaz dans les transformations isobare et isochore (l'indice d'adiabatique, p. 168), k_1 et k_2 des grandeurs constantes.

9° Le mouvement potentiel (p. 330) d'un fluide barotrope parfait n'est possible que dans le cas où les forces de masse sont potentielles. Un mouvement de ce genre obéit à la *relation de Cauchy:*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} \int \frac{dp}{\rho} + \varphi_F = f(t),$$

où φ est le potentiel de vitesse ($\mathbf{v} = \text{grad } \varphi$), φ_F le potentiel de forces de masse et $f(t)$ une fonction du temps de forme arbitraire.

10° Mouvement potentiel stationnaire d'un fluide parfait. Un fluide barotrope obéit à l'*équation de Bernoulli-Euler:*

$$\varphi_F + \frac{v^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} = \text{const},$$

où la constante, à la différence de l'équation de Bernoulli, est la même pour toutes les lignes de courant.

11° On appelle *mouvement plan* d'un fluide le mouvement lors duquel toutes les particules de ce fluide se meuvent dans des plans parallèles à un certain plan fixe, et les vitesses de toutes les particules situées sur une même perpendiculaire à ce plan sont identiques. Si l'on admet comme plan de coordonnées xOy un certain plan fixe, on a dans le cas d'un mouvement plan:

$$v_x = f_1\ (x,\ y,\ t), \quad v_y = f_2\ (x,\ y,\ t), \quad v_z = 0.$$

Pour le mouvement plan d'un fluide incompressible

$$v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

où $\psi(x,\ y,\ t)$ est la *fonction de courant*. La famille de lignes $\psi\ (x,y,\ t) =$ const (le temps t joue le rôle d'un paramètre fixe) représente un ensemble de lignes de courant sur le plan xOy à l'instant t.

Si le champ de forces extérieures est potentiel, la fonction de courant d'un fluide parfait vérifie l'équation différentielle

$$\frac{\partial}{\partial t}\ \Delta\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}\,\frac{\partial\Delta\psi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\,\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x},$$

où $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ est l'opérateur laplacien à deux dimensions.

Si le mouvement plan d'un fluide incompressible est potentiel, les *équations de Cauchy-Riemann:*

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

sont valables.

La fonction de courant et le potentiel de vitesse vérifient l'*équation de Laplace*: $\Delta\psi = 0$ et $\Delta\varphi = 0$. Les lignes de courant représentent les trajectoires orthogonales des familles de lignes du même potentiel de vitesse.

12° *Loi de la conservation de la circulation de la vitesse (théorème de Thomson):* lors du mouvement d'un fluide barotrope parfait dans un champ potentiel de forces de masse, la circulation de la vitesse suivant un contour fermé arbitraire mené par les mêmes particules de fluide (un *contour matériel*) ne varie pas avec le temps, autrement dit,

$$\oint_L \mathbf{v}\cdot d\mathbf{l} = \text{const}, \text{ ou } \frac{d}{dt}\oint_L \mathbf{v}\cdot d\mathbf{l} = 0.$$

4. Equation de l'énergie

1° Le premier principe de la thermodynamique pour un système mobile est de la forme:

$$d\left(U+\frac{Mv^2}{2}\right)=\delta Q+\delta A',\quad \text{ou}\quad d\left(H+\frac{Mv^2}{2}\right)=\delta Q+\delta A'+d(pV),$$

où U et H sont l'énergie interne et l'enthalpie (p. 161) du système de volume V; p la pression; M la masse du système, δQ la quantité de chaleur fournie du dehors; $\delta A'$ le travail effectué par les forces extérieures; v la vitesse de mouvement du système.

2° Equation différentielle de la loi de la conservation de l'énergie pour un fluide visqueux compressible:

$$\rho\frac{du}{dt}=\varepsilon+\operatorname{div}(K\operatorname{grad}T)-p\operatorname{div}\mathbf{v}+$$
$$+\eta\left\{2\left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2\right]+\left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)^2+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v_y}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial y}\right)^2\right]-\frac{2}{3}(\operatorname{div}\mathbf{v})^2\right\}+\zeta(\operatorname{div}\mathbf{v})^2,$$

ou bien

$$\rho\frac{dh}{dt}=\varepsilon+\frac{dp}{dt}+\operatorname{div}(K\operatorname{grad}T)+$$
$$+\eta\left\{2\left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2\right]+\left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)^2+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)^2\right]-\frac{2}{3}(\operatorname{div}\mathbf{v})^2\right\}+\zeta(\operatorname{div}\mathbf{v})^2,$$

où u et h sont l'énergie interne et l'enthalpie par unité de masse de fluide, ρ, T et p la densité, la température absolue et la pression du fluide, $\mathbf{v}$ sa vitesse, K, η et ζ les coefficients de conductibilité thermique, de frottement interne et de deuxième viscosité du fluide, ε la quantité de chaleur apportée dans une unité de volume par unité de temps, qui provient du rayonnement ou d'autres facteurs mais non de la conductibilité thermique (des réactions chimiques, par exemple).

L'expression

$$\Phi=\eta\left\{2\left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2\right]+\left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)^2+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v_y}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial y}\right)^2\right]\right\}+\left(\zeta-\frac{2}{3}\eta\right)(\operatorname{div}\mathbf{v})^2$$

est appelée *fonction dissipative*. La fonction dissipative représente la quantité d'énergie mécanique d'un fluide qui se transforme en énergie interne par frottement dans une unité de volume de ce fluide par unité de temps.

Pour un gaz obéissant à l'équation de Mendéléev-Clapeyron, dans le cas de variations peu importantes de température, on peut admettre $\frac{du}{dt} = c_v \frac{dT}{dt}$ et $\frac{dh}{dt} = c_p \frac{dT}{dt}$, où c_v et c_p sont les chaleurs spécifiques des transformations isochore et isobare.

3° Quand $K = \eta = \zeta = \varepsilon = 0$, l'équation de l'énergie détermine la *condition d'adiabaticité du mouvement* d'un fluide parfait:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{p}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad \text{ou bien} \quad \frac{ds}{dt} = \frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\operatorname{grad} s = 0,$$

où s est l'entropie par unité de masse de fluide.

Dans le cas d'un fluide incompressible, quand $\varepsilon = 0$, l'équation de l'énergie est de la forme:

$$c\rho \frac{dT}{dt} = \operatorname{div} (K \operatorname{grad} T) + \eta \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right)^2 \right\},$$

où c est la chaleur spécifique du fluide.

Pour un fluide incompressible parfait, quand $\varepsilon = 0$ et $K =$ $=$ const,

$$\frac{dT}{dt} = a\nabla^2 T,$$

ou bien

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right),$$

où $a = K/c\rho$ est le coefficient de diffusivité thermique (p. 283).

4° On appelle *échange de chaleur par convection* la transmission d'énergie sous forme de chaleur entre les parties du fluide chauffées inégalement ou bien entre le fluide et les corps solides, qui se produit par suite du mouvement des parties macroscopiques du fluide l'une par rapport à l'autre ou par rapport aux corps solides.

L'échange de chaleur par convection entre le fluide et les corps solides est appelé *transmission de chaleur*. Suivant les causes du mouvement du fluide on distingue deux types de transmission de chaleur: *convection libre (naturelle)* et *convection forcée*. Dans le premier

cas le mouvement du fluide a lieu sous l'action de la force de pesanteur. Il est le résultat de l'hétérogénéité du poids spécifique des portions de fluide réchauffées différemment. Dans le second, le mouvement relatif est conditionné soit par le déplacement des corps dans le fluide immobile, soit par l'action de différentes sortes de pompes, de ventilateurs, etc., sur le fluide.

5° On appelle *coefficient de transmission de chaleur* la grandeur α qui caractérise l'intensité de la transmission et est numériquement égale à

$$\alpha = \frac{q}{\Delta T},$$

où q est la densité du flux de chaleur, numériquement égale à la quantité de chaleur transmise à travers une unité de surface d'un corps par unité de temps; ΔT est la *chute de température* égale à la valeur absolue de la différence entre les températures du fluide et de la surface du corps. Dans une série de cas la chute de température est déterminée autrement, par exemple, lorsque le corps est contourné par un courant de fluide compressible, ΔT est d'ordinaire admise égale à la valeur absolue de la différence entre la température du fluide loin du corps et la température d'équilibre qu'aurait eue la surface du corps en l'absence d'échange thermique.

La vitesse relative d'un fluide à la surface du corps est nulle sous l'influence de la viscosité. C'est pourquoi au voisinage de la surface même l'échange de chaleur dans le fluide est réalisé par conductibilité thermique: $q = K\,|\text{grad } T|_{\text{p}}$, où K est le coefficient de conductibilité thermique du fluide, $|\text{grad } T|_{\text{p}}$ le module du gradient de température à la limite de séparation avec le corps.

Le lien existant entre les coefficients de transmission de chaleur et de conductibilité thermique est de la forme

$$\alpha = \frac{K}{\Delta T}\,|\text{grad } T|_{\text{p}}.$$

5. Éléments de théorie des dimensions et de théorie de la similitude

1° On appelle *unité de mesure* $[A]$ d'une grandeur physique A une grandeur physique choisie conventionnellement, ayant le même sens physique que la grandeur A.

On appelle *système d'unités de mesure* l'ensemble d'unités de mesure établies de façon déterminée pour toutes les grandeurs considérées du domaine donné de la physique. En mécanique, par exemple, on utilise les systèmes CGS *(physique absolu)*, MKS *(pratique*

absolu) et MKGSS *(technique)*, en électricité et magnétisme CGSE *(électrostatique absolu)*, CGSM *(électromagnétique absolu)*, le *système de Gauss* d'unités et le *système pratique absolu* d'unités MKSA. A partir du premier janvier 1963 on utilise largement le *Système international d'unités* (SI) pour toutes les branches de la science et de la technique, qui coïncide avec le système MKS pour les grandeurs mécaniques et avec le système MKSA pour les grandeurs électromagnétiques.

On appelle *systèmes absolus* les systèmes dans lesquels à titre d'unités principales pour les grandeurs mécaniques sont acceptées les unités de longueur, de masse et de temps.

Les *unités principales de mesure* d'un système donné sont les unités de mesure établies indépendamment pour quelques (habituellement trois ou quatre) grandeurs physiques choisies arbitrairement. Par exemple, les unités principales du système CGS sont 1 cm (unité de longueur), 1 g (unité de masse) et 1 s (unité de temps).

Le Système international d'unités (SI) embrassant tous les domaines de la physique et de la technique a à sa base six unités principales: de longueur (m), de masse (kg), de temps (s), d'intensité du courant (A), de température (°K) et d'intensité de la lumière (cd).

On appelle *unités secondaires de mesure* les unités établies à l'aide des unités principales de mesure d'un système donné, en se basant sur les lois de la physique exprimant la corrélation entre les grandeurs physiques considérées et les grandeurs dont les unités de mesure sont prises pour principales.

On appelle *formule de dimension* ou simplement *dimension* d'une grandeur physique quelconque B la relation existant entre l'unité de mesure de cette grandeur $[B]$ et les unités principales $[A_1]$, $[A_2]$, ..., $[A_k]$ d'un système donné. Les formules de dimension ont la forme de puissances des $[A]$:

$$[B] = [A_1]^{n_1} [A_2]^{n_2} \dots [A_k]^{n_k},$$

où k est le nombre d'unités principales; n_1, n_2, ..., n_k des nombres rationnels.

Les unités de mesure et les dimensions des grandeurs physiques ainsi que les relations entre les unités de mesure des mêmes grandeurs dans différents systèmes sont données à l'*Appendice 1*.

2° Les *grandeurs physiques homogènes* sont les grandeurs ayant même dimension et même sens physique, c'est-à-dire se différant uniquement par leur valeur numérique (par exemple, les coordonnées des points d'un corps et ses dimensions linéaires).

Les *grandeurs physiques homonymes* sont les grandeurs de même dimension, mais ayant un sens physique différent. Comme exemple

de telles grandeurs peuvent servir le coefficient de diffusion et la viscosité cinématique.

Les *grandeurs sans dimension* sont les grandeurs dont les valeurs numériques ne dépendent pas du choix du système d'unités de mesure. Par exemple, le rapport de deux grandeurs homogènes ou de deux grandeurs homonymes est une grandeur sans dimension. Le rapport de deux grandeurs homogènes est appelé *simplexe*.

3° *Axiomes de la théorie des dimensions.*

a) La valeur numérique a d'une grandeur physique A est égale au rapport de cette grandeur à son unité de mesure $[A]$:

$$a = \frac{A}{[A]}.$$

b) La grandeur physique ne dépend pas du choix de son unité de mesure, autrement dit, avec l'augmentation de l'unité de mesure de q fois, la valeur numérique de la grandeur physique donnée diminue de q fois.

c) La description mathématique d'un phénomène physique quelconque, révélant la dépendance fonctionnelle entre les valeurs numériques des grandeurs physiques, ne dépend pas du choix des unités de mesure de ces grandeurs. Par conséquent, tous les termes de l'équation décrivant le processus physique doivent avoir la même dimension, de sorte qu'ils peuvent être amenés à une forme sans dimension par division des deux membres de l'équation par une grandeur constante quelconque de même dimension.

4° *Théorème* π: toute relation entre n grandeurs dimensionnelles pour la mesure desquelles sont utilisées k unités principales de mesure peut être représentée sous forme de relation entre $n-k$ combinaisons sans dimension $\pi_1, \ldots, \pi_{n-k}$ de ces n grandeurs.

Supposons, par exemple, que dans le phénomène considéré, la dépendance entre les valeurs numériques $a_1, \ldots, a_n$ des grandeurs dimensionnelles $A_1, \ldots, A_n$ est de la forme $a_n = f(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$; les unités de mesure pour les premières k grandeurs sont établies indépendamment l'une de l'autre et admises comme unités principales, alors que les unités de mesure des $n-k$ grandeurs restantes sont dérivées, c'est-à-dire

$$[A_{k+1}] = \prod_{i=1}^{k} [A_i]^{m_i}, \ \ldots, \ [A_n] = \prod_{i=1}^{k} [A_i]^{p_i}.$$

Alors, augmentant les unités principales $[A_1]$, $[A_2]$, ..., $[A_k]$ de a_1, a_2, ..., a_k fois respectivement, on peut représenter la relation écrite ci-dessus sous forme sans dimension:

$$\pi_{n-k} = f(1,\ 1,\ \ldots,\ 1,\ \pi_1,\ \ldots,\ \pi_{n-k-1})$$

ou bien

$$\pi_{n-k} = F(\pi_1,\ \ldots,\ \pi_{n-k-1}),$$

où

$$\pi_1 = \frac{a_{k+1}}{\prod_{i=1}^{k} a_i^{m_i}} = \frac{A_{k+1}}{\prod_{i=1}^{k} A_i^{m_i}},\ \ldots,\ \pi_{n-k} = \frac{a_n}{\prod_{i=1}^{k} a_i^{p_i}} = \frac{A_n}{\prod_{i=1}^{k} A_i^{p_i}}$$

sont les combinaisons sans dimension ou les *complexes de puissances* des grandeurs physiques A_1, ..., A_n.

Quelques conséquences du théorème π: a) si $n - k = 0$, ceci signifie que l'équation $a_n = f(a_1, \ldots, a_{n-1})$ n'est pas juste puisqu'il est impossible de l'amener à une forme sans dimension; b) si $n - k = 1$, on a $\pi_{n-k} = \text{const}$.

5° Deux processus physiques sont appelés *similaires* s'ils obéissent aux mêmes lois physiques et si toutes les grandeurs ξ_i' caractérisant un processus peuvent être obtenues à partir des grandeurs ξ_i'', qui leur sont homogènes et qui caractérisent un autre processus, en les multipliant par les nombres constants c_i, qui sont appelés *constantes de similitude* et sont les mêmes pour toutes les grandeurs homogènes: $\xi_i' = c_i\xi_i''$.

On appelle *critères de similitude* les complexes de puissances sans dimension entrant dans la description mathématique sans dimension du processus considéré, donnée par le théorème π. Afin d'établir la forme des critères de similitude pour chaque cas concret, il faut, à l'aide des équations différentielles du processus et des conditions d'univocité de leur résolution, faire la liste de toutes les grandeurs dimensionnelles A_1, ..., A_n caractérisant ce processus et ensuite appliquer le théorème π à la dépendance fonctionnelle $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ qui représente l'intégrale indéfinie (la solution) du problème.

On appelle *critères de similitude déterminants* les critères qui sont constitués uniquement de grandeurs données conformément aux conditions d'univocité et de variables indépendantes.

6° *Premier théorème de similitude:* tous les critères de similitude de deux processus semblables sont égaux deux à deux, c'est-à-dire

$$\pi_1' = \pi_1'',\quad \pi_2' = \pi_2'',\ \text{etc.}$$

Second théorème de similitude: les critères de similitude sont liés l'un à l'autre par l'*équation de similitude*, qui est la solution sans dimension (l'intégrale) du problème considéré, vraie pour tous les processus semblables.

Troisième théorème de similitude: pour que deux processus soient semblables il faut et il suffit qu'ils soient qualitativement identiques et que leurs critères déterminants soient égaux deux à deux.

On appelle *qualitativement identiques* les processus dont les descriptions mathématiques diffèrent uniquement par les valeurs numériques des grandeurs dimensionnelles qu'elles contiennent.

7° La théorie de la similitude est la base scientifique des études expérimentales de phénomènes compliqués, réalisées par méthode de simulation et méthode d'analogie.

La *méthode de simulation* consiste en la reproduction et l'étude sur modèles des processus qualitativement identiques aux processus ayant lieu dans les objets réels. Les résultats de l'expérience s'étendent à ces objets si sont observées les conditions formulées au troisième théorème de similitude.

La *méthode d'analogie* consiste en l'étude d'un processus quelconque par recherche expérimentale de processus physiques qualitativement autres, mais dont les équations différentielles d'évolution et les conditions d'univocité par leur forme coïncident avec celles du processus à étudier. A l'heure actuelle sont largement utilisées les méthodes expérimentales d'étude de différents phénomènes, basées sur l'analogie entre phénomènes électriques, hydrodynamiques, thermiques, mécaniques et autres. Dans le cas de processus thermiques, la méthode d'analogie souffre d'un défaut essentiel puisqu'elle ne tient pas compte de la dépendance des propriétés physiques du milieu (viscosité, conductibilité thermique, capacité thermique, etc.) de la température.

8° Les principaux critères de similitude en hydroaérodynamique sont les nombres de Reynolds R, de Froude F, de Strouhal S et de Mach M.

Le *nombre de Reynolds* $\mathsf{R} = vl/\nu$, où v est la vitesse caractéristique du fluide pour un problème donné, l la dimension linéaire caractéristique du corps, ν la viscosité cinématique du fluide. Le choix de la vitesse caractéristique et de la dimension caractéristique s'effectue de diverses façons suivant le problème considéré. Par exemple, lors de l'écoulement d'un fluide incompressible dans une conduite cylindrique circulaire de diamètre d la grandeur $l = d$, et v représente la vitesse moyenne sur la section du fluide ($v = 4V_s/\pi d^2$, où V_s est le débit en volume du fluide par seconde); lors du contournement transversal d'un cylindre circulaire de diamètre d par le fluide la grandeur $l = d$, et v représente la vitesse du fluide non agité,

c'est-à-dire sa vitesse loin en avant du cylindre. Le nombre de Reynolds représente le rapport des forces d'inertie aux forces de viscosité dans le courant de fluide.

9° Le *nombre de Froude* est $F = v^2/gl$, où v est la vitesse du fluide loin du corps qu'il contourne, l la dimension linéaire caractéristique du corps, g l'accélération de la pesanteur. Le nombre de Froude représente le rapport des forces d'inertie aux forces de pesanteur dans le courant de fluide. Il joue un rôle important lors de la simulation des processus liés au fonctionnement de différentes installations hydrotechniques, au mouvement d'un bateau, etc. Dans la simulation des courants gazeux ce critère de similitude n'a pas d'importance, car l'influence de la force de pesanteur peut être négligée du fait de la faible densité des gaz.

10° Le *nombre de Strouhal* est le critère de similitude des mouvements non stationnaires du fluide. Il est $S = vT/l$, où v est la vitesse caractéristique, l la dimension linéaire caractéristique et T l'intervalle caractéristique de temps (par exemple, T est la période pour les mouvements périodiques).

11° Le *nombre de Mach* $M = v/c$, où v est la vitesse d'écoulement du fluide au point considéré, c la vitesse du son (dans le fluide) en ce même point. Le nombre M est la mesure de l'influence de la compressibilité du fluide sur son mouvement. Dans les cas où $M \ll 1$, le fluide peut être admis incompressible. Le mouvement d'un fluide compressible est *subsonique* si $M < 1$, et *supersonique* si $M > 1$. Le nombre M est le critère de similitude fondamental pour les mouvements stationnaires du fluide compressible s'accomplissant à grandes vitesses.

12° Les principaux critères de similitude dans le cas de transmission stationnaire de la chaleur par convection libre (p. 341) d'un fluide incompressible sont les nombres de Nusselt N, de Grashof G et de Prandtl P, et par convection forcée (p. 341) les nombres N, R et P. Souvent on utilise le nombre de Péclet RP.

13° *Nombre de Nusselt:* $N = \alpha l/K$, où α est le coefficient de transmission de chaleur (p. 342), l la dimension caractéristique, K le coefficient de conductibilité thermique du fluide.

14° Le *nombre de Prandtl* caractérise les propriétés physiques du fluide. Il est égal à $P = \nu/a = \eta c/K$, où ν est la viscosité cinématique du fluide (p. 334), a son coefficient de diffusivité thermique (p. 283), η et c la viscosité dynamique et la chaleur spécifique du fluide (pour les gaz $c = c_p$).

15° *Nombre de Grashof:* $G = \frac{\alpha_t g l^3}{\nu^2} \Delta T$, où α_t est le coefficient thermodynamique de dilatabilité (p. 195) du fluide, ν sa vis-

cosité cinématique, g l'accélération de la chute libre, l la dimension caractéristique, ΔT la chute de température égale [à la valeur absolue de la différence entre les températures du fluide et de la paroi.

6. Mouvement des corps dans un fluide. Couche limite

1° Conformément au principe mécanique de relativité (p. 51) le problème de l'interaction de force entre le corps animé d'un mouvement rectiligne uniforme de vitesse $\mathbf{u}$, dans un fluide immobile illimité, et le fluide lui-même est équivalent au problème de l'interaction entre un corps fixe et le courant stationnaire de fluide, dont la vitesse $\mathbf{v}_0$ loin en avant du corps est $-\mathbf{u}$.

2° L'équation de Navier-Stokes (p. 334) pour un écoulement stationnaire du fluide en l'absence de forces de masse est de la forme:

$$(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p + \nu\Delta\mathbf{v} + \left(\frac{\zeta}{\rho} + \frac{\nu}{3}\right)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{v}.$$

Dans le cas où le corps est contourné par un courant de fluide incompressible ($\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$), correspondant à de petites valeurs du nombre de Reynolds ($\mathsf{R} = v_0 l/\nu \ll 1$, où l est la dimension caractéristique du corps), de sorte que le terme d'inertie $(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} \ll \nu\Delta\mathbf{v}$, cette équation peut être représentée sous la forme approchée:

$$\eta\Delta\mathbf{v} - \operatorname{grad} p = 0 \quad \text{ou bien} \quad \Delta \operatorname{rot} \mathbf{v} = 0.$$

3° La *force de résistance* $\mathbf{F}$ agissant de la part du fluide sur un corps de forme sphérique, se mouvant lentement dans ce fluide, est déterminée par la *formule de Stokes*

$$\mathbf{F} = -6\pi\eta R\mathbf{u},$$

où R est le rayon du corps, $\mathbf{u}$ sa vitesse, η la viscosité dynamique du fluide. Cette formule est vraie pour $\mathsf{R} \ll 1$ ($\mathsf{R} = uR\rho/\eta$, ρ est la densité du fluide).

La vitesse u de chute stationnaire d'une sphère rigide dans un fluide visqueux, qui a lieu sous l'action de la pesanteur dans les limites d'application de la formule de Stokes, est:

$$u = \frac{2R^2 g(\rho' - \rho)}{9\eta},$$

où ρ' est la densité de la sphère, g l'accélération de la chute libre.

La force de résistance et la vitesse de chute stationnaire d'une goutte sphérique de fluide sont égales à

$$F = 2\pi\eta R u \frac{2\eta + 3\eta'}{\eta + \eta'}, \quad u = \frac{2R^2 g (\rho' - \rho)(\eta + \eta')}{3\eta(2\eta + 3\eta')},$$

où ρ' et η' sont la densité et la viscosité dynamique du fluide constituant la goutte.

Pour une petite bulle de vapeur émergeant dans un fluide, $\rho' \approx 0$ et $\eta' \approx 0$. C'est pourquoi la force de résistance

$$F = 4\pi\eta R u$$

et la vitesse de déplacement de la bulle

$$u = \frac{R^2 g \rho}{3\eta}.$$

4° Pour de très grandes valeurs du nombre de Reynolds on peut approximativement admettre que l'influence de la viscosité se manifeste uniquement dans la partie du fluide qui se meut au voisinage immédiat de la surface du corps contourné par lui et qui, pour cette raison, est appelée *couche limite*.

La vitesse du fluide à la surface du corps est nulle (condition d'adhérence, p. 337), la vitesse sur la frontière extérieure de la couche limite dépend de la vitesse et des dimensions transversales du flux, de la forme et des dimensions du corps. Dans le cas du contournement longitudinal d'une lame mince par un courant subsonique, cette vitesse est égale à la vitesse du flux.

L'épaisseur de la couche limite s'accroît peu à peu lorsqu'on se déplace le long du corps dans le sens de l'écoulement du fluide. Toutes les autres conditions étant égales d'ailleurs, la couche limite est d'autant plus mince que plus grand est le nombre de Reynolds.

En dehors de la couche limite, le fluide peut être admis parfait avec un degré de précision suffisamment grand.

5° Deux types qualitativement différents d'écoulement de fluides visqueux sont possibles: laminaire et turbulent.

On appelle *écoulement laminaire* l'écoulement ordonné d'un fluide lors duquel les trajectoires des particules voisines diffèrent très peu l'une de l'autre, de sorte que le fluide peut être considéré comme un ensemble de couches isolées se mouvant à vitesses différentes, sans s'entremêler les unes aux autres. On appelle *écoulement turbulent* d'un fluide l'écoulement au cours duquel les particules accomplissent des mouvements désordonnés non sta-

tionnaires suivant des trajectoires complexes, ce qui provoque l'entremêlement intense des différentes couches de fluide en mouvement.

L'écoulement laminaire peut être stationnaire et non stationnaire, l'écoulement turbulent, seulement non stationnaire (la vitesse du fluide en chacun des points de l'espace varie de façon irrégulière avec le temps). Pour caractériser le courant turbulent, on utilise la notion de *vitesse moyenne* $\bar{\mathbf{v}}$ à un point donné de l'espace, obtenue en faisant la moyenne de la vraie vitesse $\mathbf{v}$ pour une durée de temps suffisamment grande. La différence $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}}$ est appelée *pulsation de la vitesse*. On admet conventionnellement l'écoulement turbulent stationnaire si $\bar{\mathbf{v}}$ ne dépend pas du temps $\left(\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} = 0\right)$.

L'écoulement turbulent surgit par suite de la perte de stabilité de l'écoulement laminaire pour des valeurs suffisamment grandes du nombre de Reynolds.

6° Les équations du mouvement plan (p. 339) stationnaire d'un fluide incompressible dans la couche limite laminaire sont:

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} - \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0,$$

où x et y sont les coordonnées curvilignes comptées suivant la surface du corps dans le sens de l'écoulement du fluide (x) et suivant la normale à cette surface (y); p est la pression sur la frontière extérieure de la couche limite. La pression se transmet à travers la couche limite sans modification, autrement dit $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$, $p = p(x)$; elle est liée à la vitesse $\tilde{v}$ sur la frontière extérieure de la couche limite par la relation

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = -\tilde{v}\frac{d\tilde{v}}{dx}.$$

7° Dans le cas d'une couche limite laminaire sur une plaque contournée longitudinalement par un fluide incompressible, la contrainte tangentielle sur la surface de la plaque, engendrée par les forces de frottement, est

$$\tau_{tt} = 0{,}332 \sqrt{\frac{\eta \rho v_0^3}{x}} = 0{,}332\, \rho v_0^2 \frac{1}{\sqrt{R_x}},$$

où ρ et η sont la densité et la viscosité dynamique du fluide, v_0 la vitesse du flux, x la distance du bord d'attaque de la plaque, $R_x = x v_0 \rho/\eta$. Si la longueur de la plaque dans le sens du courant

est égale à l, la valeur moyenne de la contrainte de frottement sur toute la plaque est:

$$\overline{\tau}_{ff} = \frac{1}{l}\int_0^l \tau_{ff}\, dx = 0{,}664\ \rho v_0^2 \frac{1}{\sqrt{\mathsf{R}}},$$

où $\mathsf{R} = lv_0\rho/\eta$.

8° Le nombre de Reynolds $(\mathsf{R}_x)_{cr}$ auquel correspond le passage de la couche limite laminaire à la couche limite turbulente est appelé *critique*. Dans le cas d'un contournement longitudinal des plaques et des corps ayant une faible courbure de surface $(\mathsf{R}_x)_{cr} \sim$ $\sim 300\,000$ et dépend fortement de l'intensité de turbulence initiale du flux, égale au rapport de la pulsation moyenne quadratique de la vitesse du flux à sa vitesse moyenne: $\sqrt{\overline{v_0'^2}}/v_0$.

La formation de tourbillons dans la couche limite conduit à l'accroissement du gradient de vitesse du fluide à la surface du corps et à l'augmentation de la contrainte de frottement, car dans ce cas le frottement interne dans le fluide est conditionné par les processus de transfert de quantité de mouvement, réalisés aussi bien au compte de l'agitation thermique des molécules qu'au compte du mélange turbulent.

7. Mouvement des fluides dans les conduites

1° Il suit de l'équation de continuité que lors de l'écoulement stationnaire du fluide dans une conduite

$$m_s = \int_S \rho v_n\, dS = \text{const},$$

où m_s est la masse de fluide s'écoulant par unité de temps à travers chaque section transversale de la conduite (débit en masse par seconde, p. 331), ρ la densité du fluide, dS l'élément d'aire de la section transversale, v_n la composante normale de la vitesse du fluide à la surface dS.

Si le fluide est incompressible, on a:

$$V_s = \int_S v_n\, dS = \text{const},$$

où V_s est le volume de fluide s'écoulant par unité de temps à travers une section transversale arbitraire de la conduite (débit en volume par seconde).

Dans le cas de l'écoulement d'un fluide parfait dans une conduite cylindrique (S = const), la vitesse $v_n = v$ et elle est la même en tous les points d'une section transversale donnée, alors que pour un fluide incompressible elle est la même également pour toutes les sections.

Pour un fluide compressible

$$\rho v = \frac{m_s}{S} = \text{const.}$$

2° Lors du mouvement d'un fluide visqueux incompressible dans une conduite cylindrique le courant dans la portion initiale de la conduite est constitué de deux parties: couche limite au voisinage des parois et noyau non agité dans les limites duquel la vitesse du fluide en tous les points d'une section transversale donnée est la même. A mesure qu'on s'éloigne de l'orifice du tube, l'épaisseur de la couche limite augmente tant que celle-ci n'emplit pas toute la section transversale de la conduite, ce qui a lieu à la distance l_{stab}. La portion initiale de longueur l_{stab} est appelée *secteur de stabilisation hydrodynamique*, l'écoulement du fluide au-delà de ce secteur est *stabilisé*, puisque lui correspond un champ de vitesses du fluide identique pour toutes les sections. La longueur l_{stab} croît avec l'accroissement des dimensions de la conduite et du nombre de Reynolds (pour un courant laminaire dans une conduite circulaire $l_{stab} \sim R \cdot \mathrm{R}$ où R est le rayon de tube, $\mathrm{R} = 2\ V_s/\pi R \nu$).

3° Dans le cas d'un écoulement laminaire stabilisé du fluide incompressible dans une conduite cylindrique dont l'axe coïncide avec l'axe Oz du système de coordonnées cartésiennes rectangulaires, la vitesse $\mathbf{v}$ du fluide en tous les points de la conduite est parallèle à l'axe Oz: $v_x = v_y = 0$ et $v_z = v$. De l'équation de continuité (p. 332) il suit:

$$\frac{\partial v}{\partial z} = 0, \text{ autrement dit } v = f(x, y).$$

De l'équation de Navier-Stokes (p. 334) on déduit:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{dp}{dz} = \eta \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) = \text{const} = -\frac{\Delta p}{l},$$

où Δp est la perte de pression sur une portion de conduite de longueur l.

4° Pour une conduite cylindrique circulaire, cette équation peut être représentée sous la forme:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right) = -\frac{\Delta p}{\eta l},$$

où $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ est la distance de l'axe de la conduite.

La distribution des vitesses du fluide par la section de la conduite s'exprime par la formule

$$v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta l}(R^2 - r^2),$$

où R est le rayon de la conduite, r la distance de l'axe au point considéré de la section transversale, η la viscosité dynamique du fluide, Δp la perte de pression sur une portion de conduite de longueur l.

Le débit en volume par seconde du fluide est déterminé par la *formule de Poiseuille:*

$$V_s = \frac{\pi R^4}{8\eta l}\Delta p.$$

5° Si le tube a une section elliptique, on a:

$$v(x, y) = \frac{\Delta p}{2\eta l}\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}\left[1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right],$$

$$V_s = \frac{\pi a^3 b^3}{4\eta l(a^2 + b^2)}\Delta p,$$

où a et b sont les demi-axes de l'ellipse, x et y les coordonnées du point considéré de la section transversale dans le système de coordonnées dont les axes Ox et Oy coïncident avec les demi-axes a et b de l'ellipse.

6° Pour l'écoulement dans un interstice annulaire entre surfaces cylindriques coaxiales avec les rayons R_1 et $R_2 > R_1$

$$v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta l}\left[R_2^2 - r^2 + \frac{R_2^2 - R_1^2}{\ln(R_2/R_1)}\ln\frac{r}{R_2}\right] \quad (R_1 \leqslant r \leqslant R_2),$$

$$V_s = \frac{\pi\Delta p}{8\eta l}\left[R_2^4 - R_1^4 - \frac{(R_2^2 - R_1^2)^2}{\ln(R_2/R_1)}\right].$$

7° Le nombre critique de Reynolds R_{cr} ($\mathsf{R} = 4V_s/\pi d\nu$, où d est le diamètre de la conduite), correspondant au passage de l'écoulement laminaire à l'écoulement turbulent, est de l'ordre de 2 300 pour les conduites circulaires lisses.

Pour l'écoulement turbulent d'un fluide incompressible dans une conduite cylindrique circulaire existe toute une série de formules semi-empiriques.

8° Pour l'écoulement adiabatique stationnaire d'un fluide compressible parfait dans une conduite de section variable, la dépendance entre la densité de courant de fluide ρv et la vitesse v est de la forme:

$$\frac{d}{dv}(\rho v) = \rho\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right),$$

où c est la vitesse locale du son (p. 560) et ρ la densité correspondant aux paramètres d'état du fluide dans la section où sa vitesse est égale à v.

La grandeur ρv atteint sa valeur maximale $\rho_* v_*$ à la vitesse v_* égale à la vitesse locale du son c_* et appelée *vitesse critique*. Le rapport $v/c_* = M_*$ est appelé *coefficient de vitesse*. Lorsque $M_* < 1$, le courant est subsonique, et lorsque $M_* > 1$, il est supersonique (p. 347). Pour passer de l'écoulement subsonique à l'écoulement supersonique, il est indispensable que l'aire S des sections transversales de la conduite varie le long de son axe suivant la loi

$$S = \frac{m_s}{\rho v} = \frac{\rho_* v_*}{\rho v} S_*,$$

autrement dit, dans le domaine d'écoulement subsonique l'aire S diminue graduellement jusqu'à la valeur critique S_* et ensuite augmente à nouveau. Une telle conduite est appelée *tuyère de Laval.*

Pour un gaz parfait

$$c_* = c_0\sqrt{\frac{2}{\varkappa+1}} = \sqrt{\frac{2\varkappa}{\varkappa+1}\frac{p_0}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{2\varkappa}{\varkappa+1}BT_0},$$

$$\rho_* = \rho_0\left(\frac{2}{\varkappa+1}\right)^{\frac{1}{\varkappa-1}}, \quad T_* = \frac{2}{\varkappa+1}T_0 \text{ et } p_* = p_0\left(\frac{2}{\varkappa+1}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}},$$

où $\varkappa$ est l'indice d'adiabatique (p. 168), B la constante spécifique des gaz (p. 158); p_0, ρ_0 et T_0 la pression, la densité et la température du gaz freiné adiabatiquement jusqu'à la vitesse $v = 0$; c_0 la vitesse du son dans le gaz à la température T_0; ρ_*, T_* et p_* les valeurs critiques de la densité, de la température et de la pression.

Dans une section arbitraire de la conduite les paramètres du gaz parfait satisfont aux équations:

$$\rho = \rho_0\left(1 - \frac{\varkappa - 1}{2}\frac{v^2}{c_0^2}\right)^{\frac{1}{\varkappa - 1}} = \rho_0\left(1 - \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1}\frac{v^2}{c_*^2}\right)^{\frac{1}{\varkappa - 1}},$$

$$T = T_0\left(1 - \frac{\varkappa - 1}{2}\frac{v^2}{c_0^2}\right) = T_0\left(1 - \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1}\frac{v^2}{c_*^2}\right),$$

$$p = p_0\left(1 - \frac{\varkappa - 1}{2}\frac{v^2}{c_0^2}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}} = p_0\left(1 - \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1}\frac{v^2}{c_*^2}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}}.$$

QUATRIÈME PARTIE

Electricité et magnétisme

CHAPITRE PREMIER

Electrostatique

1. Notions fondamentales. Loi de Coulomb

1° On appelle *électrostatique* l'étude des propriétés et de l'interaction des charges électriques immobiles par rapport à un système de référence galiléen choisi.

Il existe deux espèces de charges électriques: positives et négatives. Les charges de même signe se repoussent alors que les charges de signe contraire s'attirent.

2° *Loi de la conservation des charges électriques:* la somme algébrique des charges électriques d'un système isolé reste constante.

La charge électrique de tout corps comprend un nombre entier de *charges élémentaires* égales à $4{,}8 \cdot 10^{-10}$ unité électrostatique de quantité électrique (u.é.s. CGS). La plus petite particule stable possédant une charge négative élémentaire est appellée *électron*. Sa masse est $9{,}1 \cdot 10^{-28}$ g. La plus petite particule stable ayant une charge positive élémentaire est appelée *proton*. Sa masse est $1{,}67 \cdot 10^{-24}$ g. Les électrons et les protons font partie des atomes de chaque substance.

Tout corps neutre (non chargé) contient des charges de signes contraires en quantités égales.

Les charges électriques sont supposées *ponctuelles* si les dimensions linéaires des corps sur lesquels ces charges sont concentrées sont beaucoup de fois plus petites que n'importe quelles distances considérées dans un problème donné.

3° *Loi de Coulomb:* la force F d'interaction électrostatique entre deux charges électriques ponctuelles q_1 et q_2 se trouvant dans le vide est directement proportionnelle au produit de ces

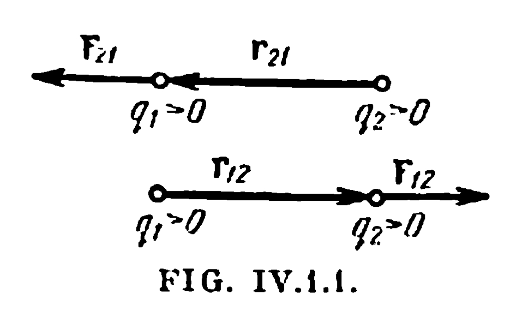


FIG. IV.1.1.

charges et inversement proportionnelle au carré de leur distance r:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$F = \frac{q_1q_2}{r^2} \quad \text{(en u.é.s. CGS)},$$

où $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}$ C²/N·m² $= 8{,}85 \times 10^{-12}$ F/m est la *constante diélectrique.*

Pour les charges de même signe ($q_1 > 0$, $q_2 > 0$ ou $q_1 < 0$, $q_2 < 0$) $F > 0$, ce qui correspond à leur répulsion réciproque. Pour les charges de signe contraire ($q_1 > 0$, $q_2 < 0$ ou $q_1 < 0$, $q_2 > 0$) $F < 0$, ce qui correspond à leur attraction réciproque.

4° Les forces d'interaction électrostatique sont des forces centrales. La force $\mathbf{F}_{12}$, agissant dans le vide sur la charge ponctuelle q_2 de la part de la charge ponctuelle q_1, est égale à

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^3}\mathbf{r}_{12} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{q_1q_2}{r^3}\mathbf{r}_{12} \quad \text{(en u.é.s. CGS)},$$

où $\mathbf{r}_{12}$ est le rayon vecteur réunissant les charges q_1 et q_2 (fig. IV.1.1).

5° Si les charges ponctuelles q_1 et q_2 se trouvent dans un diélectrique homogène illimité liquide ou gazeux, leur force d'interaction électrostatique sera:

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{\varepsilon r^3}\mathbf{r}_{12} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{q_1q_2}{\varepsilon r^3}\mathbf{r}_{12} \quad \text{(en u.é.s. CGS)},$$

où ε est la *constante diélectrique relative* du milieu, montrant combien de fois la force d'interaction entre les charges q_1 et q_2 dans un milieu donné est plus petite que dans le vide. La décroissance de la force $\mathbf{F}_{12}$ de ε fois est liée au phénomène *d'électrostriction*, c'est-à-dire à la déformation du diélectrique sous l'influence du champ électrique. Lors de la déformation les diélectriques liquides et gazeux adhérant aux corps chargés exercent sur ceux-ci une action mécanique complémentaire. Dans les diélectriques solides, les corps chargés se disposent à l'intérieur de cavités et, toutes les autres conditions étant égales, les forces agissant sur ces corps dépendent de la forme des cavités.

2. Champ électrique. Intensité du champ

1° En vertu de la *théorie de l'action à courte distance* les interactions entre les particules de la matière et les corps macroscopiques éloignés l'un de l'autre sont réalisées par les *champs physiques* que créent ces particules ou ces corps dans l'espace environnant. Les champs sont aussi matériels que leurs sources: particules et corps. La notion de champs physiques est étroitement liée au fait que les vitesses de propagation dans l'espace des variations de n'importe quelles interactions sont finies. En relativité restreinte (p. 544) on affirme, conformément aux données expérimentales, que ces vitesses ne dépassent pas la vitesse de la lumière dans le vide $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/s.

2° C'est par le *champ électrostatique* qu'est accomplie l'interaction entre particules ou corps immobiles chargés électriquement. Le champ électrostatique est un champ stationnaire, c'est-à-dire un *champ électrique* ne variant pas au cours du temps, créé par des charges immobiles. Ce champ est un cas particulier du *champ électromagnétique* par lequel est accomplie l'interaction entre des particules chargées électriquement, qui, dans le cas général, peuvent se déplacer de façon arbitraire par rapport au système de référence.

3° La caractéristique de force du champ électrique est son vecteur *intensité* (vecteur *champ*)[1]:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0},$$

où **F** est la force agissant de la part du champ sur la charge «d'essai» immobile q_0 placée au point considéré du champ. On suppose en outre que la charge d'essai ponctuelle q_0 est suffisamment petite pour ne pas déformer le champ que l'on mesure. L'intensité du champ électrique en un point quelconque est numériquement égale et coïncide en direction avec la force agissant de la part du champ sur la charge d'essai ponctuelle unité placée en ce point.

L'intensité du champ électrostatique ne dépend pas du temps. Le champ électrostatique est *uniforme* si son intensité **E** est la même en tous les points. Dans le cas contraire le champ est *non uniforme.*

Pour représenter graphiquement les champs électrostatiques on utilise les *lignes de forces*, c'est-à-dire les lignes qui admettent en chaque point pour tangente la direction du vecteur champ en ce

---

[1]) Habituellement, la grandeur **E** est appelée tout court le «champ». (N. d. R.)

point. Les lignes de forces du champ électrostatique sont ouvertes. Elles partent des charges positives et aboutissent aux charges négatives (en particulier elles peuvent s'éloigner dans l'infini ou venir de l'infini). En vertu de l'univocité de la direction du vecteur champ en chaque point, les lignes de forces ne se coupent nulle part. La trajectoire d'une particule chargée libre se mouvant dans le champ coïncide avec la ligne de forces du champ dans le seul cas où le champ est uniforme (les lignes de forces d'un tel champ représentent un système de droites parallèles) et la vitesse initiale de la particule est dirigée suivant la ligne de forces.

4° La force résultante $\mathbf{F}$, agissant sur la charge d'essai q_0 de la part du champ créé par un système de charges immobiles $q_1, q_2, \ldots, q_n$, est égale à la somme vectorielle des forces $\mathbf{F}_i$ appliquées à celui-ci de la part des champs créés par chacune des charges q_i:

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i.$$

Il en découle le *principe de superposition des champs électriques:*

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}_i.$$

L'intensité du champ électrique d'un système de charges ponctuelles est la somme vectorielle des intensités des champs créés par chacune de ces charges séparément.

Dans le cas de distribution continue des charges électriques,

$$\mathbf{E} = \int d\mathbf{E};$$

l'intégration est étendue à tout le domaine où sont réparties les charges:

a) à une ligne si les charges sont réparties le long d'une ligne de densité linéaire $\tau = \frac{dq}{dl}$ (dq est la charge de l'élément de ligne de longueur dl);

b) à une surface si les charges sont distribuées sur une surface de densité superficielle $\sigma = \frac{dq}{dS}$ (dS est l'élément de surface);

c) à un volume si les charges sont distribuées dans un volume de densité volumique $\rho = \frac{dq}{dV}$ (dV est l'élément de volume).

5° On distingue dans le champ électrostatique avec diélec-

triques deux espèces de charges: libres et liées. On appelle ***charges liées*** les charges faisant partie des atomes et molécules du diélectrique, ainsi que les charges des ions de diélectriques cristallins à réseau ionique. Toutes les autres charges sont appelées ***libres***. Comme exemples de telles charges peuvent servir les électrons de conduction dans les métaux, les ions dans les gaz et électrolytes, les charges excédentaires formées dans un corps conducteur ou non conducteur et conditionnant la perturbation de sa neutralité électrique, etc.

Dans ce cas, l'intensité du champ $\mathbf{E}$ est la somme vectorielle des intensités des champs créés par des charges libres ($\mathbf{E}_0$) et liées ($\mathbf{E}_p$):

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_p.$$

On suppose, dans les exemples de champs électrostatiques examinés ci-dessous, que le milieu entourant les charges libres représente un diélectrique isotrope, qui est homogène soit à l'intérieur de tout le champ, soit à l'intérieur des domaines limités par des surfaces équipotentielles (p. 368). Dans ces conditions

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{E}_0}{\varepsilon},$$

où ε est la constante diélectrique relative du milieu au point considéré du champ. Autrement dit, l'intensité du champ électrostatique de charges libres données dans un diélectrique isotrope et homogène est ε fois plus petite que dans le vide *(loi généralisée de Coulomb)*.

6° L'intensité du champ électrostatique d'une charge ponctuelle q est:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{\varepsilon r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$\mathbf{E} = \frac{q}{\varepsilon r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad \text{(en u.é.s. CGS)},$$

où $\mathbf{r}$ est le rayon vecteur mené de la charge ponctuelle au point considéré du champ, ε la constante diélectrique relative du milieu, ε_0 la constante diélectrique. La valeur numérique de l'intensité du champ est:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{\varepsilon r^2} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$E = \frac{q}{\varepsilon r^2} \quad \text{(en u.é.s. CGS)}.$$

7° Intensité du champ électrostatique d'un système de charges ponctuelles $q_1, q_2, \ldots, q_n$:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{\varepsilon r_i^2} \frac{\mathbf{r}_i}{r_i} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{\varepsilon r_i^2} \frac{\mathbf{r}_i}{r_i} \quad \text{(en u.é.s. CGS)}.$$

En particulier, pour le *dipôle électrique* d'un système de deux charges électriques de même valeur et de signe contraire, $+q$ et $-q$, séparées par la distance l, petite devant la distance r jusqu'au point considéré du champ,

$$\mathbf{E} = \frac{3(\mathbf{p}_e \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r^5} - \frac{\mathbf{p}_e}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r^3} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$\mathbf{E} = \frac{3(\mathbf{p}_e \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{\varepsilon r^5} - \frac{\mathbf{p}_e}{\varepsilon r^3} \quad \text{(en u.é.s. CGS)},$$

où $\mathbf{p}_e = q\mathbf{l}$ est le *moment électrique* du dipôle; le vecteur $\mathbf{l}$ est dirigé suivant l'axe du dipôle de la charge négative à la charge positive. Dans un système de coordonnées sphériques r, ϑ et φ avec son centre au milieu du dipôle et son axe polaire parallèle à $\mathbf{p}_e$ (fig. IV.1.2),

$$E_r = \frac{p_e \cos\vartheta}{2\pi\varepsilon_0 \varepsilon r^3}, \quad E_\vartheta = \frac{p_e \sin\vartheta}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r^3}, \quad E_\varphi = 0 \quad \text{(en u. SI)},$$

$$E_r = \frac{2p_e \cos\vartheta}{\varepsilon r^3}, \quad E_\vartheta = \frac{p_e \sin\vartheta}{\varepsilon r^3}, \quad E_\varphi = 0 \quad \text{(en u.é.s. CGS)}.$$

Le module du vecteur $\mathbf{E}$ est alors:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{p_e}{\varepsilon r^3} \sqrt{3\cos^2\vartheta + 1} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$E = \frac{p_e}{\varepsilon r^3} \sqrt{3\cos^2\vartheta + 1} \quad \text{(en u.é.s. CGS)}.$$

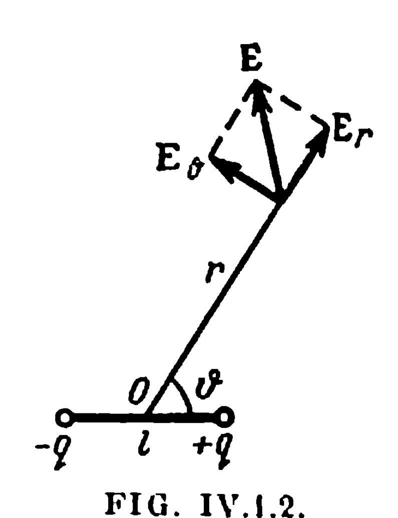


FIG. IV.1.2.

8° Le champ électrostatique en dehors d'une ligne droite infinie chargée uniformément, d'un cylindre circulaire chargé en

surface, dans l'espace entre deux cylindres coaxiaux (câble coaxial, condensateur cylindrique, p. 375):

$$\mathbf{E} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon r}\,\frac{\mathbf{r}}{r} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$\mathbf{E} = \frac{2\tau}{\varepsilon r}\,\frac{\mathbf{r}}{r} \quad \text{(en u.é.s. CGS)},$$

où τ est la densité linéaire des charges, $\mathbf{r}$ le rayon vecteur mené de l'axe du cylindre au point considéré du champ. Le champ à l'intérieur du cylindre est $\mathbf{E}_i = 0$.

9° Le champ électrostatique d'un plan infini chargé uniformément:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$E = \frac{2\pi\sigma}{\varepsilon} \quad \text{(en u.é.s. CGS)},$$

où σ est la densité superficielle des charges.

10° Le champ électrostatique entre deux plans parallèles infinis, chargés uniformément mais d'électricités contraires:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$E = \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} \quad \text{(en u.é.s. CGS)},$$

où σ est la valeur absolue de la densité superficielle des charges des deux plans.

11° Le champ électrostatique d'une sphère de rayon R, dont la charge q est répartie uniformément sur toute la surface, coïncide en dehors de la sphère avec le champ d'une charge ponctuelle q placée au centre de cette sphère:

$$\mathbf{E} = \frac{q\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^3} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$\mathbf{E} = \frac{q\mathbf{r}}{\varepsilon r^3} \quad \text{(en u.é.s. CGS)}.$$

Le champ à l'intérieur de la sphère est $\mathbf{E}_i = 0$.

12° Le champ électrostatique d'une sphère de rayon R, chargée uniformément en volume avec la densité volumique ρ

$$\left.\begin{aligned} r \geqslant R:\ \mathbf{E} &= \frac{\rho}{3\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{R}{r}\right)^3 \mathbf{r}, \\ r \leqslant R:\ \mathbf{E} &= \frac{1}{3\varepsilon_0\varepsilon}\rho\cdot\mathbf{r} \end{aligned}\right\} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$\left.\begin{aligned} r \geqslant R:\ \mathbf{E} &= \frac{4}{3}\,\frac{\pi}{\varepsilon}\,\rho\left(\frac{R}{r}\right)^3 \mathbf{r}, \\ r \leqslant R:\ \mathbf{E} &= \frac{4}{3\varepsilon}\pi\rho\mathbf{r} \end{aligned}\right\} \quad \text{(en u.é.s. CGS)}.$$

3. Déplacement électrique. Théorème d'Ostrogradski-Gauss pour le flux de déplacement

1° On appelle *déplacement électrique* ou *induction électrique* **D** une grandeur vectorielle caractérisant le champ électrique.

Pour le champ dans le vide

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} \ \text{(en u. SI)}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{E} \ \text{(en u.é.s. CGS)}.$$

Pour le champ dans un diélectrique

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\,\mathbf{E} + \mathbf{P}_e \quad \text{(en u. SI)},$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\,\mathbf{P}_e \quad \text{(en u.é.s. CGS)},$$

où $\mathbf{P}_e$ est le vecteur polarisation (pp. 379 et 383).

Si le milieu est isotrope, on a:

$$\mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} \quad \text{(en u.é.s. CGS)},$$

où ε est une grandeur scalaire. Si, de plus, le milieu est homogène, E est inversement proportionnel à ε et D ne dépend pas de ε (lors d'une distribution donnée des charges libres).

2° Le problème fondamental d'électrostatique est la recherche des vecteurs **D** et **E** en chaque point du champ électrique créé par un système donné de sources du champ, autrement dit, par les charges électriques. On utilise pour la résolution de ce problème, à part le principe de superposition des champs (p. 359), la méthode fondée sur le calcul du *flux de déplacement* ou *d'induction électrique*.

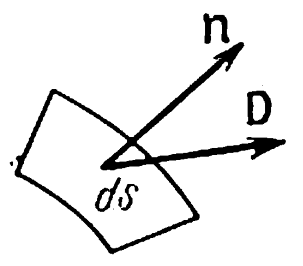


FIG. IV.1.3.

Le flux élémentaire $d\Phi_e$ du déplacement **D** à travers l'élément de surface dS est égal à

$$d\Phi_e = \mathbf{D}\cdot\mathbf{n}\ dS = D\,dS\cos(\mathbf{D},\mathbf{n}) =$$
$$= D_n\ dS = D\ dS_n,$$

où **n** est le vecteur unité de la normale extérieure à la surface dS (fig. IV.1.3), D_n la projection du vecteur **D** sur la normale, $dS_n = dS\cos(\mathbf{D},\mathbf{n})$. Le flux de déplacement Φ_e à travers une surface arbitraire S est trouvé par sommation (intégration) de tous les flux élémentaires:

$$\Phi_e = \int_S D\ dS\cos(\mathbf{D},\mathbf{n}) = \int_S D_n\ dS = \int_S D\ dS_n.$$

Si le champ est uniforme et la surface plane S est disposée perpendiculairement au champ, on a $D_n = D = \text{const}$ et

$$\Phi_e = DS.$$

3° *Théorème d'Ostrogradski-Gauss:* le flux de déplacement Φ_e à travers une surface fermée arbitraire est proportionnel à la somme algébrique des charges électriques libres q_i embrassées par cette surface:

$$\Phi_e = \oint_S D_n\ dS = \sum_i q_i \qquad \text{(en u. SI)},$$

$$\Phi_e = \oint_S D_n\ dS = 4\pi\sum_i q_i \qquad \text{(en u.é.s. CGS)}.$$

Le flux de déplacement Φ_e à travers une surface fermée arbitraire, n'embrassant pas de charges libres, est nul.

Théorème d'Ostrogradski-Gauss sous forme différentielle (ρ est la densité volumique des charges, p. 359):

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = \rho \qquad \text{(en u. SI)},$$
$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho \qquad \text{(en u.é.s. CGS)}.$$

Sous cette forme le théorème montre que ce sont les charges électriques libres qui sont responsables du déplacement électrique. La forme différentielle du théorème représente l'une des équations de Maxwell pour le champ électromagnétique (p. 523).

L'application du théorème d'Ostrogradski-Gauss pour déterminer **D** conduit au choix d'une surface fermée permettant de calculer de façon élémentaire le flux de déplacement Φ_e.

4. Potentiel du champ électrostatique

1° Le travail élémentaire dA effectué par la force **F** agissant sur la charge électrique ponctuelle q' située dans un champ électrostatique **E** est égal à

$$dA = Fdl \cos(\mathbf{F}, d\mathbf{l}) = q'E \cos(\mathbf{E}, d\mathbf{l})\, dl,$$

où dl est le déplacement élémentaire de la charge, $(\mathbf{E}, d\mathbf{l})$ l'angle formé par les directions des vecteurs **E** et $d\mathbf{l}$.

Le travail total A accompli lors d'un déplacement fini de la charge q' du point n au point m du champ (fig. IV.1.4) est égal à

$$A = q' \int_n^m Edl \cos(\mathbf{E}, d\mathbf{l}).$$

2° Si le champ électrostatique est créé par une charge ponctuelle $+q$, on a:

$$A = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \quad \text{(en u. SI)},$$

$$A = \frac{qq'}{\varepsilon}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \quad \text{(en u.é.s. CGS)},$$

où r_1 et r_2 sont les distances des points n et m de la charge q, ε_0 la constante diélectrique, ε la constante diélectrique relative du milieu.

Le travail des forces électriques de répulsion des charges de même signe est positif lors de l'éloignement de ces charges l'une de l'autre, et négatif lors de leur rapprochement. Le travail des forces électriques d'attraction des charges de signe contraire est positif lors du rapprochement de ces charges, et négatif lors de leur éloignement l'une de l'autre. Le travail effectué lors du déplacement d'une charge électrique q' dans un champ créé par une charge q ne dépend pas de la forme du chemin, mais uniquement des positions initiale et finale de la charge (caractère potentiel des forces électrostatiques, p. 66).

Le travail qu'effectuent les forces électriques lors du déplacement d'une charge positive unité suivant le contour fermé L est numériquement égal à

$$A = \oint_L E\, dl \cos(\mathbf{E}, d\mathbf{l}) = \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}.$$

r_2
n
$+q$
m
r_1
q'

FIG. IV. 1.4.

Cette intégrale est appelée *circulation du champ* le long du contour fermé L.

La circulation du champ électrostatique le long d'un contour fermé est nulle (caractère potentiel du champ électrostatique):

$$\oint_L \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = \oint_L E\,dl\cos(\mathbf{E}, d\mathbf{l}) = 0.$$

L'écriture de cette propriété du champ électrostatique sous forme différentielle est:

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = 0.$$

3° Le travail accompli par les forces du champ lors du déplacement d'une charge électrique q' dans un champ électrostatique créé par une charge q est égal à la décroissance de l'énergie potentielle W_p de la charge q':

$$A = -\Delta W_p = W_{p1} - W_{p2},$$

où W_{p1} et W_{p2} sont les valeurs de l'énergie potentielle de la charge aux points initial et final de la trajectoire. Lors du déplacement d'une charge q' dans un champ électrostatique créé par un système arbitraire de charges $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$, les forces électrostatiques effectuent un travail égal à la somme algébrique des travaux accomplis par les forces agissant sur q' de la part de chacune des charges q_i.

La variation de l'énergie potentielle ΔW_p de la charge q' lors de son déplacement du point 1 au point 2, dans le champ du système de charges ponctuelles q_i, est traduite par

$$\Delta W_p = q'\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0\,\varepsilon r_{i2}} - \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0\,\varepsilon r_{i1}}\right) \quad \text{(en u. SI)},$$

$$\Delta W_p = q'\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{q_i}{\varepsilon r_{i2}} - \frac{q_i}{\varepsilon r_{i1}}\right) \quad \text{(en u.é.s. CGS)},$$

où r_{i1} et r_{i2} sont les distances initiale et finale entre les charges q_i et q'; la sommation porte sur toutes les n charges du système.

4° L'énergie potentielle d'une charge électrique q' à un point donné du champ électrostatique distant de r de la charge q créant le champ (à condition que $W_p(\infty) = 0$) est égale à

$$W_p = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0\,\varepsilon r} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$W_p = \frac{qq'}{\varepsilon r} \quad \text{(en u.é.s. CGS)}.$$

L'énergie potentielle de répulsion des charges de même signe est positive et croît lors du rapprochement des charges. L'énergie potentielle d'attraction des charges de signe contraire est négative et croît jusqu'à zéro lors de l'éloignement de l'une des charges à l'infini. La figure IV.1.5 montre la dépendance $W_p(r)$ pour deux charges ponctuelles.

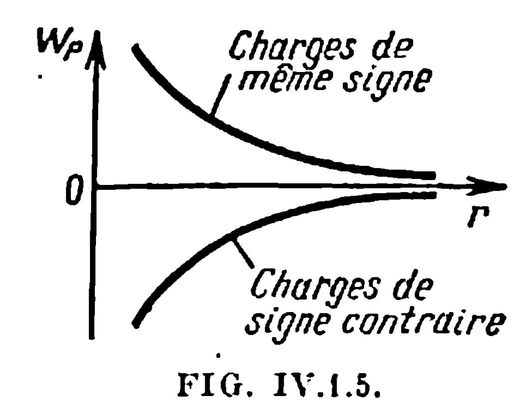


FIG. IV.1.5.

5° Le potentiel du champ électrique représente la caractéristique énergétique de celui-ci. On appelle *potentiel* en un point donné du champ une grandeur scalaire numériquement égale à l'énergie potentielle W_p d'une charge positive unité placée en ce point:

$$\varphi = \frac{W_p}{q}.$$

6° Le travail effectué par les forces du champ électrostatique lors du déplacement d'une charge électrique ponctuelle q est égal au produit de cette charge par la *différence de potentiel* aux points initial 1 et final 2 du chemin:

$$A = W_{p1} - W_{p2} = q(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Si le point 2 se trouve à l'infini, on a $W_{p2} = 0$ et l'on admet $\varphi_2 = 0$. Le travail A_∞ fourni pour déplacer la charge q du point 1 à l'infini est alors:

$$A_\infty = W_{p1} = q\varphi_1;$$

par conséquent, $\varphi = A_\infty/q$.

Le potentiel du champ électrostatique est numériquement égal au travail accompli par les forces électriques lors du déplacement d'une charge positive unité d'un point donné du champ à l'infini. Le potentiel est numériquement égal aussi au travail qu'effectuent les forces extérieures (contre les forces du champ électrique) pour déplacer une charge positive unité de l'infini au point donné.

On admet souvent comme potentiel zéro non la valeur du potentiel à l'infini, mais celle du potentiel de la Terre. Ceci est

de peu d'importance étant donné que dans tous les calculs pratiques il importe de savoir la différence de potentiel entre deux points du champ électrostatique et non les valeurs absolues des potentiels en ces points.

7° On appelle *surface équipotentielle* le lieu géométrique des points du champ électrostatique ayant le même potentiel. En tout point de la surface équipotentielle le vecteur champ électrostatique est perpendiculaire à celle-ci et dirigé dans le sens de décroissance du potentiel.

La relation entre le champ électrostatique et son potentiel est:

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi.$$

Le champ électrostatique en un point quelconque est égal au gradient de potentiel du champ en ce point pris avec le signe moins. Le signe moins montre que le vecteur **E** est dirigé comme indiqué ci-dessus.

E, étant une grandeur finie en tout point du champ, est une fonction continue des coordonnées des points du champ.

8° Lors de la superposition des champs électrostatiques, leurs potentiels s'ajoutent algébriquement. Si les diélectriques se trouvent dans le champ électrostatique, le potentiel φ en un point arbitraire du champ sera la somme algébrique des potentiels en ce point pour les champs créés par les charges libres (φ_0) et par les charges liées (φ_p) (p. 360):

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_p.$$

Lorsque $\varphi(\infty) = 0$,

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int \frac{\rho + \rho_p}{r}\, dV + \int \frac{\sigma + \sigma_p}{r}\, dS\right] \quad \text{(en u. SI)},$$

$$\varphi = \int \frac{\rho + \rho_p}{r}\, dV + \int \frac{\sigma + \sigma_p}{r}\, dS \quad \text{(en u.é.s. CGS)}.$$

où ρ et ρ_p sont les densités volumiques des charges libres et liées, σ et σ_p les densités superficielles des charges libres et liées, r la distance des éléments de volume dV et des éléments de surface dS jusqu'au point considéré du champ, et l'intégration s'étend à tout l'espace occupé par les charges libres et liées.

On suppose, dans les exemples de champs électrostatiques considérés ci-dessous, que le diélectrique emplissant le champ soit

homogène et isotrope. Dans ce cas, lors d'une distribution donnée des charges libres, le potentiel du champ électrostatique dans le diélectrique est ε fois plus petit que dans le vide: $\varphi = \varphi_0/\varepsilon$ et il satisfait à l'*équation différentielle de Poisson:*

$$\text{div grad } \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}, \quad \text{ou bien} \quad \Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$\text{div grad } \varphi = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}, \quad \text{ou bien} \quad \Delta\varphi = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon} \quad \text{(en u.é.s. CGS)},$$

où $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ est l'opérateur de Laplace, ε la constante diélectrique relative du milieu, ρ la densité volumique des charges libres.

9° Le potentiel du champ d'une charge ponctuelle q, à condition que $\varphi(\infty) = 0$, est:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$\varphi = \frac{q}{\varepsilon r} \quad \text{(en u.é.s. CGS)},$$

où r est la distance entre le point du champ à potentiel φ et la charge q, ε la constante diélectrique relative du milieu, ε_0 la constante diélectrique.

10° Le potentiel du champ d'un système arbitraire de charges ponctuelles $q_1, \ldots, q_n$, à condition que $\varphi(\infty) = 0$, est:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_i} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{\varepsilon r_i} \quad \text{(en u.é.s. CGS)}.$$

En particulier, le potentiel du champ d'un dipôle (p. 361) est:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{p}_e \cdot \mathbf{r}}{\varepsilon r^3} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$\varphi = \frac{\mathbf{p}_e \cdot \mathbf{r}}{\varepsilon r^3} \quad \text{(en u.é.s. CGS)},$$

où $\mathbf{p}_e$ est le moment électrique du dipôle, $\mathbf{r}$ le rayon vecteur mené du centre du dipôle au point considéré du champ.

11° Le potentiel d'un champ électrostatique créé par des surfaces chargées (potentiel du champ de charges superficielles), à condition que $\varphi(\infty) = 0$, est:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \int\limits_S \frac{\sigma\, dS}{r} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$\varphi = \int\limits_S \frac{\sigma\, dS}{\varepsilon r} \quad \text{(en u.é.s. CGS)}.$$

Le potentiel des charges volumiques, lorsque $\varphi(\infty) = 0$, est:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \int\limits_V \frac{\rho\, dV}{r} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$\varphi = \int\limits_V \frac{\rho\, dV}{\varepsilon r} \quad \text{(en u.é.s. CGS)}.$$

Ici ρ et σ sont les densités volumique et superficielle des charges libres, r la distance de la charge volumique élémentaire $\rho\, dV$ ou de la charge superficielle $\sigma\, dS$ jusqu'au point considéré du champ. L'intégration s'étend aux surfaces et aux volumes où sont réparties les charges électriques.

12° La différence de potentiel entre deux points du champ, distants respectivement de r_1 et de r_2 d'une ligne droite infinie chargée uniformément, est égale à

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\tau}{\varepsilon} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad \text{(en u.é.s. CGS)},$$

où τ est la densité linéaire des charges, ε la constante diélectrique relative du milieu, ε_0 la constante diélectrique. Les mêmes formules sont vraies pour le champ créé par un cylindre circulaire chargé uniformément, de rayon R et de longueur infinie, si $r \geqslant R$.

13° La différence de potentiel entre deux points du champ 1 et 2, distants respectivement de x_1 et de x_2 d'un plan infini chargé uniformément, est égale à

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon} (x_2 - x_1) \quad \text{(en u. SI)},$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\pi\sigma}{\varepsilon} (x_2 - x_1) \quad \text{(en u.é.s. CGS)},$$

où σ est la densité superficielle des charges.

14° La différence de potentiel $\varphi_1 - \varphi_2$ entre deux plans parallèles infinis, chargés uniformément d'électricités contraires, est égale à

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0 \varepsilon} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{4\pi\sigma d}{\varepsilon} \quad \text{(en u.é.s. CGS)},$$

où d est la distance entre plans.

15° Le potentiel du champ électrostatique d'une sphère de rayon R avec une charge q uniformément répartie sur toute sa surface coïncide en dehors de la sphère avec le potentiel du champ d'une charge ponctuelle q placée au centre de cette sphère [$\varphi(\infty) = 0$]:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$\varphi = \frac{q}{\varepsilon r} \quad \text{(en u.é.s. CGS)}.$$

A l'intérieur de la sphère, le champ est constant et égal à $\varphi(R)$.

16° La différence de potentiel $\varphi_1 - \varphi_2$ entre deux points du champ électrostatique d'une sphère de rayon R chargée uniformément en volume avec une densité volumique des charges ρ:

à l'intérieur de la sphère:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\rho}{6\varepsilon_0 \varepsilon} (r_2^2 - r_1^2) \quad \text{(en u. SI)},$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\pi\rho}{3\varepsilon} (r_2^2 - r_1^2) \quad \text{(en u.é.s. CGS)};$$

en dehors de la sphère:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad \text{(en u. SI)},$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{\varepsilon} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad \text{(en u.é.s CGS)},$$

où $q = \frac{4\pi}{3} \rho R^3$ est la charge globale de la sphère, r_1 et r_2 les distances des points au centre de la sphère.

5. Conducteurs dans un champ électrostatique

1° Sous l'action d'un champ électrostatique extérieur, les charges dans le conducteur (les électrons de conduction dans un conduc-

teur métallique) se répartissent à nouveau de telle façon que le champ résultant en un point quelconque à l'intérieur du conducteur est nul ($E = 0$). En tous les points de sa surface $E = E_n \neq 0$ et $E_\tau = 0$, où E_n et E_τ sont respectivement les composantes normale et tangentielle du vecteur champ. Tout le volume du conducteur est équipotentiel: en tous les points à l'intérieur du conducteur le potentiel φ est le même. La surface du conducteur est, elle aussi, équipotentielle. Dans un conducteur chargé les charges électriques non compensées se répartissent sur sa surface seulement.

2° Le déplacement électrique et le champ dans un diélectrique homogène et isotrope, au voisinage de la surface d'un conducteur chargé (en dehors de celui-ci), sont:

$$\left.\begin{aligned} D &= \sigma, \\ E &= \frac{}{\varepsilon_0 \varepsilon} \end{aligned}\right\} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$\left.\begin{aligned} D &= 4\pi\sigma, \\ E &= \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} \end{aligned}\right\} \quad \text{(en u.é.s. CGS)},$$

où ε_0 est la constante diélectrique, ε la constante diélectrique relative du milieu, σ la densité superficielle des charges électriques du conducteur.

La distribution des charges électriques sur la surface des conducteurs de différente forme, introduits dans un diélectrique homogène, dépend de la courbure de la surface: σ croît avec l'augmentation de courbure. Sur les surfaces des cavités internes des conducteurs $\sigma = 0$. La transmission réitérée de charges à un conducteur creux élève son potentiel jusqu'à des valeurs limitées par l'écoulement des charges du conducteur. C'est sur ce principe qu'est basé le *générateur électrostatique de Van de Graaf*, utilisé dans les accélérateurs linéaires (p. 464).

3° Sur l'élément de surface dS d'un conducteur chargé agit la force $d\mathbf{F}$, dirigée dans le sens de la normale extérieure à la surface du conducteur. Si le conducteur se trouve dans le vide, on a:

$$dF = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\, dS = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}\, dS \quad \text{(en u. SI)},$$

$$dF = 2\pi\sigma^2\, dS = \frac{E^2}{8\pi}\, dS \quad \text{(en u.é.s. CGS)},$$

où E est le champ électrostatique à la surface du conducteur. Si le conducteur est placé dans un diélectrique homogène liquide ou

gazeux, la force dF, à cause de l'électrostriction (p. 357), est ε fois plus petite que celle dans le vide:

$$dF = \frac{\sigma^2 dS}{2\varepsilon_0\varepsilon} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{2} dS \quad \text{(en u. SI)},$$

$$dF = \frac{2\pi\sigma^2}{\varepsilon} dS = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} dS \quad \text{(en u.é.s. CGS)},$$

où E est le champ électrostatique dans le diélectrique au voisinage de la surface du conducteur.

La pression p à la surface du conducteur chargé, due à cette force, est:

$$p = \frac{dF}{dS} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{2} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$p = \frac{dF}{dS} = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} \quad \text{(en u.é.s. CGS)}.$$

Les forces F d'attraction agissant sur les armatures chargées d'électricités contraires d'un condensateur plan (p. 375), séparées par un diélectrique solide, sont les mêmes que dans le cas où l'on fait le vide entre les armatures:

$$F = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} S \quad \text{(en u. SI)},$$

$$F = 2\pi\sigma^2 S \quad \text{(en u.é.s. CGS)},$$

où S est la surface de l'armature, σ la densité superficielle des charges libres sur les armatures.

Si l'espace entre les plaques est rempli d'un diélectrique homogène liquide ou gazeux, on a:

$$F = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon\varepsilon_0} S = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$F = \frac{2\pi\sigma^2}{\varepsilon} S = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} S \quad \text{(en u.é.s. CGS)},$$

où E est le champ dans le condensateur (p. 362).

4° On appelle *induction électrostatique* l'électrisation d'un conducteur non chargé dans un champ électrostatique extérieur. Ce phénomène consiste à séparer les charges positives et négatives existant dans le conducteur en quantités égales. Les *charges induites* disparaissent dès qu'on éloigne le conducteur du champ électrostatique. Indépendamment du mode d'électrisation du conducteur, les charges électriques se répartissent sur la surface de celui-ci, et la

cavité interne du conducteur fermé est, pour ainsi dire, protégée des champs électrostatiques extérieurs. C'est sur cette propriété qu'est basé l'*écran électrostatique.*

6. Capacité

1° Proportionnellement à la croissance de la charge q d'un conducteur, augmente la densité superficielle des charges en chaque point de sa surface:

$$\sigma = kq,$$

où k est une certaine fonction des coordonnées du point considéré de la surface. Le potentiel du champ créé par un conducteur chargé dans un diélectrique homogène et isotrope (p. 369) est:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \oint\limits_S \frac{\sigma\, dS}{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \oint\limits_S \frac{k\, dS}{r} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$\varphi = \frac{1}{\varepsilon} \oint\limits_S \frac{\sigma\, dS}{r} = \frac{q}{\varepsilon} \oint\limits_S \frac{k\, dS}{r} \quad \text{(en u.é.s. CGS)}.$$

Pour les points de la surface S du conducteur, l'intégrale ne dépend que de ses dimensions et forme.

Le potentiel φ d'un conducteur chargé isolé, sur lequel n'agissent pas des champs électrostatiques extérieurs, est proportionnel à sa charge q. La grandeur

$$C = q/\varphi, \text{ ou bien } C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 \left(\oint\limits_S \frac{k\, dS}{r} \right)^{-1} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$C = \varepsilon \left(\oint\limits_S \frac{k\, dS}{r} \right)^{-1} \quad \text{(en u.é.s. CGS)}$$

est appelée *capacité électrique* ou *capacité* d'un conducteur isolé. Elle est numériquement égale à la charge modifiant le potentiel du conducteur d'une unité. La capacité du conducteur dépend de la forme et des dimensions linéaires de celui-ci. Les conducteurs géométriquement semblables ont des capacités directement proportionnelles à leurs dimensions linéaires. La capacité ne dépend pas du matériau du conducteur, de son état d'agrégation, elle est directement proportionnelle à la constante diélectrique relative du milieu dans lequel est placé le conducteur.

2° Capacité d'une sphère isolée:

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \varepsilon R \qquad \text{(en u. SI)},$$

$$C = \varepsilon R \qquad \text{(en u.é.s. CGS)},$$

où R est le rayon de la sphère, ε la constante diélectrique relative du milieu, ε_0 la constante diélectrique.

3° On appelle *capacité mutuelle* de deux conducteurs une grandeur numériquement égale à la charge q qu'il faut transférer d'un conducteur à l'autre pour modifier la différence de potentiel $\varphi_1 - \varphi_2$ existant entre ceux-ci d'une unité:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}.$$

La capacité mutuelle dépend de la forme, des dimensions et de la disposition réciproque des conducteurs, ainsi que de la constante diélectrique relative du milieu.

4° On appelle *condensateur* un système de deux conducteurs avec les charges égales et de signe contraire, dont la forme et la disposition réciproque sont telles que le champ créé par ce système soit localisé dans un domaine limité de l'espace. Ces conducteurs sont appelés *armatures* du condensateur. La capacité du condensateur est la capacité mutuelle de ses armatures.

5° Capacité d'un condensateur plan:

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d} \qquad \text{(en u. SI)},$$

$$C = \frac{\varepsilon S}{4\pi d} \qquad \text{(en u.é.s. CGS)},$$

où S est la surface de chacune des armatures ou la surface de la plus petite de celles-ci, d la distance entre armatures. La capacité d'un condensateur plan à plusieurs lames diffère de celle d'un condensateur plan par la substitution à S de $S(n-1)$, où n est le nombre de lames.

6° Capacité d'un condensateur cylindrique et d'un câble coaxial:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 \varepsilon l}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \qquad \text{(en u. SI)},$$

$$C = \frac{\varepsilon l}{2 \ln \frac{r_2}{r_1}} \qquad \text{(en u.é.s. CGS)},$$

où r_2 et r_1 sont les rayons des cylindres extérieur et intérieur, l la longueur du cylindre.

7° Capacité d'un condensateur sphérique:

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r_1 r_2}{r_2 - r_1} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$C = \frac{\varepsilon r_1 r_2}{r_2 - r_1} \quad \text{(en u.é.s. CGS)},$$

où r_2 et r_1 sont les rayons des sphères extérieure et intérieure.

8° Capacité d'une ligne bifilaire:

$$C = \frac{\pi\varepsilon_0 \varepsilon l}{\ln \frac{d - r}{r}} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$C = \frac{\varepsilon l}{4 \ln \frac{d - r}{r}} \quad \text{(en u.é.s. CGS)},$$

où d est la distance entre les axes des fils, r le rayon des fils.

9° Pour tous les types de condensateurs existe un certain *potentiel disruptif* (ou *explosif*) représentant la différence de potentiel entre les armatures, à laquelle a lieu une décharge électrique dans la couche de diélectrique. Le potentiel disruptif dépend de l'épaisseur du diélectrique, de ses propriétés et de la forme des armatures.

10° L'*association en parallèle* de condensateurs ayant des armatures portant des charges de même signe permet d'augmenter la capacité. La capacité résultante est alors:

$$C = \sum_{i=1}^{n} C_i,$$

où C_i est la capacité du i-ième condensateur.

11° Lors de l'*association en série* des condensateurs, on réunit entre elles les armatures portant des charges de signe contraire. Dans ce cas,

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}.$$

La capacité résultante est toujours inférieure à la plus petite des capacités associées.

7. Diélectriques dans un champ électrique

1° On appelle *diélectriques* les substances non conductrices du courant électrique. Les charges électriques libres font absence dans.

ces substances. (Cf. pp. 761-767 les notions quantiques sur les diélectriques en théorie des bandes énergétiques des corps solides.)

2° Par leurs propriétés électriques les molécules de diélectriques sont équivalentes aux dipôles électriques de moment $\mathbf{p}_e = ql$, où q est la grandeur totale des charges positives (ou négatives, qui leur sont égales) de la molécule, l la distance entre les centres de gravité des charges positives et négatives. Si, en l'absence de champ électrique extérieur, $l = 0$, les diélectriques sont nommés *non polaires*; si dans les mêmes conditions $l \neq 0$, les diélectriques sont dits *polaires*.

3° Dans les molécules de diélectriques non polaires (H_2, N_2, CCl_4, hydrocarbures, etc.) les centres de gravité des charges positives et négatives, en l'absence de champ extérieur, coïncident et le moment dipolaire de la molécule est nul. Lorsqu'on introduit de tels diélectriques dans un champ électrique extérieur, la molécule (l'atome) subit une certaine déformation et acquiert un moment électrique dipolaire induit *(dipôle induit* ou *quasi élastique)*, proportionnel au champ $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{p}_e = \varepsilon_0 \alpha \mathbf{E} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$\mathbf{p}_e = \alpha \mathbf{E} \quad \text{(en u.é.s. CGS)},$$

où α est le *coefficient de polarisabilité* (la *polarisabilité*) d'une molécule (ou d'un atome), ε_0 la constante diélectrique (p. 357). La polarisabilité de la molécule dépend uniquement de son volume. L'agitation thermique des molécules de diélectriques non polaires n'a aucune influence sur l'apparition de moments dipolaires dans ces molécules: α ne dépend pas de la température.

4° Les molécules de diélectriques polaires (H_2O, NH_3, HCl, CH_3Cl, etc.) ont un moment dipolaire permanent $\mathbf{p}_e = \mathrm{const}$, dû à l'asymétrie dans la disposition des nuages électroniques et des noyaux de ces molécules. Les centres d'inertie des charges positives et négatives ne coïncident pas dans de telles molécules (ils sont séparés par une distance pratiquement constante: *dipôle rigide*).

5° Sur un dipôle rigide de moment électrique $\mathbf{p}_e$, introduit dans un champ électrique uniforme extérieur $\mathbf{E}$, agit un couple de forces avec le moment $\mathbf{M}$:

$$\mathbf{M} = \mathbf{p}_e \times \mathbf{E},$$

tendant à tourner le dipôle dans la direction du vecteur champ. Dans les molécules réelles de diélectriques polaires l'action du champ extérieur conduit de plus à l'apparition d'un moment dipolaire induit (3°).

6° Sur un dipôle rigide, introduit dans un champ électrique non uniforme extérieur, agit la force **F**:

$$\mathbf{F} = \text{grad}\,(\mathbf{p}_e \cdot \mathbf{E}) = p_e \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial l},$$

où $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial l}$ est la variation de **E** sur une unité de longueur le long de l'axe du dipôle. La force **F** est dirigée suivant le vecteur $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial l}$ et tend à déplacer le dipôle dans le domaine des grandes valeurs de E.

7° L'énergie potentielle W_p d'un dipôle rigide introduit dans un champ électrique extérieur est:

$$W_p = -\mathbf{p}_e \cdot \mathbf{E} = -p_e E \cos \theta,$$

où $\mathbf{p}_e$ est le moment électrique du dipôle, E le champ extérieur à l'emplacement du dipôle, θ l'angle entre l'axe du dipôle et la direction du vecteur **E**. Le signe moins montre que la disposition du vecteur $\mathbf{p}_e$ le long de la direction positive du vecteur **E** représente une position stable du dipôle, correspondant au minimum d'énergie potentielle.

8° Sur chaque élément de volume de diélectrique introduit dans un champ électrostatique non uniforme **E**, agit une force égale à la résultante de toutes les forces appliquées à ces molécules. La densité volumique **f** des forces, c'est-à-dire la force appliquée à l'unité de volume de diélectrique, est:

$$\mathbf{f} = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)}{2} \text{grad } E^2 \quad \text{(en u. SI)},$$

$$\mathbf{f} = \frac{(\varepsilon - 1)}{8\pi} \text{grad } E^2 \quad \text{(en u.é.s. CGS)}.$$

Cette formule est vraie pour les diélectriques à polarisabilité faible ($\varkappa \ll 1$, 10°). La force **f** est dirigée dans le sens de croissance de la valeur absolue du vecteur **E**, indépendamment de la direction de ce vecteur.

9° En l'absence de champ électrique extérieur, les moments électriques des molécules d'un diélectrique non ferroélectrique (p. 385), même s'ils ne sont pas nuls, sont orientés tout à fait chaotiquement. C'est pourquoi le moment électrique dipolaire résultant de n'importe quel élément de volume ΔV d'un diélectrique contenant un grand nombre de molécules est nul.

Dans un champ électrique extérieur, les diélectriques sont polarisés, autrement dit, passent à un état tel que les moments dipo-

laires de chaque élément de volume ΔV ne sont pas nuls. Dans ce cas le diélectrique est appelé *polarisé*. On distingue:

a) la *polarisation d'orientation* d'un diélectrique avec des molécules polaires. Elle consiste en la rotation des axes des dipôles rigides suivant la direction du vecteur champ. Par suite de l'action simultanée du champ électrique et de l'agitation thermique désorientant les molécules-dipôles, il apparaît une orientation prédominante des moments dipolaires des molécules dans la direction du champ. La polarisation d'orientation augmente avec la croissance du champ et décroît avec l'élévation de température: elle a lieu dans une série de liquides et de gaz;

b) la *polarisation électronique* d'un diélectrique avec des molécules non polaires. Elle consiste en l'apparition d'un moment électrique induit (p. 377) près de chaque molécule et se produit dans une série de liquides et de gaz;

c) la *polarisation ionique* dans les diélectriques cristallins type NaCl, CsCl, etc., avec des réseaux cristallins ioniques (p. 279). Elle consiste en déplacement des ions positifs du réseau dans le sens du champ et des ions négatifs dans le sens contraire.

10° Le *vecteur polarisation* (la *polarisation*) $\mathbf{P}_e$, qui est la somme vectorielle des moments dipolaires des molécules (atomes) par unité de volume, mesure la polarisation du diélectrique:

$$\mathbf{P}_e = \lim_{V \to 0} \left(\frac{1}{V} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{p}_{ei} \right),$$

où n est le nombre de molécules-dipôles contenues dans le volume V d'un diélectrique, $\mathbf{p}_{ei}$ le moment électrique dipolaire de la i-ième molécule (atome). Pour un diélectrique homogène avec des molécules non polaires, introduit dans un champ électrique uniforme,

$$\mathbf{P}_e = n_0 \mathbf{p}_e,$$

où $\mathbf{p}_e$ est le moment induit d'une molécule, n_0 le nombre de molécules par unité de volume. Utilisant la formule p. 377, nous obtenons:

$$\mathbf{P}_e = \varepsilon_0 n_0 \alpha \mathbf{E} = \varepsilon_0 \varkappa_e \mathbf{E} \quad \text{(en u. SI)},$$
$$\mathbf{P}_e = n_0 \alpha \mathbf{E} = \varkappa_e \mathbf{E} \quad \text{(en u.é.s. CGS)},$$

où $\varkappa_e = n_0 \alpha$ est la *susceptibilité diélectrique* de la substance ou la polarisabilité d'une unité de volume de diélectrique, proportionnelle au volume de toutes les molécules par 1 cm³.

Dans le cas d'un diélectrique homogène avec des molécules polaires, introduit dans un champ électrique,

$$\mathbf{P}_e = n_0 \overline{\mathbf{p}}_e,$$

où $\overline{\mathbf{p}}_e$ est la valeur moyenne de la composante suivant le champ du vecteur moment dipolaire permanent d'une molécule, calculée à l'aide de la distribution de Boltzmann pour les particules introduites dans un champ de forces (p. 234):

$$|\overline{\mathbf{p}}_e| = L(a)p_e = \left(\coth a - \frac{1}{a}\right)p_e,$$

où $L(a)$ est la *fonction classique de Langevin* (fig. IV.1.6), $a = p_e E/kT$ (en u.é.s. CGS). $L(a) \approx a/3$, lorsque $a \ll 1$, et

$$\mathbf{P}_e = \varepsilon_0 \varkappa_e \mathbf{E} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$\mathbf{P}_e = \varkappa_e \mathbf{E} \quad \text{(en u.é.s. CGS)},$$

$\varkappa_e$ est calculé par la *formule de Debye-Langevin*:

$$\varkappa_e = \frac{n_0 p_e^2}{3\varepsilon_0 kT} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$\varkappa_e = \frac{n_0 p_e^2}{3kT} \quad \text{(en u.é.s. CGS)},$$

où k est la constante de Boltzmann, T la température absolue, n_0 le nombre de molécules par unité de volume de diélectrique.

La figure IV.1.7 montre la dépendance entre $\varkappa_e$ et $1/T$ pour les molécules non polaires (a) et polaires (b). Le segment OA caractérise la polarisation électronique dans les molécules polaires.

11° Dans un diélectrique polarisé, sur chaque molécule agit un certain *champ électrique efficace* $\mathbf{E}_{\text{eff}}$, extérieur à la molécule

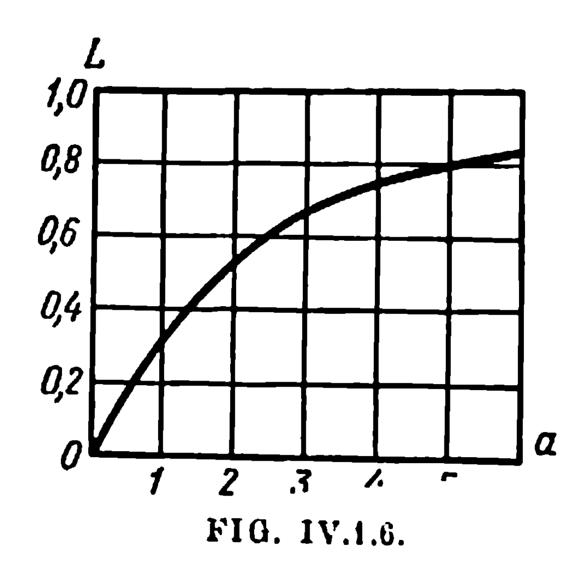


FIG. IV.1.6.

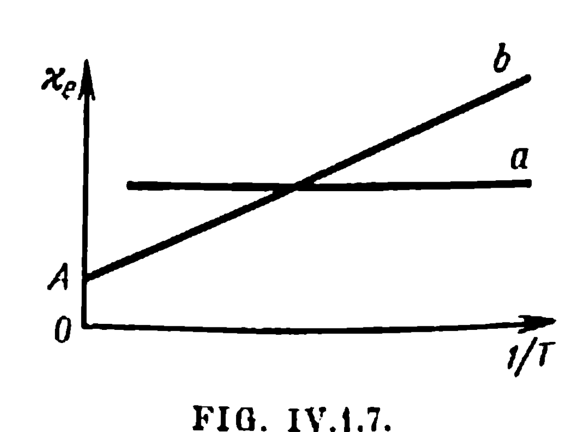


FIG. IV.1.7.

donnée. $\mathbf{E}_{eff}$ diffère du champ macroscopique moyen $\mathbf{E}$ dans le diélectrique. Pour les molécules non polaires

$$\mathbf{E}_{eff} = \mathbf{E} + \frac{1}{\ }\mathbf{P}_e \quad \text{(en u. SI)},$$

$$\mathbf{E}_{eff} = \mathbf{E} + \frac{4\pi}{3}\mathbf{P}_e \quad \text{(en u.é.s. CGS)},$$

où $\mathbf{P}_e$ est le vecteur polarisation. Cette formule n'est pas applicable aux diélectriques avec des dipôles rigides et la dépendance E_{eff} (P_e) est alors de caractère complexe.

12° Dans un diélectrique non polarisé les densités volumique (ρ_p) et superficielle (σ_p) des charges liées (p. 359) sont nulles. Le déplacement des charges liées a lieu au cours de la polarisation du diélectrique. Dans un diélectrique polarisé les grandeurs ρ_p et σ_p dépendent du vecteur polarisation. C'est pourquoi les charges liées volumiques et superficielles sont appelées *charges de polarisation*. Des charges volumiques de polarisation surgissent dans un diélectrique de polarisation non homogène:

$$\rho_p = -\operatorname{div} \mathbf{P}_e.$$

Si un diélectrique est homogène et placé dans un champ électrique uniforme (fig. IV.1.8), $\operatorname{div} \mathbf{P}_e = 0$ et $\rho_p = 0$.

Des charges superficielles de polarisation apparaissent aux surfaces de séparation entre diélectriques polarisés hétérogènes ou entre un diélectrique polarisé et le vide (ou un conducteur). Si $\mathbf{P}_{e1}$ et $\mathbf{P}_{e2}$ sont les vecteurs polarisation du premier et du second milieu en un point A quelconque de leur interface S, tandis que P_{e1n} et P_{e2n} les projections de ces vecteurs sur la normale extérieure (par rapport au premier milieu) à la surface S au point A, la densité superficielle des charges de polarisation au point A est alors:

$$\sigma_p = -(P_{e2n} - P_{e1n}).$$

En particulier, si le second milieu est le vide ou un conducteur, on a:

$$\mathbf{P}_{e2} = 0,\ \mathbf{P}_{e1} = \mathbf{P}_e \ \text{ et } \ \sigma_p = P_{en}.$$

13° Le champ électrique extérieur polarisant $\mathbf{E}_0$, qui est la cause de l'apparition de charges liées, est créé par un système de charges libres. Dans un diélectrique, le champ $\mathbf{E}_0$ et le champ des charges liées $\mathbf{E}_p$ s'ajoutent vectoriellement. Le vecteur champ $\mathbf{E}$ dans un diélectrique caractérise

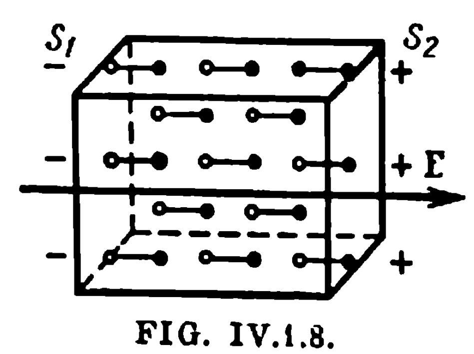


FIG. IV.1.8.

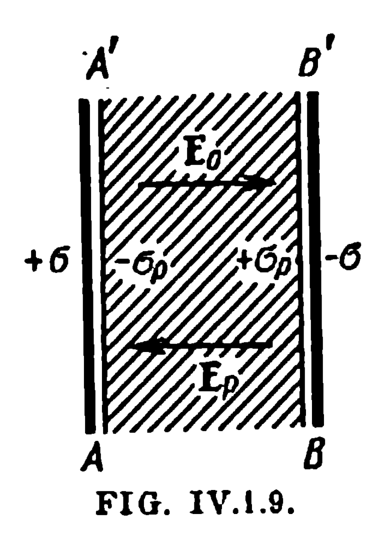


FIG. IV.1.9.

le champ macroscopique résultant. C'est pourquoi **E** dépend des propriétés électriques du milieu.

EXEMPLE. Soit un diélectrique homogène dans un champ électrostatique uniforme entre deux plans parallèles conducteurs AA' et BB', chargés uniformément avec les densités superficielles respectivement égales à $+\sigma$ et $-\sigma$ (fig. IV.1.9).

La densité volumique des charges de polarisation est $\rho_p = 0$. Les densités superficielles des charges de polarisation sur les surfaces du diélectrique, adhérant aux plans AA' et BB', sont respectivement $-\sigma_p$ et $+\sigma_p$, où

$$\sigma_p = P_e = \varepsilon_0 \varkappa_e E \quad \text{(en u. SI)},$$
$$\sigma_p = P_e = \varkappa_e E \quad \text{(en u.é.s. CGS)}.$$

Les charges de polarisation créent à l'intérieur du diélectrique un champ complémentaire $\mathbf{E}_p$ antiparallèle à $\mathbf{E}_0$ et $\mathbf{E}$, et numériquement égal à

$$E_p = \frac{\sigma_p}{\varepsilon_0} = \varkappa_e E \quad \text{(en u. SI)},$$
$$E_p = 4\pi\sigma_p = 4\pi\varkappa_e E \quad \text{(en u.é.s. CGS)}.$$

Le champ résultant dans un diélectrique est:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_p = \mathbf{E}_0 - \varkappa_e \mathbf{E} \quad \text{(en u. SI)},$$
$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_p = \mathbf{E}_0 - 4\pi\varkappa_e \mathbf{E} \quad \text{(en u.é.s. CGS)}.$$

Par conséquent,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{1+\varkappa_e}\mathbf{E}_0 = \frac{\mathbf{E}_0}{\varepsilon} \quad \text{(en u. SI)},$$
$$\mathbf{E} = \frac{1}{1+4\pi\varkappa_e}\mathbf{E}_0 = \frac{\mathbf{E}_0}{\varepsilon} \quad \text{(en u.é.s. CGS)},$$

où ε est la constante diélectrique relative du diélectrique (cf. 15°).

14° Théorème d'Ostrogradski-Gauss (p. 364) pour le vecteur déplacement **D** dans un milieu arbitraire:

$$\oint_S D_n\, dS = \sum q_{\text{libres}} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$\oint_S D_n\, dS = 4\pi \sum q_{\text{libres}} \quad \text{(en u.é.s. CGS)},$$

où $\sum q_{\text{libres}}$ est la somme des charges libres embrassées par la surface fermée S, $\oint_S D_n\, dS$ le *flux de déplacement* à travers cette surface.

Théorème d'Ostrogradski-Gauss pour le vecteur champ **E** dans un diélectrique:

$$\oint_S \varepsilon_0 E_n\, dS = \sum q_{\text{libres}} + \sum q_{\text{liées}} \qquad \text{(en u. SI)},$$

$$\oint_S E_n\, dS = 4\pi\left(\sum q_{\text{libres}} + \sum q_{\text{liées}}\right) \quad \text{(en u.é.s. CGS)},$$

où $\oint_S E_n\, dS$ est le *flux du champ* à travers une surface fermée S; $\sum q_{\text{libres}}$ la somme des charges libres embrassées par la surface S; $\sum q_{\text{liées}}$ la somme totale des charges liées embrassées par cette surface; $\sum q_{\text{liées}} = -\oint_S P_{en} dS$, P_{en} est la projection du vecteur polarisation $\mathbf{P}_e$ sur la normale extérieure à l'élément de surface dS.

15° La relation entre les vecteurs déplacement **D**, champ **E** et polarisation $\mathbf{P}_e$ est:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}_e \qquad \text{(en u. SI)},$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}_e \qquad \text{(en u.é.s. CGS)}.$$

Dans les diélectriques isotropes, le vecteur polarisation $\mathbf{P}_e$ est proportionnel et coïncide en direction avec le champ **E**. C'est pourquoi

$$\mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \mathbf{E} \qquad \text{(en u. SI)},$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \qquad \text{(en u.é.s. CGS)},$$

où la grandeur scalaire ε est la constante diélectrique relative du milieu. La relation entre ε et la susceptibilité diélectrique $\varkappa_e$ (p. 379) est de la forme:

$$\varepsilon = 1 + \varkappa_e \qquad \text{(en u. SI)},$$

$$\varepsilon = 1 + 4\pi\varkappa_e \qquad \text{(en u.é.s. CGS)}.$$

16° Compte tenu de la différence entre le champ efficace agissant dans le diélectrique (p. 380) et le champ macroscopique moyen,

la relation entre ε et $\varkappa_e$ pour les diélectriques non polaires est traduite par l'*équation de Clausius-Mosotti*:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{1}{3}\varkappa_e, \\ &\text{ou} \\ &\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}\frac{\mu}{\rho} = \frac{N_A E}{3} = \Omega \end{aligned}\right\} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{4\pi}{3}\varkappa_e, \\ &\text{ou} \\ &\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}\frac{\mu}{\rho} = \frac{4\pi}{3} N_A \alpha = \Omega_1 \end{aligned}\right\} \quad \text{(en u.é.s. CGS)},$$

où μ est le poids moléculaire de la substance, ρ sa densité, N_A le nombre d'Avogadro, α la polarisabilité de la molécule, Ω et Ω_1 les valeurs de la *réfraction molaire* proportionnelles au volume de toutes les molécules dans 1 kmole et dans 1 mole de substance respectivement.

17° Dans un diélectrique cristallin anisotrope les propriétés électriques sont différentes suivant les directions ($\varkappa_e$ et ε sont des grandeurs tensorielles). C'est pourquoi, dans le cas général, les vecteurs $\mathbf{P}_e$ et $\mathbf{D}$ ne coïncident pas en direction avec le vecteur $\mathbf{E}$.

Pour les cristaux anisotropes non pyroélectriques, c'est-à-dire ne possédant pas de polarisation spontanée en l'absence de champ extérieur, la relation entre les projections des vecteurs $\mathbf{P}_e$, $\mathbf{D}$ et $\mathbf{E}$ sur les axes d'un système rectangulaire de coordonnées cartésiennes x, y, z est de la forme:

$$P_{ei} = \varepsilon_0 \sum_j \varkappa_{eij} E_j \quad \text{(en u. SI)},$$

$$P_{ei} = \sum_j \varkappa_{eij} E_j \quad \text{(en u.é.s. CGS)},$$

$$D_i = \varepsilon_0 \sum_j \varepsilon_{ij} E_j \quad \text{(en u. SI)},$$

$$D_i = \sum_j \varepsilon_{ij} E_j \quad \text{(en u.é.s. CGS)},$$

où $i, j = x, y, z$; $\varkappa_{eij} = \varkappa_{eji}$ et $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$.

Les valeurs de $\varkappa_{eij}$ et ε_{ij} dépendent de l'orientation des axes de coordonnées par rapport aux axes cristallographiques du diélectrique. Par choix approprié des axes des x, y, z, on peut annuler à la fois les valeurs $\varkappa_{exy}$, $\varkappa_{exz}$, $\varkappa_{eyz}$, ε_{xy}, ε_{xz}, ε_{yz}, de sorte que les propriétés diélectriques d'un cristal anisotrope seront entièrement caractérisées par les trois *valeurs principales de la susceptibilité diélectrique*

$$\varkappa_{e1} = \varkappa_{exx}, \quad \varkappa_{e2} = \varkappa_{eyy}, \quad \varkappa_{e3} = \varkappa_{ezz}$$

et par les trois *valeurs principales correspondantes de la constante diélectrique relative du milieu:*

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{xx} = 1 + \varkappa_{e1}, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_{yy} = 1 + \varkappa_{e2},$$

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_{zz} = 1 + \varkappa_{e3} \text{ (en u. SI)},$$

$$\varepsilon_1 = 1 + 4\pi\varkappa_{e1}, \quad \varepsilon_2 = 1 + 4\pi\varkappa_{e2},$$

$$\varepsilon_3 = 1 + 4\pi\varkappa_{e3} \text{ (en u.é.s. CGS)}.$$

8. Ferroélectriques. Effet piézoélectrique

1° On appelle *ferroélectriques* le groupe de diélectriques cristallisés dans lesquels, en l'absence de champ électrique extérieur, surgit une orientation spontanée des moments dipolaires des particules entrant dans la composition du réseau cristallin. Ceci étant, les ferroélectriques sont constitués d'un ensemble de domaines microscopiques polarisés dans différentes directions. Les propriétés ferroélectriques ont été observées en premier dans le sel de Seignette $NaKC_4H_4O_6 \cdot 4H_2O$. Les ferroélectriques sont également le titanate de baryum $BaTiO_3$, l'orthophosphate monopotassique KH_2PO_4, etc.

2° La constante diélectrique relative ε des ferroélectriques croît brusquement dans un intervalle défini de températures (fig. IV. 1. 10), elle est fonction du champ E dans la

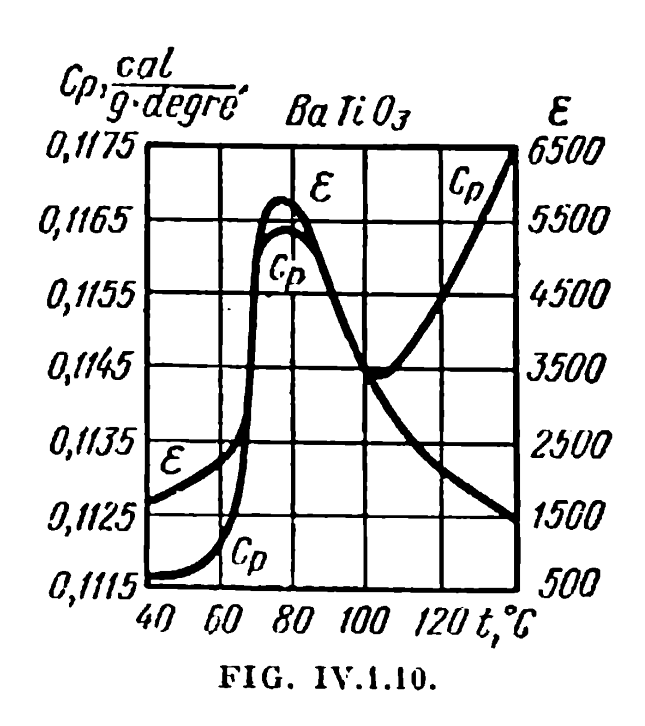


FIG. IV.1.10.

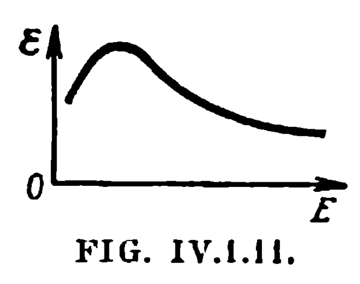


FIG. IV.1.11.

substance $\varepsilon = \varepsilon(E)$ (fig. IV.1.11). C'est pourquoi la dépendance entre **D** et **E** pour des champs non très forts n'est pas linéaire. Il y a *saturation* pour des valeurs suffisamment grandes de E, le vecteur polarisation $\mathbf{P}_e$ cesse de varier avec la croissance de **E**.

3° Dans les ferroélectriques la *polarisation spontanée* a lieu dans un intervalle de températures limité, généralement parlant, par les *points de Curie* Θ supérieur et inférieur.

Pour le sel de Seignette $\Theta_{sup} = 297$ °K, $\Theta_{inf} = 255$ °K. La présence d'au moins un point de Curie Θ, au-dessus duquel les propriétés caractéristiques des ferroélectriques disparaissent, est obligatoire pour ces derniers. Quand $T > \Theta$, l'agitation thermique perturbe l'orientation spontanée des moments dipolaires à l'intérieur des domaines. On observe au voisinage des domaines un accroissement brusque de la capacité calorifique (fig. IV.1.10), ce qui témoigne de la présence d'une transition de phase du second ordre en ce point [1]).

4° Le phénomène d'*hystérésis diélectrique* (fig. IV.1.12) est observé dans les ferroélectriques. P_{e0} caractérise la polarisation résiduelle, E_k, la valeur du champ inverse, qui détruit la polarisation du ferroélectrique.

5° L'*effet piézoélectrique* consiste en l'apparition de charges électriques de signe contraire sur les faces de certains cristaux soumis à des déformations mécaniques dans des directions déterminées. L'effet piézoélectrique est observé dans le quartz, la tourmaline, le sel de Seignette, le titanate de baryum, la blende de zinc, etc. Dans le quartz l'effet piézoélectrique évolue le long des axes électriques X_1, X_2, X_3 du cristal (fig. IV.1.13) perpendiculaires à son axe optique Z (p. 680). L'inversion de direction de la dé-

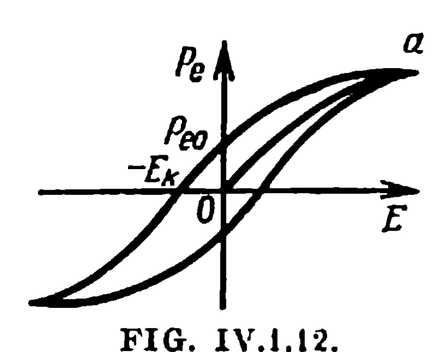


FIG. IV.1.12.

FIG. IV.1.13.

[1]) Dans certains ferroélectriques ($BaTiO_3$ par exemple) on note la transition de phase du premier ordre au point de Curie.

formation du cristal change les signes des charges sur les surfaces. L'effet piézoélectrique inverse consiste en la modification des dimensions linéaires de certains cristaux sous l'influence du champ électrique. L'inversion de direction du champ électrique entraîne une modification inverse des déformations. Cet effet est d'une importance majeure dans l'obtention de l'ultrason (p. 581).

9. Energie d'un conducteur chargé et d'un champ électrique

1° L'énergie de l'interaction électrostatique d'un système de charges ponctuelles $q_1, q_2, \ldots, q_n$ est:

$$W_{\text{int}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i \varphi_i,$$

où φ_i est le potentiel au point où se trouve la charge q_i du champ électrostatique créé par toutes les charges du système excepté la charge q_i.

Si les charges sont situées dans un diélectrique homogène et isotrope, on a:

$$W_{\text{int}} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon}\sum_{\substack{i,\,k,\\(k\neq i)}} \frac{q_i q_k}{r_{ik}} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$W_{\text{int}} = \frac{1}{2\varepsilon}\sum_{\substack{i,\,k\\(k\neq i)}} \frac{q_i q_k}{r_{ik}} \quad \text{(en u.é.s. CGS)},$$

où ε est la constante diélectrique relative du milieu, r_{ik} la distance entre les charges q_i et q_k.

2° L'*énergie électrique totale* W_e d'un système de charges ponctuelles $q_1, q_2, \ldots, q_n$, c'est-à-dire de corps chargés tels que la distance qui les sépare est très supérieure aux dimensions linéaires de ces corps, diffère de W_{int} d'une somme des énergies propres des corps chargés (des charges q_i):

$$W_e = W_{\text{int}} + \sum_{i=1}^{n} W_{\text{prop}_i}.$$

On appelle *énergie propre* d'un conducteur chargé l'énergie d'interaction des charges réparties sur ce conducteur. L'énergie d'un

conducteur, non soumis à l'action d'un champ extérieur, représente l'énergie propre de ce conducteur. Elle est égale à

$$W_{\text{prop}} = \frac{q\varphi}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{C\varphi^2}{2},$$

où C est la capacité du conducteur, q et φ sa charge et son potentiel (quand $q = 0$, $\varphi = 0$). L'énergie propre du conducteur, à la différence de W_{int}, ne peut pas être négative. Elle est nulle si le conducteur n'est pas chargé. La somme des énergies propres de deux conducteurs quelconques est toujours plus grande (ou au moins égale si les conducteurs ne sont pas chargés) que leur énergie mutuelle:

$$(W_{\text{prop}})_1 + (W_{\text{prop}})_2 \geqslant W_{\text{int}}.$$

3° L'énergie électrique totale d'un système de conducteurs chargés est égale à

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} q_i \varphi_i,$$

où q_i est la charge du i-ième conducteur et φ_i le potentiel du conducteur, conditionné aussi bien par le champ des conducteurs restants que par son propre champ.

L'énergie d'un condensateur chargé est:

$$W_e = \frac{q\,\Delta\varphi}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{C\,\Delta\varphi^2}{2},$$

où q est la charge du condensateur, C sa capacité, $\Delta\varphi$ la différence de potentiel entre ses armatures.

4° L'énergie d'un système quelconque de charges dans le vide ou dans un diélectrique peut être représentée sous la forme:

$$W_e = \frac{1}{2} \int\limits_V \rho\varphi\, dV + \frac{1}{2} \int\limits_S \sigma\varphi\, dS,$$

où ρ et σ sont les densités volumique et superficielle des charges libres, φ la valeur du potentiel dans l'élément de volume dV ou sur l'élément de surface dS pour le champ électrostatique de toutes les charges volumiques et superficielles, et l'intégration est étendue à tout le volume V, occupé par les charges volumiques libres, et à toutes les surfaces chargées S. L'influence du diélectrique sur la grandeur W_e se manifeste par le fait que, lors d'une même distribution des charges libres, les valeurs de φ sont différentes selon les diélectriques (dans un diélectrique homogène et isotrope φ est ε fois plus petit que dans le vide).

L'expression de W_e peut être représentée également sous la forme:

$$W_e = \frac{1}{2}\int\limits_{V_e} \mathbf{D}\cdot\mathbf{E}\, dV \qquad \text{(en u. SI)},$$

$$W_e = \frac{1}{8\pi}\int\limits_{V_e} \mathbf{D}\cdot\mathbf{E}\, dV \qquad \text{(en u.é.s. CGS)},$$

où **D** et **E** sont le déplacement électrique et le champ dans l'élément de volume dV pour le champ du système de charges considéré, et l'intégration est étendue à tout le volume V_e de l'espace occupé par ce champ. Il s'ensuit que l'énergie W_e est distribuée à tout cet espace et que le champ électrique est doué d'énergie. La *densité volumique d'énergie du champ électrique*, c'est-à-dire l'énergie par unité de volume du champ, est égale à

$$w_e = \frac{dW_e}{dV} = \frac{1}{2}\,\mathbf{D}\cdot\mathbf{E} \qquad \text{(en u. SI)},$$

$$w_e = \frac{dW_e}{dV} = \frac{1}{8\pi}\,\mathbf{D}\cdot\mathbf{E} \qquad \text{(en u.é.s. CGS)}.$$

Si le milieu est isotrope, on a:

$$w_e = \frac{DE}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{D^2}{2\varepsilon\varepsilon_0} \qquad \text{(en u. SI)},$$

$$w_e = \frac{DE}{8\pi} = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} = \frac{D^2}{8\pi\varepsilon} \qquad \text{(en u.é.s. CGS)}.$$

5° On admet à titre de postulat en théorie macroscopique de l'électricité que w_e représente la *densité volumique d'énergie libre* (p. 189) *du champ électrique d'un diélectrique*, autrement dit, qu'elle représente la mesure du travail lié à la variation isotherme réversible du champ dans une unité de volume du diélectrique.

Dans un diélectrique avec des molécules non polaires une partie de l'énergie dépensée sur la création du champ va sur la polarisation du diélectrique (sur «l'extension» des dipôles élastiques). La *densité volumique d'énergie d'un diélectrique polarisé est:*

$$w_{\text{diél}} = (\varepsilon - 1)\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \qquad \text{(en u. SI)},$$

$$w_{\text{diél}} = (\varepsilon - 1)\frac{E^2}{8\pi} \qquad \text{(en u.é.s. CGS)}.$$

La différence entre w_e et $w_{\text{diél}}$ représente la densité volumique d'énergie du champ électrique de même intensité, créé dans le vide. On l'appelle souvent ***densité volumique d'énergie proprement électrique du champ d'un diélectrique:***

$$w_e - w_{\text{diél}} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$w_e - w_{\text{diél}} = \frac{E^2}{8\pi} \quad \text{(en u.é.s. CGS)}.$$

CHAPITRE 2

Courant électrique continu dans les métaux

1. Notions et définitions fondamentales

1° On appelle *courant électrique* tout mouvement ordonné des charges électriques dans l'espace.

2° Le mouvement ordonné des charges libres surgissant dans un milieu conducteur sous l'action du champ électrique est appelé *courant de conduction*.

Le mouvement ordonné des charges électriques peut être réalisé par déplacement du corps chargé (conducteur ou diélectrique) dans l'espace. Un tel courant électrique est nommé *courant de convection* (par exemple le courant lié au mouvement de la Terre suivant son orbite, ayant un excès de charge négative).

3° On accepte comme sens du courant électrique la direction du mouvement des charges positives. En réalité, dans les conducteurs métalliques, le courant électrique est créé par le mouvement des électrons dans le sens opposé.

4° On appelle *intensité de courant* ou *courant* à travers une certaine surface S la grandeur scalaire I, égale à la première dérivée par rapport au temps de la charge q passant à travers cette surface:

$$I = \frac{dq}{dt}$$

5° Le courant est *continu* si l'intensité de courant et sa direction ne varient pas dans le temps. P ur le courant continu

$$I = \frac{q}{t}$$

où q est la charge électrique, t le temps. L'intensité de courant continu est numériquement égale à la charge q passant à travers la surface S par unité de temps.

6° La distribution du courant électrique sur la section S est caractérisée par le *vecteur densité de courant* **j**. Il est dirigé dans le sens du mouvement des charges positives et est numériquement égal à

$$j = \frac{dI}{dS'},$$

où dS' est la projection de l'élément de surface dS sur le plan perpendiculaire à **j**, dI l'intensité de courant à travers dS et dS'.

La projection j_n du vecteur **j** sur la normale **n** à l'élément de surface dS est:

$$j_n = \frac{dI}{dS} = j \cos \alpha,$$

où α est l'angle entre **j** et **n**.

7° L'intensité de courant dans un conducteur est

$$I = \int_S j \, dS;$$

l'intégration s'étend à toute la section transversale S ($\alpha \equiv 0$) du conducteur.

8° La densité de courant continu est la même sur toute la section S du conducteur. Pour le courant continu

$$I = jS.$$

Les densités de courant continu dans deux sections transversales d'un conducteur sont inversement proportionnelles aux surfaces des sections:

$$\frac{j_1}{j_2} = \frac{S_2}{S_1}.$$

2. Théorie électronique de la conductibilité

1° Les porteurs de courant dans les métaux sont les *électrons de conduction* qui apparaissent par suite de la mise en commun des électrons de valence des atomes métalliques. En approximation classique, on assimile des électrons de conduction à un *gaz électronique* dont les particules possèdent trois degrés de liberté. En approximation plus sévère, le gaz électronique est identifié à un gaz quan-

tique dégénéré obéissant à la statistique de Fermi-Dirac (p. 240). En approximation classique, le nombre d'électrons de conduction par 1 cm³ de métal monovalent est admis égal à

$$n_0 = \frac{N_A}{A} D,$$

où N_A est le nombre d'Avogadro, A le poids atomique du métal, D sa densité. Son ordre de grandeur est: $n_0 \approx 10^{22} \div 10^{23}$ cm^{-3}.

2° En vertu de la théorie classique, l'agitation thermique chaotique des électrons a lieu aux températures ambiantes avec des vitesses moyennes (p. 216) de l'ordre de 10^5 cm/s. En vertu de la *théorie de Drude-Lorentz*, le libre parcours moyen $\bar{\lambda}$ (p. 218) est du même ordre de grandeur que la période du réseau cristallin du métal (10^{-8} cm).

3° En théorie quantique, les électrons dans le métal sont décrits par les lois de la mécanique quantique (p. 742) et obéissent à la statistique quantique de Fermi-Dirac (p. 237). Négligeant le champ électrique des ions positifs du réseau cristallin et l'interaction des électrons, on considère le modèle de puits de potentiel avec un fond plat: en dehors du métal l'énergie potentielle des électrons est nulle, à l'intérieur du métal les énergies des électrons forment un spectre quasi continu. Au niveau occupé le plus élevé l'énergie de l'électron est égale à $-A$, où A est le travail positif d'extraction de l'électron du métal (p. 422). La considération de l'influence du champ des ions sur le mouvement des électrons conduit à l'apparition des *bandes énergétiques* dans le spectre des électrons dans le métal (pp. 761-767).

4° Les impulsions et les énergies des électrons dans le métal sont quantifiées, autrement dit, ont des valeurs déterminées. Le remplissage des niveaux énergétiques par des électrons dans le métal a lieu conformément au principe de Pauli (p. 796): chaque niveau est occupé par deux électrons seulement à spins antiparallèles (p. 486). Le niveau énergétique le plus élevé, occupé par des électrons au zéro absolu, est appelé *niveau de Fermi*. Le travail d'extraction (fig. IV.2.1) est compté à partir de ce niveau. Le nombre de niveaux énergétiques occupés par des électrons dans le métal est égal en ordre de grandeur au nombre d'électrons libres.

Dans le métal les niveaux énergétiques proches (quasi continus) forment des bandes énergétiques (p. 762), dont une bande, située au-dessus des bandes remplies, est occupée non entièrement, elle est dite *bande de conduction* des métaux. Il existe certains cas quand deux bandes successives du métal se superposent (par exemple

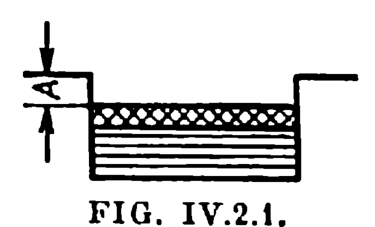


FIG. IV.2.1.

dans les métaux alcalino-terreux et les métaux de transition). La présence d'une bande occupée non entièrement représente une particularité caractéristique de la conduction métallique.

5° L'interaction des électrons avec les ions positifs du réseau cristallin est considérée, en théorie quantique des métaux, comme la dispersion des ondes électroniques sur les vibrations thermiques des ions du réseau.

6° Le mouvement ordonné des électrons dans un conducteur métallique surgit sous l'action d'un champ électrique extérieur. La densité de courant est

$$\mathbf{j} = n_0 e \overline{\mathbf{v}},$$

où n_0 est le nombre d'électrons de conduction par unité de volume, e la valeur absolue de la charge de l'électron, $\overline{\mathbf{v}}$ la vitesse moyenne du mouvement ordonné des électrons. Aux densités de courants maximales $\overline{v} = 10^{-2}$ cm/s. Le temps nécessaire pour établir le courant dans le circuit est $t = L/c$ (où L est la longueur du circuit, c la vitesse de la lumière dans le vide). Ce temps coïncide avec le temps nécessaire pour l'établissement d'un champ électrique stationnaire et l'apparition d'un mouvement ordonné des électrons. Ce mouvement surgit pratiquement sur toute l'étendue du conducteur en même temps que l'on ferme le circuit.

7° *Loi d'Ohm pour la densité de courant:*

$$\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E} = \frac{1}{\rho} \mathbf{E}.$$

La densité de courant dans le conducteur est égale au produit de la *conductivité électrique* γ du métal par le champ électrique **E**. La grandeur $\rho = 1/\gamma$ est appelée *résistivité*.

L'expression de γ en théorie électronique classique est la suivante:

$$\gamma = \frac{n_0 e^2 \overline{\lambda}}{2m\overline{u}},$$

où n_0 est le nombre d'électrons par 1 cm³ du métal, $\overline{\lambda}$ le libre parcours moyen, $\overline{u}$ la vitesse moyenne (arithmétique) de l'agitation thermique des électrons à une température donnée. En vertu de la théorie quantique des métaux

$$\gamma = \frac{n_0 e^2 \overline{\lambda}}{p_F},$$

où p_F est l'impulsion de l'électron se trouvant au niveau de Fermi W_F (p. 241), p_F ne dépend pas de la température; $\overline{\lambda}$ est le parcours moyen des ondes électroniques dans le métal, $\overline{\lambda}$ dépend de la

température T. Dans le domaine de températures ambiantes $\bar{\lambda} \sim T^{-1}$, de sorte que la résistivité des métaux $\rho = 1/\gamma$, conformément aux données des expériences, croît proportionnellement à T. A des températures plus basses $\bar{\lambda} \sim T^{-n}$, où $n > 1$, et s'accroît avec la diminution de T (la fig.IV.2.2 montre la dépendance entre $\bar{\lambda}$ et T pour l'argent).

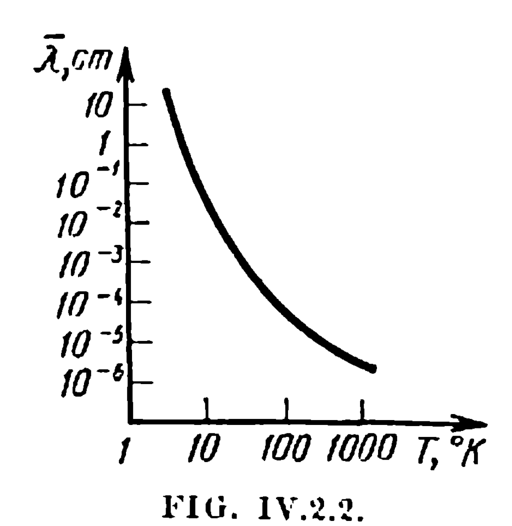


FIG. IV.2.2.

La loi d'Ohm tombe en défaut pour de grandes densités de courant.

8° On appelle *densité de puissance calorifique du courant* w la quantité d'énergie qui, par suite de l'interaction des ions avec les électrons, se transmet aux ions du réseau cristallin dans une unité de volume du conducteur par unité de temps. La *loi de Joule-Lenz* pour la densité de puissance calorifique du courant est:

$$w = \rho j^2.$$

La densité de puissance calorifique du courant dans un conducteur est égale au produit du carré de la densité de courant par la résistivité du conducteur.

9° *Loi de Wiedemann-Franz:* pour tous les métaux le rapport du coefficient de conductibilité thermique K (p. 219) à la conductivité électrique γ est directement proportionnel à la température absolue T:

$$\frac{K}{\gamma} = cT = 3\left(\frac{k}{e}\right)^2 T,$$

où k est la constante de Boltzmann (p. 158), e la charge de l'électron.

La loi de Wiedemann-Franz découle de ce que la conductibilité thermique des métaux (tout comme leur conductibilité électrique) est réalisée par les électrons libres. En vertu de la théorie quantique des métaux (p. 286)

$$c = \frac{\pi^2}{3}\left(\frac{k}{e}\right)^2.$$

Cette valeur de c se trouve en bonne concordance avec l'expérience aux températures ambiantes.

10° La théorie électronique classique de conduction de Drude-Lorentz conduit à une valeur fausse de la chaleur atomique des métaux (9 cal/atome-g · degré).

En réalité, le gaz électronique dégénéré dans un métal (p. 242) n'a pratiquement aucun apport à la capacité calorifique de celui-ci, qui est égale à 6 cal/atome-g·degré (p. 288).

11° La dépendance de la résistivité ρ du conducteur de la température s'exprime par la relation:

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t),$$

où ρ_0 est la résistivité du conducteur à 0 °C, t la température en degrés Celsius, α le *coefficient de température de résistivité*. Pour la plupart des métaux, dans l'intervalle de températures entre 0-100 °C, α varie dans les limites de $(3{,}3 \div 6{,}2) \cdot 10^{-3}$ degré$^{-1}$. La dépendance de ρ et γ de la température pour les métaux purs (et certains alliages) provient de la dépendance de $\bar{\lambda}$ vis-à-vis de la température.

A toutes les températures, excepté $T = 0$, les ondes électroniques (p. 394) subissent une certaine dispersion sur les vibrations thermiques des ions d'autant plus grande que plus élevée est la température. Dans ce cas, $\bar{\lambda}$ et γ sont inversement proportionnels à la température absolue (dans le domaine de températures pas trop basses). Certains métaux et alliages présentent le phénomène de *supraconductivité* consistant en ceci: au-dessous d'une certaine température critique la résistivité électrique de ces substances devient pratiquement nulle (p. 501).

3. Lois du courant continu

1° Les forces coulombiennes d'interaction électrostatique agissant entre les charges électriques (p. 356) conduisent à une redistribution de celles-ci dans le conducteur telle que le champ électrique dans le conducteur disparaisse et les potentiels en tous les points de ce conducteur s'égalisent. Le champ de forces coulombiennes ne peut donc être cause de l'apparition d'un courant électrique continu.

2° Le courant de conduction continu ne peut être réalisé que lorsque le champ électrique dans le conducteur est différent de zéro et ne varie pas avec le temps. Les circuits de courant continu sont fermés et les charges libres sont sollicitées non seulement par des forces électrostatiques (coulombiennes) mais aussi par des forces non électrostatiques dites *forces extérieures*. Le champ électrique de forces extérieures dans le circuit est créé par les *sources de f.é.m.* (piles, accumulateurs, dynamos, etc.) branchées dans ce circuit. Déplaçant les charges électriques et maintenant constante la différence de potentiel entre deux points quelconques du circuit de cou-

rant continu, les forces extérieures accomplissent un travail au compte de l'énergie dépensée dans la source de f.é.m., qui de la sorte joue le rôle de ***générateur d'énergie dans le circuit.*** Le champ de forces extérieures se trouve à l'intérieur de la source de f.é.m. Sur les tronçons du circuit de courant continu exempts de sources de f.é.m. le déplacement des charges se produit sous l'action des forces électrostatiques.

3° Pour tout point situé à l'intérieur d'un conducteur par lequel passe un courant continu

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{coul}} + \mathbf{E}_{\text{ext}},$$

où **E** est le champ électrique au point donné, $\mathbf{E}_{\text{coul}}$ et $\mathbf{E}_{\text{ext}}$ les champs coulombien et extérieur respectivement. Pour le tronçon 1-2 d'un conducteur de section S est vraie la relation suivante

$$I\int_1^2 \rho\,\frac{dl}{S} = \int_1^2 \mathbf{E}_{\text{coul}}\cdot d\mathbf{l} + \int_1^2 \mathbf{E}_{\text{ext}}\cdot d\mathbf{l},$$

où I est l'intensité de courant dans le conducteur, $d\mathbf{l}$ le vecteur numériquement égal à l'élément de longueur dl du conducteur et dirigé suivant la tangente au conducteur dans le même sens que le vecteur densité de courant **j**;

$$\int_1^2 \mathbf{E}_{\text{coul}}\cdot d\mathbf{l} = \varphi_1 - \varphi_2,$$

où φ_1 et φ_2 sont les valeurs du potentiel du champ électrostatique aux points 1 et 2 (p. 367).

4° L'intégrale simple du vecteur $\mathbf{E}_{\text{ext}}$ suivant le tronçon 1-2 de circuit est appelée *force électromotrice* (f.é.m.) $\mathcal{E}_{21}$ agissant sur ce même tronçon:

$$\mathcal{E}_{21} = \int_1^2 \mathbf{E}_{\text{ext}}\cdot d\mathbf{l}.$$

La f.é.m. est numériquement égale au travail développé par les forces extérieures lors du déplacement d'une charge positive unité sur le tronçon 1-2 de conducteur. La grandeur $\mathcal{E}_{21}$ est égale à la somme algébrique des f.é.m. de toutes les sources comprises dans le tronçon 1-2 de circuit. Dans ce cas, la f.é.m. de la source est supposée positive si, branchée seule dans un circuit fermé, la source excite un courant dirigé sur le tronçon 1-2 du point 1 au point 2.

5° On appelle *tension (chute de tension* ou *de potentiel)* U_{21} sur le tronçon 1-2 de circuit une grandeur numériquement égale au travail développé par le champ total de forces coulombiennes et de forces extérieures pour déplacer une charge positive unité sur le tronçon 1-2 de circuit:

$$U_{21} = \int_1^2 (\mathbf{E}_{coul} + \mathbf{E}_{ext}) \cdot d\mathbf{l} = \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}.$$

De la sorte

$$U_{21} = (\varphi_1 - \varphi_2) + \mathscr{E}_{21}.$$

6° L'intégrale

$$\int_1^2 \rho \frac{dl}{S} = R_{21}$$

est appelée ***résistance du tronçon de circuit*** situé entre les sections 1 et 2. Pour un conducteur cylindrique homogène (ρ = const, S = = const):

$$R_{21} = \rho \frac{l_{21}}{S} = \frac{l_{21}}{\gamma S},$$

où l_{21} est la longueur du tronçon 1-2 de conducteur.

7° *Loi d'Ohm appliquée à un tronçon arbitraire de circuit:*

$$IR_{21} = (\varphi_1 - \varphi_2) + \mathscr{E}_{21},$$

ou

$$U_{21} = IR_{21}.$$

La tension sur un tronçon de circuit est égale au produit de la résistance de celui-ci par l'intensité de courant.

EXEMPLE 1. Pour un circuit électrique fermé $\varphi_1 = \varphi_2$, la résistance totale du circuit $R_{21} = R$ et

$$\mathscr{E} = IR,$$

où $\mathscr{E}$ est la somme algébrique de toutes les f.é.m. agissant dans ce circuit. Pour le circuit électrique fermé, représenté fig. IV.2.3, dont la source possède une f.é.m. $\mathscr{E}$ et une résistance interne r, la tension U aux bornes de la source (sur le circuit extérieur) est égale à

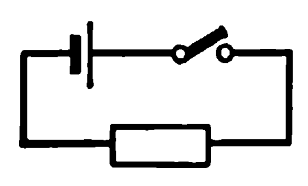


FIG. IV.2.3.

$$U = IR_1,$$

où $I = \frac{\mathcal{E}}{r + R_1}$ et $R_1 = R - r$. C'est pourquoi $U = \frac{\mathcal{E} R_1}{r + R_1} = \mathcal{E} - \frac{\mathcal{E} r}{r + R_1} = \mathcal{E} - Ir$.

EXEMPLE 2. En circuit ouvert $I = 0$ et $\mathcal{E}_{21} = \varphi_2 - \varphi_1$. On trouve la f.é.m. de la source en mesurant la différence de potentiel aux bornes de celle-ci, quand le circuit extérieur est ouvert.

8° Si les conducteurs formant le circuit sont immobiles et que le courant électrique soit continu, le travail des forces extérieures est entièrement dépensé sur l'échauffement des conducteurs. L'énergie W dégagée dans le circuit au cours du temps t dans tout le volume du conducteur est égale à

$$W = IUt,$$

où I est l'intensité de courant, U la chute de potentiel dans le conducteur. La quantité de chaleur Q (en calories) correspondant à l'énergie W est:

$$Q = 0{,}24\, IUt,$$

où I est donné en A, U en V et t en s.

Cette formule traduit la *loi de Joule-Lenz*: la quantité de chaleur dégagée par le courant dans un conducteur est proportionnelle à l'intensité de courant, au temps de passage du courant et à la chute de potentiel.

4. Lois de Kirchhoff

1° Le calcul des *circuits complexes (des circuits dérivés)* du courant continu consiste à rechercher les intensités de courant dans chaque tronçon de circuit d'après les résistances données de ces tronçons et les f.é.m. appliquées à ceux-ci. On utilise pour la résolution de ce problème les lois de Kirchhoff.

2° On appelle nœud d'un circuit dérivé le point en lequel on a plus de deux directions possibles du courant (fig. IV.2.4). A un nœud aboutissent plusieurs conducteurs.

Première loi de Kirchhoff (loi des nœuds): la somme algébrique des courants I_k arrivant à un nœud est nulle:

$$\sum_{k=1}^{n} I_k = 0,$$

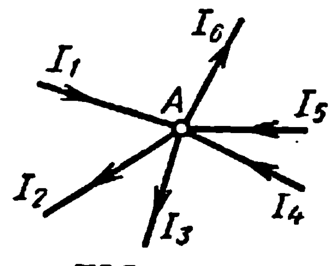


FIG. IV.2.4.

où n est le nombre de conducteurs aboutissant à ce nœud. Il est convenu d'admettre positifs ou négatifs les courants suivant qu'ils vont vers le nœud ou qu'ils s'en éloignent.

3° *Seconde loi de Kirchhoff (loi des mailles):* dans toute maille choisie arbitrairement dans un circuit dérivé, la somme algébrique des produits des courants I_k par les résistances R_k des tronçons correspondants de cette maille est égale à la somme algébrique des f.é.m. appliquées à la maille:

$$\sum_{k=1}^{n_1} I_k R_k = \sum_{k=1}^{n_1} \mathcal{E}_k.$$

Lors de l'utilisation de la seconde loi de Kirchhoff on choisit une direction déterminée du parcours de la maille; les courants I_k parallèles à la direction du parcours sont admis positifs. Les f.é.m. $\mathcal{E}_k$ des sources de courant sont considérées comme positives si elles créent des courants dirigés dans le sens de parcours de la maille.

4° Ordre dans lequel est effectué le calcul d'un circuit complexe de courant continu:

a) choix arbitraire des sens des courants dans tous les tronçons de circuit:

b) écriture de $m-1$ équations indépendantes déduites de la loi des nœuds pour m nœuds du circuit;

c) choix de mailles arbitraires telles que chaque nouvelle maille contienne au moins un tronçon de circuit qui ne soit pas compris dans les mailles considérées auparavant. Dans un réseau de conducteurs, constitué de p branches (parties entre nœuds voisins) et m nœuds, le nombre d'équations indépendantes, selon la loi des mailles, est égal à $p-m+1$.

EXEMPLE 1. Pour mesurer les courants I supérieurs au courant maximum I_0 pour lequel a été construit l'*ampèremètre* de résistance R_0, on associe en parallèle à celle-ci une résistance additionnelle appelée alors *shunt* R_{sh} (fig. IV.2.5). Son calcul est fait d'après les lois de Kirchhoff:

$$I = I_0 + I_{sh}, \quad I_0 R_0 = I_{sh} R_{sh},$$

d'où

$$R_{sh} = \frac{R_0 I_0}{I - I_0};$$

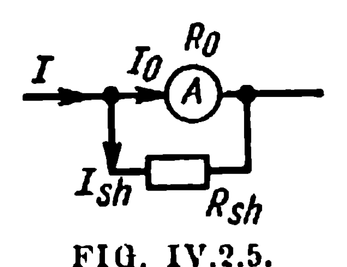


FIG. IV.2.5.

I_{sh} est l'intensité de courant dans le shunt.

EXEMPLE 2. Pour mesurer la tension U sur un tronçon de circuit, on associe en parallèle à ce tronçon un voltmètre, prévu pour

la tension U_0 pour un courant maximum dans l'appareil I_0 ($U_0 = I_0 R_0$). Si $U > U_0$, on connecte en série avec le voltmètre une résistance additionnelle R_a (fig. IV.2.6), déterminée par l'équation

$$(R_0 + R_a)\, I_0 = U,$$

d'où

$$R_a = \frac{U}{I_0} - R_0.$$

FIG. IV.2.6.

EXEMPLE 3. Dans le schéma électrique, représenté fig. IV.2.7, sont données les résistances R_2, R_3, R_4 et les forces électromotrices $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$. On demande de déterminer la résistance R_1 lorsque le circuit du galvanomètre G n'est pas parcouru par le courant ($I_g = 0$). Les directions des courants étant choisies comme il est indiqué fig. IV.2.7, la première loi de Kirchhoff fournit pour les nœuds A, B et C les équations suivantes:

$$I_2 - I_1 = 0,$$
$$I_1 + I_3 = I,$$
$$I_4 - I_3 = 0.$$

Les mailles $ABCGA$, $ADCGA$ et $BCDB$ sont parcourues dans le sens contraire à celui des aiguilles d'une montre:

$$-I_1R_1 + I_3R_3 = \mathscr{E}_1,$$
$$I_2R_2 - I_4R_4 = 0,$$
$$I_3R_3 + I_4R_4 = \mathscr{E}_2.$$

La solution de ce système d'équations donne:

$$R_1 = \frac{R_3R_2}{R_4} - \frac{R_2(R_3 + R_4)}{R_4}\,\frac{\mathscr{E}_1}{\mathscr{E}_2}.$$

Lorsque $\mathscr{E}_1 = 0$, le résultat ne dépend pas de $\mathscr{E}$, et on en vient au schéma du *pont de Wheatstone* pour mesurer les résistances:

$$R_1 = \frac{R_3R_2}{R_4}.$$

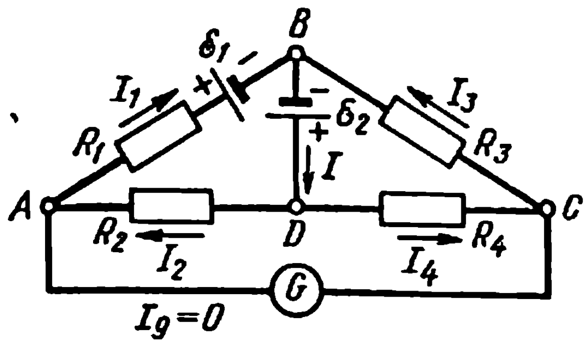


FIG. IV.2.7.

Cette formule reste vraie lorsqu'on transpose le galvanomètre G et la source de la f.é.m. $\mathscr{E}_2$ dans le pont de Wheatstone.

CHAPITRE 3

Courant électrique dans les fluides

1. Conduction des liquides. Dissociation électrolytique

1° Dans beaucoup de liquides (solutions aqueuses de sels, d'acides, etc.) le courant électrique est réalisé par le mouvement ordonné des *ions:* atomes ou groupes d'atomes possédant une quantité excédentaire ou déficitaire d'électrons par rapport aux atomes ou aux molécules neutres. Le champ électrique provoquant le mouvement ordonné des ions est créé dans le liquide par les électrodes: conducteurs métalliques reliés aux bornes d'un générateur. L'électrode positive est l'*anode*, l'électrode négative la *cathode.* Les ions positifs qui se dirigent vers la cathode sont les *cations* (ions métalliques et ion hydrogène); les ions négatifs qui migrent vers l'anode sont les *anions* (ions des résidus acides et ion hydroxyle).

2° Le passage du courant électrique dans de tels liquides s'accompagne d'*électrolyse:* dégagement aux électrodes des composants du soluté et d'autres substances, produits des réactions secondaires. Les conducteurs dans lesquels le passage du courant électrique s'accompagne d'électrolyse sont appelés ***électrolytes*** ou ***conducteurs de seconde espèce.*** A la différence du courant dans les conducteurs métalliques ***(conducteurs de première espèce)*** le courant dans les électrolytes est dû à un transfert de substance.

3° On appelle ***dissociation électrolytique*** la décomposition des molécules de soluté en ions positifs et négatifs par suite de son interaction avec le solvant. Ce phénomène est dû à l'action simultanée de deux facteurs: l'agitation thermique et l'interaction des molécules polaires de soluté, constituées d'ions réciproquement liés (molécules de sels, acides et bases par exemple), avec les molécules polaires de solvant (l'eau par exemple). L'interaction indiquée conduit à l'affaiblissement de la liaison entre les ions

et facilite la rupture de cette liaison lors de la collision d'une molécule de soluté avec une molécule suffisamment rapide de solvant (ou de soluté).

On appelle *coefficient (taux) de dissociation* α le rapport du nombre de molécules n_0' dissociées en ions au nombre total n_0 de molécules de soluté: $\alpha = n_0'/n_0$.

4° L'agitation thermique chaotique des ions dans la solution provoque un processus de *recombinaison* des ions de signes contraires en molécules neutres.

A l'équilibre dynamique entre les processus de dissociation et de recombinaison, α vérifie l'équation

$$\frac{1-\alpha}{\alpha^2} = \mathrm{const} \cdot n_0.$$

Si $n_0 \to 0$, $\alpha \to 1$, c'est-à-dire dans les solutions diluées $\alpha \approx 1$ et presque toutes les molécules sont dissociées. Avec l'augmentation de concentration de la solution α décroît. Dans les solutions fortes

$$\alpha \approx \frac{\mathrm{const}}{\sqrt{n_0}}.$$

2. Lois de l'électrolyse

1° *Première loi d'électrolyse (première loi de Faraday):* la quantité de substance M déposée sur une électrode est proportionnelle à la charge électrique q qui a traversé l'électrolyte:

$$M = kq.$$

Le coefficient k, numériquement égal à la masse de substance qui se dégage, lors du passage d'une charge électrique unité dans un électrolyte, est appelé *équivalent électrochimique* de la substance. Lorsqu'on fait passer dans un électrolyte un courant continu I au cours du temps t, on a $q = It$ et $M = kIt$.

2° *Seconde loi d'électrolyse (seconde loi de Faraday):* les équivalents électrochimiques des éléments sont proportionnels à leurs équivalents chimiques:

$$k = C\frac{A}{Z},$$

où le quotient du poids atomique A de l'élément par sa valence Z est appelé *équivalent chimique*. La quantité de substance, dont la masse exprimée en grammes est égale à son équivalent chimique,

est *l'équivalent-gramme*. La grandeur $F = 1/C$ est le *nombre de Faraday*. F est égal à la charge électrique qu'il faut faire traverser un électrolyte, pour que se dégage aux électrodes 1 équivalent-gramme de substance quelconque:

$$F = 96\,494 \frac{\text{C}}{\text{Eq-g}} \approx 9{,}65 \cdot 10^4 \frac{\text{C}}{\text{Eq-g}}.$$

3° *Loi de Faraday généralisée:*

$$M = \frac{1}{F} \frac{A}{Z} It \quad \text{ou} \quad M = \frac{1}{F} \frac{A}{Z} q.$$

3. Atomicité de l'électricité

Des lois de Faraday on détermine la valeur q de la charge d'un ion quelconque: $q = \pm ZF/N_A$, où Z est la valence de l'ion, F le nombre de Faraday, N_A le nombre d'Avogadro. La charge d'un ion monovalent ($Z = 1$) est égale en valeur absolue à la charge de l'électron:

$$q_1 = e = 4{,}803 \cdot 10^{-10}\ \text{CGSE}_q = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \text{C}.$$

Il est établi que chaque charge électrique est un multiple entier d'une charge minimale e, qui est élémentaire (p. 356).

4. Loi d'Ohm en électrolyse

1° La densité de courant $\mathbf{j}$ (p. 392) dans les liquides est égale à la somme des densités de courant des cations et des anions:

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_+ + \mathbf{j}_-.$$

La dépendance entre la densité de courant dans les liquides $\mathbf{j}$ et le champ électrique $\mathbf{E}$ appliqué aux électrodes est de la forme:

$$\mathbf{j} = \frac{F}{N_A} Z_+ n_{0+} (u_+ + u_-)\, \mathbf{E},$$

où F est le nombre de Faraday, N_A le nombre d'Avogadro, Z_+ la valence des cations dans la solution, n_{0+} le nombre de cations par unité de volume d'électrolyte, u_+ et u_- les *mobilités* des cations et des anions respectivement, autrement dit, les vitesses moyennes de déplacement de ces ions sous l'action d'une unité de champ électrique. Cette formule exprime la *loi d'Ohm pour la densité de courant dans les électrolytes*.

2° La résistivité de l'électrolyte est égale à

$$\rho = \frac{N_A}{F Z_+ n_{0+} (u_+ + u_-)}.$$

Si une molécule d'électrolyte se dissocie en k_+ ions positifs et k_- ions négatifs, on a $k_+Z_+ = k_-Z_-$,

$$n_{0+} = k_+ \alpha n_0 \quad \text{et} \quad n_{0-} = k_- \alpha n_0,$$

où α est le taux de dissociation, n_0 la concentration de l'électrolyte (p. 403). Dans ce cas

$$\rho = \frac{N_A}{FZ_+ k_+ \alpha n_0 (u_+ + u_-)} \quad \text{ou} \quad \rho = \frac{1}{F \alpha C (u_+ + u_-)},$$

où $C = \frac{k_+ Z_+ n_0}{N_A} = \frac{k_- Z_- n_0}{N_A}$ est le nombre d'équivalents-grammes (équivalents-kilogrammes) par unité de volume d'électrolyte des ions de même signe à l'état libre et liés dans les molécules. On appelle la grandeur C *concentration équivalente* de la solution (on la mesure en Eq-kg/m³, ou, ce qui est le même, en Eq-q/l).

5. Conductibilité électrique des gaz

1° Les gaz sont constitués d'atomes et de molécules électriquement neutres et dans les conditions normales représentent des isolants. La conductibilité électrique des gaz se manifeste lors de leur *ionisation* consistant en l'arrachement d'électrons des atomes et des molécules des gaz. Les atomes (molécules) dans ce cas se trasforment en ions positifs. Les ions négatifs apparaissent dans les gaz lors de la capture d'électrons libres par des atomes neutres (molécules).

2° Au cours de l'ionisation d'un atome (d'une molécule) un certain *travail d'ionisation* A_i est développé contre les forces d'interaction entre l'électron extérieur et les autres particules de l'atome (de la molécule). A_i dépend de la nature chimique du gaz et de l'état énergétique de l'électron dans l'atome (la molécule). A_i croît avec l'augmentation de la *multiplicité d'ionisation*, c'est-à-dire avec le nombre d'électrons arrachés de l'atome.

3° On appelle *potentiel d'ionisation* φ_i la différence de potentiel que doit subir l'électron dans un champ électrique accélérateur pour que la croissance de son énergie s'égalise au travail d'ionisation: $\varphi_i = A_i/e$, où e est la valeur absolue de la charge de l'électron.

4° L'ionisation du gaz a lieu sous des influences extérieures: échauffement intense, rayons X, radiation radioactive, bombardement des molécules (des atomes) du gaz par des électrons ou des

ions rapides. L'intensité d'ionisation est mesurée par le nombre de couples de particules chargées de signes contraires, surgissant dans une unité de volume du gaz par unité de temps.

5° L'*ionisation par choc* d'un gaz monoatomique par les électrons ou ions a lieu dans le cas où l'énergie cinétique d'une particule ionisante

$$\frac{mv^2}{2} \geqslant A_i\left(1 + \frac{m}{M}\right),$$

où A_i est le travail d'ionisation, M la masse de l'atome.

Pour qu'il y ait ionisation par choc, les ions monovalents doivent subir dans le champ accélérateur une différence de potentiel plus haute que celle des électrons. Ceci est vrai pour l'ionisation des molécules constituées d'un nombre d'atomes arbitraire.

6. Décharge semi-autonome dans les gaz

1° Si la conductibilité électrique des gaz est due aux agents ionisants extérieurs, le processus de passage du courant électrique dans le gaz est appelé *décharge gazeuse semi-autonome*. La courbe montrant la dépendance entre le courant et la tension U aux électrodes, lors d'une décharge gazeuse semi-autonome, est représentée fig. IV.3.1. Pour des tensions faibles, la densité de courant $\mathbf{j}$ dans la décharge est proportionnelle au champ $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{j} = en_0(u_+ + u_-)\mathbf{E},$$

où u_+ et u_- sont les mobilités des cations et des anions, n_0 le nombre de paires d'électrons et de cations monovalents par unité de volume, e la valeur absolue de la charge de l'électron. Dans l'intervalle de pressions entre 10^{-1} et 10^2 atm, u_+ et u_- sont inversement proportionnelles à la pression du gaz. Lors de l'accroissement ultérieur du champ $\mathbf{E}$, la concentration des ions dans la décharge décroît et la dépendance linéaire de l'intensité de courant vis-à-vis de la tension est compromise.

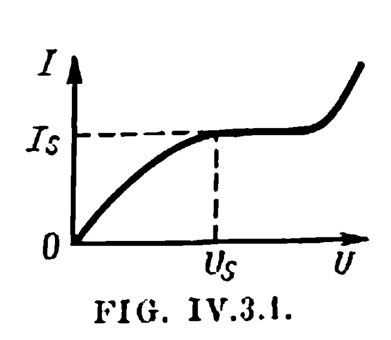


FIG. IV.3.1.

2° Le courant maximum I_s, possible pour une intensité donnée d'ionisation, est appelé *courant de saturation*. Dans ce cas, tous les ions surgissant dans le gaz atteignent les électrodes: $I_s = eN_0$, où N_0 est le nombre maximal de paires d'ions monovalents, qui se forment en 1 s dans le gaz sous l'action du facteur ionisant.

7. Décharge autonome dans les gaz

1° La décharge électrique dans les gaz qui persiste après que le facteur ionisant extérieur a cessé d'agir est appelée ***décharge autonome***. Les charges électriques libres, indispensables pour entretenir une telle décharge, sont dues principalement à l'ionisation par choc (p. 406) des molécules gazeuses sous l'action des électrons ***(ionisation volumétrique)*** et de l'arrachement d'électrons de la cathode lors du bombardement de celle-ci par les cations ***(ionisation superficielle)***. L'ionisation par choc des molécules gazeuses, réalisée par les cations, ne doit être prise en considération que lorsque les champs sont suffisamment intenses. L'arrachement d'électrons de la cathode peut avoir lieu également par suite de l'échauffement de celle-ci (émission thermoélectronique, p. 441) et par suite de l'effet photo-électrique extrême dû à l'émission lumineuse de la décharge.

2° La transformation de la décharge gazeuse semi-autonome en décharge autonome est appelée ***perforation électrique*** (ou ***claquage) du gaz*** et se produit au ***potentiel disruptif*** U_d (ou ***potentiel explosif)***.

Selon la théorie approximative de Townsend, la ***condition d'étincelle d'une décharge autonome*** dans le gaz entre des électrodes planes est de la forme:

$$\gamma\left(e^{\alpha d}-1\right)=1,$$

où d est la distance entre électrodes, α le ***coefficient d'ionisation volumétrique*** du gaz (premier coefficient de Townsend) égal au nombre moyen d'ionisations effectuées par un électron sur un parcours de 1 cm, γ le ***coefficient d'ionisation superficielle*** (deuxième coefficient de Townsend) égal au nombre moyen d'électrons arrachés de la cathode par un cation. Pour un gaz et un matériau de cathode donnés

$$\frac{\alpha}{p}=f_1\left(\frac{U}{pd}\right) \quad \text{et} \quad \gamma=f_2\left(\frac{U}{pd}\right),$$

où p est la pression du gaz, U la tension entre électrodes. Ainsi, le potentiel disruptif U_d dépend du produit pd ***(loi de Paschen)***. Le caractère de cette dépendance est montré fig. IV.3.2. Toutes les autres conditions étant égales, U_d baisse avec la décroissance du potentiel d'ionisation et du travail d'extraction des électrons de la cathode.

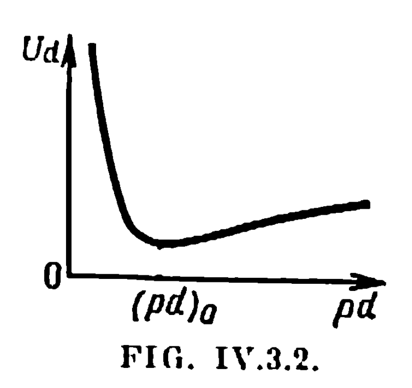


FIG. IV.3.2.

La dépendance entre le courant de décharge et la tension appliquée aux électrodes lors de la décharge est appelée *caractéristique courant-tension de la décharge.*

3° La *décharge luminescente* autonome est observée aux basses pressions (de l'ordre de quelques dizaines de mm Hg). Les principales parties de la décharge luminescente sont (fig. IV.3.3): *I*—espace sombre de Crookes; *II* — lumière négative; *III* — espace sombre de Faraday; *IV* — colonne positive. Les zones *I—III* constituent la *région cathodique* de la décharge. Au voisinage de la cathode a lieu une chute brusque de potentiel due à une grande concentration de cations à la frontière des zones *I—II*. Dans la zone *II*, les électrons accélérés dans la zone *I* engendrent une intense ionisation par choc. La lumière négative est provoquée principalement par la recombinaison des électrons et des ions en atomes ou molécules neutres. Le spectre de la lumière négative est continu. On observe dans la colonne positive une concentration constante et importante d'électrons et de cations (plasma de décharge gazeuse, p. 413) due à l'ionisation par choc des molécules gazeuses par les électrons. La chute de potentiel dans le domaine de la colonne positive est relativement petite et, toutes les autres conditions étant égales d'ailleurs, elle s'accroît avec la diminution du diamètre du tube à décharge gazeuse.

La luminescence de la colonne positive déterminant les propriétés optiques de la décharge luminescente est due au rayonnement des atomes (des molécules) excités du gaz. La recombinaison des électrons et des cations a lieu principalement sur les parois du tube à décharge gazeuse et provoque l'échauffement des parois. La colonne positive consiste souvent en *strates lumineuses* qui alternent avec des strates sombres. La colonne positive épouse la forme du tube à décharge gazeuse, indépendamment de la forme et de la disposition de la cathode et de l'anode. Ceci est lié à la présence d'un champ électrique transversal (radial) surgissant grâce à l'accumulation des électrons sur les parois du tube. Lors d'une décharge luminescente dans des tubes suffisamment courts ou dans des récipients larges on n'observe pas de colonne positive lumineuse.

L'espace sombre de Crookes est le domaine principal de la décharge luminescente dans lequel ont lieu les processus d'ionisation volumétrique du gaz, indispensables au maintien de la décharge. On appelle *longueur cathodique* l_c la distance de la cathode

au point de la décharge auquel la courbe $\varphi = \varphi(l)$ (fig. IV.3.3) présente un maximum ou un point d'inflexion. La décharge luminescente peut avoir lieu dans le seul cas où la distance entre électrodes $d \geqslant l$. La variation du potentiel $\Delta\varphi_c$ sur la longueur cathodique est appelée *chute cathodique.*

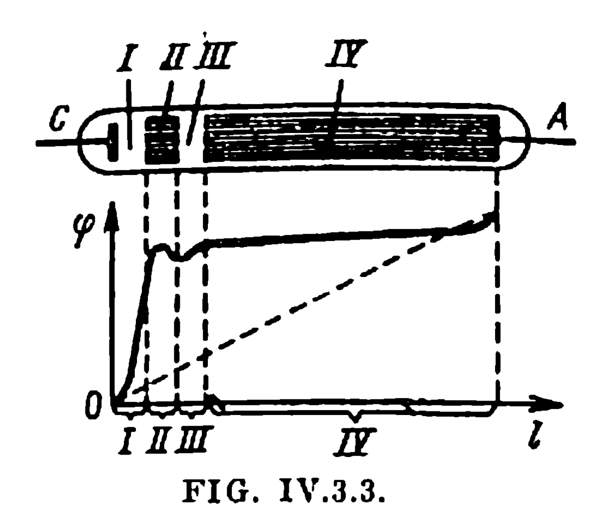


FIG. IV.3.3.

On distingue deux régimes de décharge luminescente: *normal* lorsque la densité de courant de décharge ne dépend pas du courant variant en fonction de la résistance extérieure de charge, et *anormal* quand la densité de courant croît avec le courant. Dans le premier cas, la cathode n'est pas entièrement recouverte par la lumière négative, dans le second cas elle l'est entièrement. Dans le cas d'une décharge luminescente normale l_c est inversement proportionnelle à la pression du gaz et $\Delta\varphi_c$ dépend de la nature du gaz, du matériau et de l'état de la surface de la cathode augmentant avec l'accroissement du travail d'extraction des électrons de la cathode (p. 422). Avec l'accroissement du courant de décharge, la chute de potentiel dans la colonne positive baisse. C'est pourquoi la caractéristique courant-tension d'une décharge luminescente normale a une forme descendante, autrement dit, la tension aux électrodes diminue avec l'augmentation du courant. Lors d'une décharge anormale l_c diminue avec l'accroissement du courant de décharge et $\Delta\varphi_c$ augmente. La caractéristique courant-tension d'une décharge luminescente anormale a une forme ascendante.

Si dans un tube à décharge luminescente normale la pression est suffisamment basse, l'espace sombre de Crookes emplit presque entièrement tout le tube. Dans ce cas le faisceau d'électrons se meut librement de la cathode aux parois du tube, c'est-à-dire sans subir de collisions avec les molécules gazeuses. De tels faisceaux d'électrons sont appelés *rayons cathodiques.*

On appelle *rayons canaux (positifs* ou *anodiques)* les faisceaux d'ions positifs circulant librement. Ils peuvent également être obtenus à l'aide de décharge luminescente: si l'on perce un petit canal dans la cathode du tube à décharge, les ions positifs tombant dans ce canal passeront à travers celui-ci dans l'espace évacué derrière la cathode, sous forme de faisceaux de rayons canaux.

4° Sous pressions hautes et normales, on observe divers types de décharges gazeuses: aigrette, couronne, étincelle, arc.

La *couronne* (ou *effet couronne)* surgit dans un gaz se trouvant dans un champ électrique intense non uniforme, c'est-à-dire au voisinage d'électrodes dont les surfaces ont de petits rayons de courbure (par exemple au voisinage des pointes, des fils de haute tension, etc.). Lors de l'effet couronne l'ionisation du gaz et son émission lumineuse ont lieu dans un espace relativement restreint, attenant à l'électrode dont la surface a un petit rayon de courbure. Cet espace est appelé *couche de couronne* et l'électrode correspondante *électrode de couronne.* La partie de la décharge hors de la couche de couronne (ou hors des deux couches si la couronne apparaît aux deux électrodes) est appelée *région «sombre» de la couronne.*

Dans le cas où l'effet couronne surgit à la cathode *(couronne négative)*, les électrons provoquant l'ionisation volumétrique du gaz sont arrachés de la cathode par des ions positifs. Si c'est l'anode qui présente un effet couronne *(couronne positive)*, les électrons surgissent au voisinage de l'anode grâce à la photoionisation du gaz sous l'action du rayonnement de la couche de couronne. Dans la région «sombre» de la décharge, la conductibilité du gaz est relativement faible, étant donné qu'elle est réalisée au compte des particules chargées d'un signe seulement et arrivant de la couche de couronne. C'est pourquoi l'intensité de courant dans la couronne, à la différence des autres types de décharges autonomes, est déterminée non par la résistance de la partie extérieure du circuit, mais par la résistance de la région «sombre» de la décharge.

A une tension élevée, l'effet couronne se produisant autour d'une pointe prend la forme d'une aigrette lumineuse: système de minces lignes brillantes, sinueuses et intermittentes dans le temps, qui sortent de la pointe. Une telle décharge est appelée *décharge en aigrette.*

Si la tension entre les électrodes devient égale au potentiel disruptif d'étincelle $U_é$, la couronne se transforme en étincelle. Toutes les autres conditions étant égales, $U_é$ est plus faible pour une couronne positive que pour une couronne négative. Le potentiel $U_é$ et le potentiel U_c dépendent de la distance d entre électrodes. Avec la diminution de d le potentiel $U_é$ décroît plus rapidement que U_c, autrement dit, l'intervalle de potentiels entre U_c et $U_é$ auxquels a lieu l'effet couronne diminue. Quand d prend la valeur d_{cr} *(distance critique)*, $U_é$ devient égal à U_c. Si $d<d_{cr}$, on a $U_é < U_c$ et l'effet couronne n'aura pas lieu du tout.

5° L'*étincelle* a l'aspect de fils brillants entrecoupés, en zigzags et ramifiés, représentant des canaux de gaz ionisé, qui transper-

cent l'intervalle de décharge et disparaissent, remplacés par d'autres. L'étincelle s'accompagne de dégagement d'une grande quantité de chaleur et d'émission lumineuse intense du gaz. Les phénomènes caractérisant une telle décharge sont conditionnés par des *avalanches* d'électrons et d'ions surgissant dans les canaux de décharge où la pression augmente jusqu'à des centaines d'atmosphères et la température s'élève jusqu'à 10^4 °C. La *foudre* est un cas particulier d'étincelle. Le canal principal de la foudre a un diamètre de 10 à 25 cm. La longueur de la foudre atteint plusieurs kilomètres pour l'intensité maximale du courant atteignant des centaines de milliers d'ampères.

6° L'*arc électrique* se produit pour une grande densité de courant et pour une tension aux électrodes de l'ordre de plusieurs dizaines de volts. Il est le résultat d'une émission thermoélectronique intense (p. 438) par une cathode incandescente. Les électrons sont accélérés par le champ électrique et provoquent l'ionisation par choc des molécules gazeuses. C'est pourquoi la résistance électrique de l'espace gazeux entre électrodes de l'arc n'est pas grande. Avec l'augmentation de l'intensité de courant de l'arc électrique, la conductibilité de l'espace gazeux s'accroît si intensément que la tension entre électrodes de l'arc subit une chute (la caractéristique courant-tension a une forme descendante). La température de la cathode (sous pression atmosphérique) atteint 3 000 °C. Le bombardement de l'anode par des électrons crée dans celle-ci une dépression: *cratère de l'arc* avec une température d'environ 4 000 °C (à $p = 760$ mm Hg). La température du gaz dans le canal de décharge est 5 000-6 000 °C. L'émission froide d'électrons à partir de la cathode (p. 440) joue le rôle principal si l'arc électrique se produit à une température relativement basse de la cathode (par exemple la lampe à arc de mercure).

8. Notions sur le plasma

1° On appelle *plasma* l'état de la matière caractérisé par une ionisation élevée de ses particules, même par une ionisation complète. Suivant le degré d'ionisation α, c'est-à-dire le rapport de la concentration des particules chargées à toute la concentration des particules, on distingue les plasmas: *faiblement ionisé* (α est égal aux fractions de %), *modérément ionisé* (α représente quelques %), *totalement ionisé* (α proche de 100%).

Dans la nature, un plasma faiblement ionisé est observé dans l'ionosphère. Le Soleil, les chaudes étoiles, ainsi que certains

nuages interstellaires sont des exemples de plasma totalement ionisé, formé à de très hautes températures *(plasma à haute température)*. Artificiellement, le plasma est obtenu dans les décharges gazeuses (p. 408), dans les tubes à décharge. Le contrôle du mouvement du plasma est à la base de son utilisation comme corps de travail dans différents moteurs destinés à la transformation directe de l'énergie interne en énergie électrique (générateurs magnétohydrodynamiques, sources d'énergie électrique à base de plasma).

2° La grande conductibilité électrique du plasma le rapproche par ses propriétés aux conducteurs. Les différences de concentration des particules chargées et les différences de potentiel surgissant fortuitement dans un plasma non soumis à des influences extérieures se nivellent tout comme dans les conducteurs non sollicités par des f.é.m. extérieures.

3° Entre les particules chargées du plasma agissent des forces électrostatiques (p. 356), entre les particules chargées et neutres des forces de nature quantomécanique (p. 785).

Le plasma diffère d'une simple agglomération de particules chargées par une certaine densité minimale de ces particules, déterminée par la condition $L \gg D$, où L est la dimension linéaire du système de particules chargées, D la distance caractéristique du plasma appellée *écran de Debye:* $D = \left(\sum_i \frac{4\pi e_i^2 n_i}{kT_i}\right)^{-1/2}$ (en u.é.s. CGS), où e_i est la charge, n_i la concentration, T_i la température des particules de i-ième sorte, k la constante de Boltzmann. Aux distances D a lieu le blindage du champ coulombien d'une charge quelconque du plasma, puisque cette charge se trouve être entourée principalement par des particules de charges opposées. Le plasma représente un système quasi neutre avec un grand nombre de particules chargées, disposées dans des domaines de l'espace avec différentes dimensions $L \gg D$.

Le nombre total de particules chargées du plasma dans une sphère de rayon D est appelé *nombre de Debye*. Le plasma est dit gazeux si N est un nombre important et si, du point de vue thermodynamique, il peut être considéré comme un gaz parfait.

Les particularités spécifiques du plasma liées à l'interaction coulombienne à longue distance de ses particules permettent de considérer le plasma comme un état d'agrégation particulier de la matière. Ces particularités sont: l'interaction intense avec les champs électriques et magnétiques extérieurs conditionnée par la haute conductibilité électrique du plasma, l'interaction collective particulière des particules du plasma réalisée par un champ self-consistent (p. 781), les propriétés élastiques conditionnant la possi-

bilité de l'excitation et de la propagation de diverses oscillations et ondes dans le plasma.

4° L'état d'équilibre thermodynamique d'un gaz fortement ionisé est semblable à un plasma de température définie, dans lequel la décroissance des particules chargées, due à la recombinaison (p. 408), est compensée au compte de nouvelles ionisations. L'énergie cinétique moyenne des différentes particules constituant un tel plasma (ions positifs et négatifs, particules neutres en différents états d'excitation) est la même. L'énergie du rayonnement noir (p. 238) existant dans un tel plasma correspond à la même température. Les processus d'échange d'énergie entre particules sont des processus équilibrés. Le plasma doué de ces propriétés est appelé *plasma isotherme*. Il existe dans l'atmosphère des étoiles ayant une température très élevée. (Sur l'importance du plasma pour les processus thermonucléaires voir p. 890.)

5° Dans le *plasma de décharge gazeuse* les particules chargées se trouvent continuellement dans un champ électrique accélérateur. A l'énergie cinétique moyenne des électrons dans un plasma de décharge gazeuse on fait correspondre une certaine température de la distribution maxwellienne des électrons suivant leurs niveaux d'énergie (p. 216), appelée *température électronique* T_e. Elle a un sens conventionnel, car dans un plasma de décharge gazeuse non isotherme il n'y a pas d'équilibre thermodynamique. L'énergie cinétique moyenne des électrons dans un plasma de décharge gazeuse est très supérieure à l'énergie moyenne des particules neutres.

6° L'état du plasma de décharge gazeuse, thermodynamiquement non équilibré, est maintenu au compte de l'énergie du courant de décharge qui le traverse. Si le champ électrique extérieur disparaît, le plasma de décharge gazeuse disparaît aussi. La disparition du plasma de décharge gazeuse non maintenu est appelée *désionisation du gaz*. Dans la balance d'énergie d'un plasma créé dans un volume limité, joue un rôle important, à côté des processus d'ionisation et de recombinaison, l'interaction du plasma avec les parois limitant son volume, ainsi que le rayonnement de plasma et le transport de rayonnement dans ce plasma. La diffusion des particules chargées vers les parois et leur recombinaison sur les parois, la transmission d'énergie aux parois par conductibilité thermique diminuent l'énergie du plasma et le contaminent de différentes impuretés. Pour prévenir ces processus, on tend à préserver le plasma du contact avec les parois à l'aide d'un champ magnétique (cf. p. 890). On observe plusieurs sortes de rayonnement de plasma dans la gamme optique et l'ultraviolet lointain: le rayonnement de freinage des électrons surgissant lors de leur freinage sur les ions, le rayonnement de recombinaison

accompagnant les processus de recombinaison, le rayonnement par des particules excitées constituant des raies spectrales. Dans le champ magnétique, on peut observer également le rayonnement synchrotron (p. 605).

7° Les paramètres du plasma de décharge gazeuse sont: la température électronique T_e, la concentration des électrons n_0, le nombre d'ionisations incombant à un électron dans 1 s, la densité de courant ionique ou électronique sur les parois, le champ électrique longitudinal E_z établi le long de l'axe de symétrie du plasma.

8° La condition nécessaire à l'obtention d'un degré élevé d'ionisation d'un plasma thermodynamiquement équilibré, constitué de particules de deux sortes, avec des charges de même valeur, mais de signe contraire, est la diminution maximale des recombinaisons des particules (p. 408).

Condition de la raréfaction du plasma:

$$\frac{e^2}{\bar{r}} < kT \quad \text{(en u.é.s. CGS)},$$

où $e^2/\bar{r}$ est l'énergie potentielle moyenne de l'interaction coulombienne des particules de charges e se trouvant à la distance $\bar{r}$, kT l'énergie moyenne de l'agitation thermique des particules, k la constante de Boltzmann, T la température absolue.

9° Un *plasma complètement ionisé* peut être obtenu à condition que

$$kT \gg e\varphi_i,$$

où φ_i est le potentiel d'ionisation des atomes de gaz. Pour l'hydrogène et le deutérium ceci correspond à $T \approx 160\,000\,°K$. Dans ces conditions joue un rôle important le rayonnement de plasma, qui rend difficile l'isolation adiabatique de celui-ci (p. 151).

10° Aux températures beaucoup inférieures à celles qui correspondent à une ionisation complète (9°), l'énergie interne d'un plasma thermodynamiquement équilibré, constitué de particules de deux sortes avec les charges $\pm e$ et d'atomes neutres, est égale à

$$U = U_{\text{parf}} - e^2 N \sqrt{\frac{4\pi N e^2}{kTV}} \quad \text{(en u.é.s. CGS)},$$

où $U_{\text{parf}} = C_V T + U_0$ est l'énergie interne du gaz parfait (p. 162), N le nombre de particules d'une même sorte dans le volume V.

La grandeur $d = \sqrt{\dfrac{kTV}{4\pi N e^2}}$ représente l'écran de Debye pour le plasma qui est proche par ses propriétés du gaz parfait.

A distances plus grandes que d, le champ électrique d'une charge donnée est blindé par des charges de signe opposé et devient insignifiant.

11° Pour le plasma considéré plus haut (10°):

l'énergie libre (p. 189) est:

$$F = F_{\text{parf}} - \frac{2}{3} Ne^2 \sqrt{\frac{4\pi Ne^2}{kT^2V}},$$

l'équation thermique d'état (pp. 154 et 191)

$$p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = \frac{RT}{V}\frac{M}{\mu} - \frac{1}{3} Ne^2 \sqrt{\frac{4\pi Ne^2}{kT^2V}}$$

l'entropie (p. 191)

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = (C_V)_{\text{parf}} \ln T + \frac{M}{\mu} R \ln V_\mu - \frac{1}{3} Ne^2 \sqrt{\frac{4\pi Ne^2}{kT^3V}}$$

(V_μ est le volume de 1 mole de gaz parfait),

la capacité calorifique (p. 191)

$$C_V = -T\left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}\right)_V = (C_V)_{\text{parf}} + \frac{1}{2} Ne^2 \sqrt{\frac{4\pi Ne^2}{kT^2V}}.$$

Dans ces formules R est la constante universelle des gaz (p. 158).

CHAPITRE 4

Courant électrique dans les semiconducteurs

1. Conduction intrinsèque des semiconducteurs

1° Les semiconducteurs représentent une grande classe de substances, la résistivité desquelles varie dans de larges limites et diminue intensément avec l'élévation de température (selon une loi exponentielle). Dans le système périodique de Mendéléev les semiconducteurs constituent le groupe d'éléments représenté fig. IV.4.1. Les semiconducteurs les plus typiques, largement utilisés, aux propriétés électriques bien connues, sont le germanium Ge, le silicium Si et le tellurium Te. Dans la couche externe des atomes de silicium et de germanium sont disposés 4 électrons de valence liés par des liaisons covalentes (p. 811) aux électrons de valence des atomes voisins. Les semiconducteurs cristallins sont des corps solides qui ont une bande énergétique de valence (p. 765) saturée par des électrons et séparée d'une bande de conduction (p. 765) vide (à 0° K) par un intervalle d'énergie relativement étroit *(bande interdite)*.

2° La conductibilité électrique d'un semiconducteur chimiquement pur est appelée *conduction intrinsèque*. La *conductibilité électronique* (conduction type n) apparaît lorsque les électrons sont passés de la *bande énergétique de valence* (la bande la plus élevée saturée par des électrons) à la bande de conduction (fig. IV.4.2). L'énergie qui doit être dépensée dans ce cas est égale à la largeur *de conduction intrinsèque* (p. 762) et est appelée *énergie d'activation* de conduction intrinsèque ΔW_0. Les valeurs de l'énergie d'activation (en eV) de la conduction intrinsèque des semiconducteurs sont

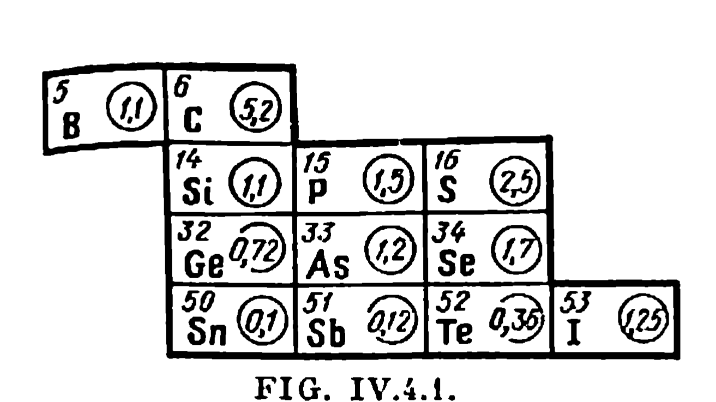


FIG. IV.4.1.

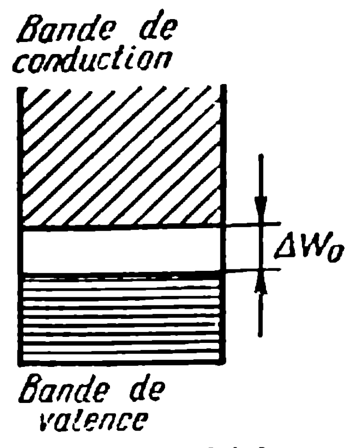


FIG. IV.4.2.

indiquées dans les petits cercles de la figure IV.4.1. La conductivité γ des semiconducteurs croît avec l'élévation de température T:

$$\gamma = \gamma_0 e^{-\Delta W_0/2kT},$$

où k est la constante de Boltzmann. La résistance électrique des semiconducteurs diminue avec le chauffage, ce qui constitue la différence essentielle entre les semiconducteurs et les métaux (p. 396).

A part le chauffage, la conduction des semiconducteurs peut être due à l'action d'un champ électrique suffisamment intense et à l'effet photoélectrique (*photoconductibilité* des semiconducteurs, p. 728).

3° Le passage des électrons de la bande de valence à la bande de conduction crée des niveaux énergétiques libres dans la bande saturée du semiconducteur. Le mouvement d'un électron dans cette bande, sous l'action du champ électrique, est équivalent au mouvement d'une charge positive (du trou) numériquement égale à la charge électronique. Les trous se déplacent dans la direction du champ électrique (p. 357). La conductibilité conditionnée par les trous est appelée *conduction par trous* ou *conduction type p*.

4° La conductivité totale des semiconducteurs est constituée des conductions types n et type p,

$$\gamma = en_eu_e + en_hu_h,$$

où e est la valeur absolue d'une charge unité porteur de courant (charge électronique), n_e et n_h les concentrations égales en électrons et en trous, u_e et u_h les mobilités des électrons et des trous (p. 404), différentes par suite de la différence des masses effectives (p. 764) et des temps des libres parcours de ces particules.

2. Conduction par impuretés des semiconducteurs

1° On appelle *conduction par impuretés* ou *extrinsèque* des semiconducteurs leur conductibilité électrique conditionnée par la présence de *centres d'impuretés*. Sous centres d'impuretés on comprend: a) les atomes d'éléments étrangers; b) les atomes excédentaires (par comparaison avec la composition stœchiométrique) des éléments entrant dans les semiconducteurs; c) tous les défauts possibles du réseau cristallin: nœuds vides, atomes ou ions interstitiels, dislocations dans le cristal, cassures, etc.

2° Les impuretés produisent des modifications dans le champ électrique périodique du cristal (p. 761) et influent sur le mouvement des électrons et sur leurs états énergétiques. Les niveaux énergétiques des électrons de valence appartenant aux atomes d'impuretés ne se casent pas dans les bandes énergétiques permises du cristal principal et constituent des niveaux énergétiques d'impuretés, disposés dans la bande interdite *(niveaux locaux)*.

3° Les impuretés peuvent servir de sources complémentaires d'électrons dans le cristal. Par exemple, lors de la substitution à un atome de germanium quadrivalent d'un atome de phosphore (d'arsenic ou d'antimoine) pentavalent, un électron de l'atome d'impureté ne peut former de liaisons covalentes et devient «superflu».

Le niveau énergétique d'un tel électron est disposé au-dessous de la bande de conduction (fig. IV.4.3). Ces niveaux remplis d'électrons sont appelés *niveaux donneurs*. Les atomes d'impuretés fournissant des électrons sont appelés *atomes donneurs*. Une petite énergie ΔW_e est indispensable pour faire passer les électrons des niveaux donneurs à la bande de conduction non remplie. Par exemple, pour le silicium $\Delta W_e = 0{,}054$ eV si l'arsenic est une impureté. Par suite du passage des électrons des niveaux donneurs à la bande de conduction apparaît dans le semiconducteur une conduction par impuretés. Les semiconducteurs de ce type sont appelés *semiconducteurs électroniques* ou *semiconducteurs type n*.

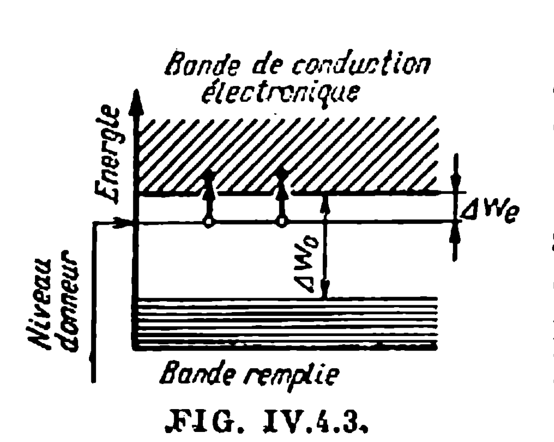


FIG. IV.4.3.

4° Lorsque l'atome de germanium quadrivalent est remplacé dans le réseau cristallin par un atome à trois électrons de valence (bore, aluminium, indium), un électron manque pour réaliser des liaisons covalentes. L'électron déficitaire peut être emprunté à

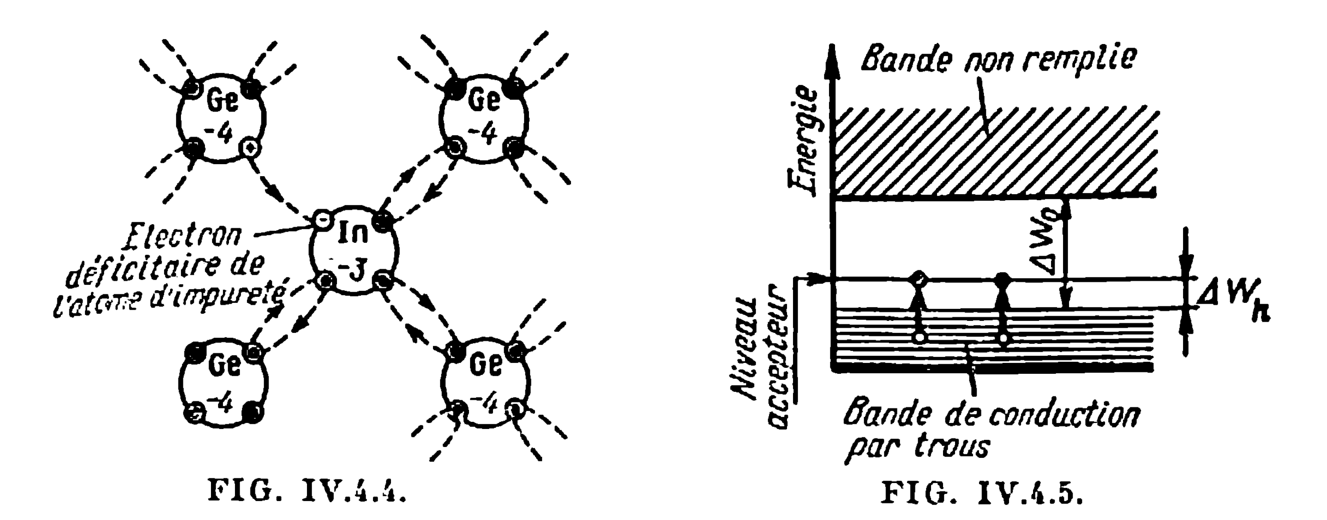


FIG. IV.4.4. FIG. IV.4.5.

l'atome de germanium voisin dans le réseau duquel (fig. IV.4.4) apparaîtra un trou positif. Le remplissage successif par les électrons des trous formés dans les atomes de germanium conduit à l'apparition de la conduction du semiconducteur. Les niveaux énergétiques d'impuretés libres sont dits *niveaux accepteurs*. Ils sont disposés un peu plus haut que le niveau supérieur de la bande de valence du cristal (fig. IV.4.5), à la distance ΔW_h de celui-ci. Par exemple, lors de l'introduction du bore dans le réseau du silicium, $\Delta W_h = 0{,}08$ eV. Les atomes d'impuretés de telle espèce sont appelés *atomes accepteurs*. Le passage des électrons de la bande de valence remplie du semiconducteur aux niveaux accepteurs fait apparaître une *conduction par impuretés par trous* (conduction type *p*). Dans ce cas les semiconducteurs sont appelés *semiconducteurs par trous* ou *semiconducteurs type p*.

5° Lors de l'introduction simultanée dans un semiconducteur de donneurs et d'accepteurs, le caractère de la conduction se définit par l'impureté ayant la concentration la plus élevée de porteurs de courant. Quelle que soit le type de conduction, le nombre de porteurs de courant dans les semiconducteurs est notablement plus petit que dans les métaux. La concentration et l'énergie des électrons et des trous dans les semiconducteurs, à la différence des métaux, dépendent intensément de la température, augmentant avec l'élévation de celle-ci.

3. L'effet Hall dans les métaux et semiconducteurs

1° On appelle *effet Hall* l'apparition d'un champ électrique transversal et d'une différence de potentiel dans un métal ou dans un semiconducteur parcourus par un courant électrique, lorsqu'on

les introduit dans un champ magnétique perpendiculaire à la direction du courant. Lors de l'introduction du métal ou du semiconducteur électronique dans un champ magnétique, les électrons animés d'une vitesse $\mathbf{v}$ dans le champ magnétique (fig. IV.4.6, *a*) sont déviés sous l'action de la force de Lorentz (p. 461). Les charges positives s'accumulent dans le sens opposé. Dans le semiconducteur type *p* (fig. IV.4.6, *b*) les signes des charges sont contraires sur les surfaces en regard.

2° Le champ électrique transversal s'oppose à la déviation des électrons sous l'action du champ magnétique. La différence de potentiel apparaissant lors de l'effet Hall est:

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = R\frac{BI}{d},$$

où B est l'induction du champ magnétique (p. 442), I l'intensité de courant, d la dimension linéaire de l'échantillon dans le sens du vecteur $\mathbf{B}$, R la *constante de Hall.*

Le champ électrique transversal est:

$$\mathbf{E}_B = R\mathbf{B} \times \mathbf{j},$$

où $\mathbf{j}$ est le vecteur densité de courant.

3° Pour les métaux et les semiconducteurs par impuretés ayant un seul type de conduction:

$$R = \frac{A}{nq} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$R = \frac{A}{cnq} \quad \text{(en u. du système de Gauss)},$$

où $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/s est la constante électrodynamique, q et n la charge et la concentration des porteurs de courant, A un coefficient numérique sans dimension de l'ordre de l'unité lié au caractère statistique de la distribution des vitesses des porteurs de courant. D'après le signe de la constante de Hall, on peut juger du type de conduction du semiconducteur ou du conducteur (dans le cas de conduction type n, $q = -e$ et $R < 0$, dans le cas de conduction type p, $q = e$ et $R > 0$), d'après sa valeur on peut déterminer la concentration des porteurs de courant.

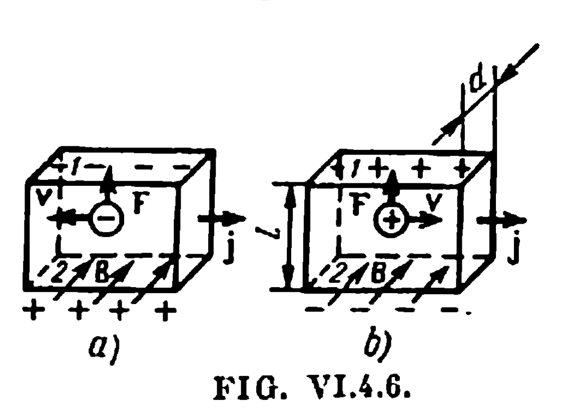


FIG. VI.4.6.

4° Pour les semiconducteurs à conduction mixte (types n et

p) la constante de Hall, dans le cas général, dépend non seulement des mobilités (p. 404) et des concentrations des deux types de porteurs de courant: électrons (u_e, n_e) et trous (u_h, n_h) mais aussi de la valeur de l'induction magnétique. Dans le cas de champs faibles, c'est-à-dire à condition que

$$B \ll \max\left\{\frac{1}{u_e}, \frac{1}{u_h}\right\} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$\frac{B}{C} \ll \max\left\{\frac{1}{u_e}, \frac{1}{u_h}\right\} \quad \text{(en u. du système de Gauss)},$$

la constante de Hall est égale à

$$R = \frac{A}{e}\,\frac{u_h^2 n_h - u_e^2 n_e}{(u_h n_h + u_e n_e)^2} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$R = \frac{A}{ce}\,\frac{u_h^2 n_h - u_e^2 n_e}{(u_h n_h + u_e n_e)^2} \quad \text{(en u. du système de Gauss)}.$$

Le signe de la constante de Hall permet de déterminer le type de conduction prédominante du semiconducteur.

CHAPITRE 5

Phénomènes thermoélectriques, de contact et d'émission

1. Phénomènes de contact dans les métaux. Lois de Volta

1° On appelle *travail d'extraction* (ou *travail de sortie)* A d'un électron du métal l'énergie minimale qu'il faut communiquer à un électron de conduction du métal pour qu'il puisse quitter le métal pour le vide. On le trouve de la relation suivante:

$$A = e(\varphi - \varphi') - \mu,$$

où φ et φ' sont les valeurs du potentiel électrique respectivement aux points à l'intérieur du métal et dans le vide au voisinage de la surface du métal, μ le potentiel chimique du gaz électronique dans le métal (p. 242). On appelle la grandeur $\mu - e\varphi$ *potentiel électrochimique* du gaz électronique dans le métal.

Le travail d'extraction dépend de la nature du métal et de l'état de sa surface. Pour les métaux purs, ce travail est de l'ordre de quelques électrons-volts.

2° En théorie électronique classique, le travail d'extraction est interprété comme le travail accompli par l'électron, lors de sa fuite du métal, contre les forces d'attraction des charges positives induites par l'électron sur la surface du métal et contre les forces du champ électrique de la *couche électrique double*. Son apparition à la surface du métal est liée au fait que les électrons de conduction peuvent, au cours de leur mouvement thermique, traverser cette surface en formant un «nuage électronique» au voisinage de celle-ci. La densité de ce «nuage» n'est pratiquement différente de zéro que dans les limites de quelques distances interatomiques ($\sim 10^{-8}$ cm seulement). Une telle couche ressemble à un condensateur chargé très mince, dont l'une des armatures

est la surface du métal avec les ions positifs, l'autre, le «nuage électronique». En dehors des limites de la couche double son champ électrique est nul.

3° On appelle la grandeur

$$\Delta\varphi = \varphi - \varphi' = \frac{A + \mu}{l}$$

potentiel de contact entre le métal et le vide. En théorie électronique classique, le potentiel de contact est:

$$\Delta\varphi_{cl} = \frac{A}{l}.$$

Cette valeur diffère de la vraie valeur indiquée ci-dessus et ne concorde avec celle-ci que qualitativement.

4° *Lois de Volta:*

a) lorsqu'on connecte deux conducteurs en métaux différents, il surgit entre ceux-ci un potentiel de contact dépendant uniquement de leur composition chimique et de leur température;

b) la différence de potentiel entre les extrémités du circuit constitué de conducteurs métalliques montés en série (tous à la même température) ne dépend pas de la composition chimique des conducteurs intermédiaires; elle est égale au potentiel de contact surgissant lors de la connexion immédiate des conducteurs extrêmes.

5° A l'état d'équilibre, les potentiels électrochimiques $\mu - e\varphi$ (p. 422) des deux métaux en contact doivent être égaux. C'est pourquoi, lorsqu'on met en contact deux métaux non chargés ($\varphi' = 0$) de différents travaux d'extraction A_1 et $A_2 < A_1$, les électrons passent du second métal dans le premier. Dans ce cas les deux métaux se chargent (le métal 1, négativement, le métal 2, positivement) et créent dans l'espace ambiant un champ électrique. Il s'opère en même temps le déplacement relatif des niveaux énergétiques des électrons dans les métaux en contact. Dans le métal 1 tous les niveaux se déplacent vers le haut, dans le métal 2, vers le bas. Pour établir l'équilibre, il est suffisant qu'un nombre tout à fait insignifiant d'électrons de conduction passent du métal 2 dans le métal 1. C'est pourquoi, lorsqu'on met les métaux en contact, les valeurs des potentiels chimiques μ_1 et μ_2 ne changent pas.

6° La condition d'équilibre pour le contact de deux métaux est de la forme:

$$e\varphi_1 - \mu_1 = e\varphi_2 - \mu_2,$$

où φ_1 et φ_2 sont les valeurs équilibrées des potentiels des métaux 1 et 2. On appelle la grandeur

$$\Delta\varphi_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\mu_1 - \mu_2}{e}$$

potentiel interne de contact. Il est conditionné par la différence des potentiels chimiques des électrons dans les métaux en contact. Conformément à l'expression du potentiel chimique (p. 242)

$$\Delta\varphi_{12} = \frac{1}{e}\left[(W_{F1} - W_{F2}) + \frac{\pi^2}{12}(kT)^2\left(\frac{1}{W_{F_2}} - \frac{1}{W_{F_1}}\right)\right],$$

où k est la constante de Boltzmann, tandis que W_{F1} et W_{F2} sont les valeurs de l'énergie de Fermi pour le premier et le second métal. La grandeur $\Delta\varphi_{12}$ dépend de la température T de contact des métaux et détermine l'apparition des phénomènes thermoélectriques (p. 433).

7° La variation du potentiel de φ_1 à φ_2 a lieu dans le domaine de la couche électrique double, qui se forme à la surface de contact et qu'on appelle *couche de contact.* L'épaisseur de cette couche est de l'ordre de $10^{-8} \div 10^{-7}$ cm. Son apparition lors du contact de deux métaux est liée au passage d'un nombre insignifiant d'électrons de conduction, présents dans la couche de contact, d'un métal qui se charge positivement dans un autre qui se charge négativement. Aussi la concentration des électrons dans la couche de contact est-elle pratiquement la même que dans le volume restant du métal, de sorte que la résistivité électrique de la couche de contact ne diffère pas de la résistivité du volume restant.

8° En théorie électronique classique des métaux, le potentiel interne de contact est considéré comme conséquence de la différence des concentrations n_0 des électrons de conduction dans les métaux en contact. A l'état d'équilibre la diffusion des électrons d'un métal avec une plus grande valeur de n_0 dans un métal avec une valeur moindre de n_0 est compensée par le flux d'électrons se mouvant dans le sens inverse sous l'action du champ électrique de la couche de contact. L'expression correspondante pour le potentiel interne de contact est de la forme:

$$\Delta\varphi_{12\mathrm{cl}} = \frac{kT}{e}\ln\frac{n_{01}}{n_{02}}.$$

Cette valeur diffère de la valeur exacte de $\Delta\varphi_{12}$ (6°). Elle ne peut être utilisée que pour l'étude qualitative de la dépendance entre le potentiel de contact et la température.

9° On appelle *potentiel externe de contact* la différence de potentiel entre deux points se trouvant au voisinage des surfaces

du premier (φ_1') et du second (φ_2') métal en contact, en dehors de ceux-ci. De la condition d'égalité des potentiels électrochimiques des électrons dans les métaux en contact suit que

$$\Delta\varphi_{12}' = \varphi_1' - \varphi_2' = -\frac{A_1 - A_2}{e},$$

où A_1 et A_2 sont les travaux d'extraction des électrons du premier et du second métal.

2. Phénomènes de contact dans les semiconducteurs

A. CONTACT D'UN MÉTAL ET D'UN SEMICONDUCTEUR

1° On appelle ***travail d'extraction A (travail thermodynamique d'extraction)*** d'un électron d'un semiconducteur l'énergie minimale qu'il faut dépenser pour expulser dans le vide l'électron dont l'énergie initiale dans le semiconducteur est égale au potentiel électrochimique. Généralement, le niveau d'énergie égal au potentiel électrochimique est appelé ***niveau de potentiel chimique*** ou *niveau de Fermi* du semiconducteur. Sa position par rapport au niveau le plus bas de la bande de conduction est déterminée, comme pour les métaux, par le potentiel chimique μ (d'ordinaire $\mu < 0$, autrement dit, le niveau de Fermi dans les semiconducteurs, à la différence des métaux, est disposé plus bas que le niveau inférieur de la bande de conduction; voir plus loin).

On appelle ***travail extérieur d'extraction*** A_{ext} d'un électron d'un semiconducteur le travail minimal qu'il faut dépenser pour éloigner dans le vide l'électron dont l'énergie initiale dans le semiconducteur correspond au niveau le plus bas de la bande de conduction. La relation entre A et A_{ext} est de la forme $A = A_{ext} - \mu$.

Le travail extérieur d'extraction est déterminé par les propriétés du réseau cristallin du semiconducteur et constitue de 1 à 6 eV selon les semiconducteurs.

2° Pour un semiconducteur intrinsèque (sans impuretés)

$$\mu = -\frac{\Delta W_0}{2} + \frac{kT}{2} \ln \frac{\nu_h}{\nu_e},$$

où ΔW_0 est l'énergie d'activation de conduction intrinsèque (p. 416), k la constante de Boltzmann,

$$\nu_e = \frac{2}{h^3} (2\pi m_e^* kT)^{3/2}, \quad \nu_h = \frac{2}{h^3} (2\pi m_h^* kT)^{3/2},$$

h est la constante de Planck, m^* et m_h^* les masses effectives (p. 764) de l'électron et du trou. A $T = 0$ °K, $\mu = -\Delta W_0/2$, autrement dit, le niveau de Fermi est disposé au milieu de la bande interdite.

La concentration des électrons dans la bande de conduction (n_e) et celle des trous dans la bande de valence (n_h) sont égales:

$$n_e = n_h = \sqrt{\nu_e \nu_h}\, e^{-\Delta W_0/2kT}.$$

3° Semiconducteur par impuretés type n.

a) Dans le domaine de basses températures satisfaisant à la condition

$$e^{\Delta W_e/kT} \gg \frac{\nu_e}{n_\text{d}},$$

où ΔW_e est l'énergie d'activation de la conduction par impuretés type n (fig. IV.4.3) et n_d la concentration des niveaux donneurs,

$$\mu = -\frac{\Delta W_e}{2} + \frac{kT}{2} \ln \frac{n_\text{d}}{\nu_e}.$$

A $T = 0$ °K, $\mu = -\Delta W_e/2$, autrement dit, le niveau de Fermi est disposé au milieu de l'intervalle entre les niveaux donneurs et le niveau le plus bas de la bande de conduction. Avec l'élévation de la température de 0 °K à T_0, μ croît et ensuite décroît. La température T_0 correspond à la condition

$$\nu_e(T_0) = n_\text{d}\, e^{-3/2},$$

$$T_0 = \frac{h^2 e}{2\pi m_e^* k} \left(\frac{n_\text{d}}{2}\right)^{2/3}$$

et

$$\mu_{max} = \mu(T_0) = -\frac{\Delta W_e}{2} + \frac{3h^2 e}{8\pi m_e^*} \left(\frac{n_\text{d}}{2}\right)^{2/3},$$

où e est la base des logarithmes naturels.

La concentration des électrons dans la bande de conduction $n_e \ll n_\text{d}$ est:

$$n_e = \sqrt{n_\text{d} \nu_e}\, e^{-\Delta W_e/2kT}.$$

b) Dans le domaine de températures auxquelles tous les niveaux donneurs sont vides $\left(\frac{\nu_e}{n_\text{d}} \gg e^{\Delta W_e/kT}\right)$ tandis qu'on peut négliger la conduction intrinsèque du semiconducteur, la concentration des

électrons dans la bande de conduction ne dépend pas de la température:

$$n_e = n_d \quad \text{et} \quad \mu = kT \ln \frac{n_d}{\nu_e}.$$

La température de saturation, à laquelle n_e est égale à n_d, peut être trouvée de la relation

$$T_{sat} = \frac{\Delta W_e}{k \ln \frac{\nu_e(T_{sat})}{n_d}}.$$

Lorsque $T = T_{sat}$,

$$\mu = -\Delta W_e.$$

c) Dans le domaine de températures encore plus élevées, la concentration des électrons dans la bande de conduction commence à nouveau de croître au compte du transfert des électrons de la bande de valence. Dans le cas où $n_e \gg n_d$, le potentiel chimique du semiconducteur électronique approche de la valeur

$$\mu = -\frac{\Delta W_0}{2} + \frac{kT}{2} \ln \frac{\nu_h}{\nu_e},$$

correspondant à la conduction intrinsèque (cf. 2°). Ainsi, la température de passage à la conduction intrinsèque est égale à

$$T_{intr} = \frac{\Delta W_0}{k \ln \frac{\nu_e \nu_h}{n_d^2}}.$$

4° Semiconducteur par impuretés type p.

a) Dans le domaine de basses températures satisfaisant à la condition

$$e^{\Delta W_h / kT} \gg \frac{\nu_h}{n_a},$$

où ΔW_h est l'énergie d'activation de la conduction par impuretés type p (fig. IV.4.5) et n_a la concentration des niveaux accepteurs,

$$\mu = -\Delta W_0 + \frac{\Delta W_h}{2} - \frac{kT}{2} \ln \frac{n_a}{\nu_h}.$$

A $T = 0\,°\mathrm{K}$, $\mu = -\Delta W_0 + \frac{\Delta W_h}{2}$, autrement dit, le niveau de Fermi est disposé au milieu de l'intervalle entre le niveau supérieur

de la bande de valence et les niveaux accepteurs. Avec l'élévation de la température de 0 °K à T_0, μ décroît et ensuite croît quand $T > T_0$. La température T_0 et μ_{min} sont égales:

$$T_0 = \frac{h^2 e}{2\pi m_h^* k}\left(\frac{n_a}{2}\right)^{2/3},$$

$$\mu_{min} = \mu(T_0) = -\Delta W_0 + \frac{\Delta W_h}{2} - \frac{3h^2 e}{8\pi m_h^*}\left(\frac{n_a}{2}\right)^{2/3},$$

où e est la base des logarithmes naturels.

La concentration des trous dans la bande de valence $n_h \ll n_a$ est:

$$n_h = \sqrt{n_a \nu_h}\, e^{-\Delta W_h/2kT}.$$

b) Dans le domaine de températures auxquelles tous les niveaux accepteurs sont occupés par les électrons $\left(\frac{\nu_h}{n_a} \gg e^{\Delta W_h/kT}\right)$ tandis qu'on peut négliger la conduction intrinsèque du semiconducteur, la concentration des trous dans la bande de valence ne dépend pas de la température:

$$n_h = n_a \quad \text{et} \quad \mu = -\Delta W_0 + kT \ln \frac{\nu_h}{n_a}.$$

La température de passage à la conduction intrinsèque est égale à

$$T_{intr} = \frac{\Delta W_0}{k \ln \frac{\nu_e \nu_h}{n_a^2}}.$$

5° Lorsqu'on met le métal en contact avec le semiconducteur, il se produit, comme lors de la mise en contact de deux métaux, l'égalisation des potentiels électrochimiques des électrons dans le métal et le semiconducteur, c'est-à-dire l'«égalisation des niveaux de Fermi» réalisée par fuite des électrons d'un corps ayant un travail d'extraction moindre dans un corps ayant un plus grand travail d'extraction. Il apparaît alors entre le métal et le semiconducteur un potentiel de contact conditionné par la *couche de contact* (p. 424). Par suite d'une faible concentration des porteurs de courant dans le semiconducteur (de l'ordre de $10^{14} \div$

$\div 10^{16}$ cm^{-3} devant 10^{22} cm^{-3} dans les métaux), l'épaisseur de la couche de contact dans le semiconducteur atteint $10^{-5} \div 10^{-4}$ cm, autrement dit, elle est de quelques ordres supérieure à celle de la couche de contact dans les métaux. C'est à l'intérieur de cette couche dans le semiconducteur qu'est répartie la charge volumique et qu'il existe un champ électrique de contact. Le signe de la charge volumique dépend de la relation entre les travaux d'extraction de l'électron du métal (A_1) et du semiconducteur (A_2): la charge volumique est positive lorsque $A_1 > A_2$, et négative lorsque $A_1 < A_2$.

6° Du fait de l'existence du champ électrique de la couche de contact, le potentiel aux points de cette couche du semiconducteur est plus bas que dans le volume restant lorsque $A_1 > A_2$, et plus élevé quand $A_1 < A_2$. Voilà pourquoi, toutes les autres conditions étant égales, l'énergie des électrons dans la couche de contact du semiconducteur est plus élevée que dans le volume restant lorsque $A_1 > A_2$. Le potentiel électrochimique étant le même dans toutes les parties du semiconducteur, le niveau inférieur de la bande de conduction dans la couche de contact s'élève s'éloignant du niveau de Fermi. Le niveau supérieur de la bande de valence s'élève également se rapprochant du niveau de Fermi. La largeur de la bande interdite ΔW_0 entre le niveau supérieur de la bande de valence et le niveau inférieur de la bande de conduction est alors la même que dans le volume restant.

Le vecteur champ électrique de contact inverse son sens lorsque $A_1 < A_2$, de sorte que le potentiel aux points de la couche de contact du semiconducteur est plus élevé que dans le volume restant. C'est pourquoi dans la couche de contact le niveau inférieur de la bande de conduction s'abaisse se rapprochant du niveau de Fermi. Le niveau supérieur de la bande de valence s'abaisse également s'éloignant du niveau de Fermi.

7° Sont possibles les quatre cas suivants de contact d'un métal avec des semiconducteurs par impuretés (fig. IV.5.1).

a) $A_1 > A_2$, semiconducteur type *n*.

La charge volumique positive est conditionnée par l'excès d'ions positifs des donneurs dans la couche de contact. La couche de contact du semiconducteur s'appauvrit en porteurs de courant majoritaires, c'est-à-dire en électrons de la bande de conduction. Aussi la résistivité de la couche de contact est-elle beaucoup plus grande que la résistivité du volume restant. Une telle couche de contact est appelée *couche d'arrêt*.

b) $A_1 > A_2$, semiconducteur type *p*.

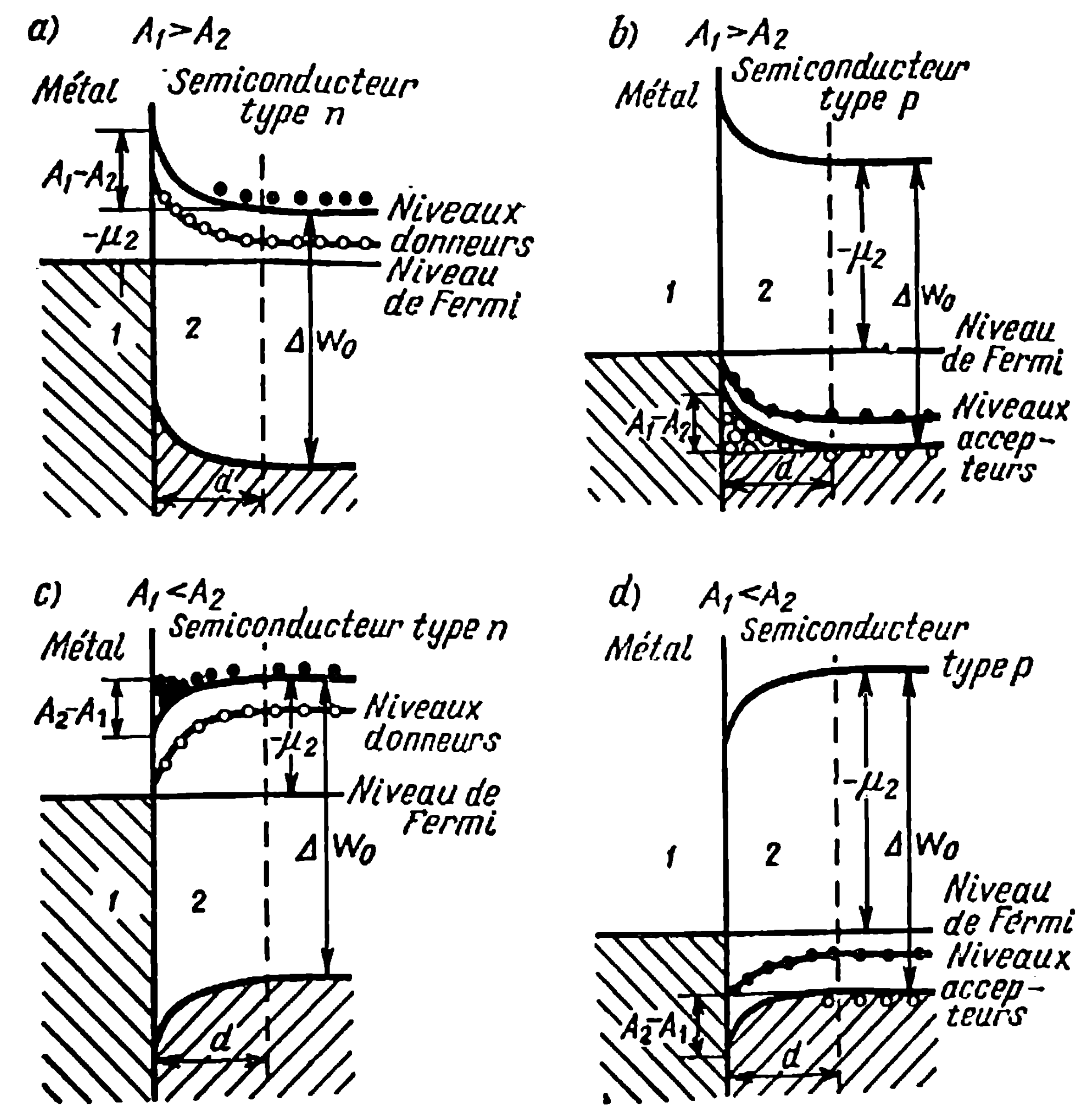


FIG. IV.5.1. ● les électrons dans la bande de conduction et les ions négatifs des accepteurs; ○ — les trous dans la bande de valence et les ions positifs des donneurs; *d* — épaisseur de la couche de contact

Dans la couche de contact du semiconducteur il y a excès de porteurs de courant majoritaires, c'est-à-dire de trous dans la bande de valence. Ceci explique la conduction élevée de la couche de contact. Une telle couche de contact est appelée *couche d'arrêt inverse.*

c) $A_1 < A_2$, semiconducteur type *n*.

La charge volumique négative de la couche de contact du semiconducteur est conditionnée par l'excès de porteurs de courant majoritaires, c'est-à-dire d'électrons de la bande de conduction. Ceci explique la conduction élevée de la couche de contact, celle-ci représente une couche d'arrêt inverse.

d) $A_1 < A_2$, semiconducteur type *p*.

Il y a excès d'ions négatifs des accepteurs dans la couche de contact du semiconducteur et manque de porteurs de courant majoritaires, c'est-à-dire de trous de la bande de valence. Aussi la couche de contact est-elle une couche d'arrêt.

8° La couche d'arrêt entre le métal et le semiconducteur possède une *conduction unidirectionnelle*, c'est-à-dire que pratiquement elle ne laisse passer le courant que dans un sens (du métal au semiconducteur ou bien du semiconducteur au métal) lors de la connexion du métal et du semiconducteur dans un circuit électrique. La couche d'arrêt n'est rien d'autre qu'une soupape vu que les valeurs de sa résistance pour les deux sens contraires du courant à travers la surface de contact diffèrent intensément l'une de l'autre.

Lorsque le sens du champ extérieur et du courant qu'il engendre est contraire au sens du champ électrique de contact, les porteurs de courant majoritaires sont attirés du volume restant du semiconducteur dans la couche de contact. Dans ce cas l'épaisseur de la couche de contact, appauvrie en porteurs de courant majoritaires, et sa résistance électrique diminuent. Dans un tel sens, appelé *conducteur* ou *direct*, le courant électrique peut passer à travers le contact établi entre le métal et le semiconducteur. L'inversion du champ extérieur évince les porteurs de courant majoritaires de la couche de contact vers le fond du semiconducteur, de sorte que l'épaisseur et la résistance électrique de la couche de contact s'accroissent notablement. Par conséquent, dans le sens contraire au sens conducteur, le courant électrique ne peut pratiquement pas passer à travers la couche d'arrêt. Un tel sens est appelé *sens d'arrêt* ou *sens inverse*.

Le sens conducteur pour la couche d'arrêt entre un métal et un semiconducteur type *p* ($A_1 < A_2$) est le sens du courant du semiconducteur au métal, alors que le sens conducteur pour la couche d'arrêt entre un métal et un semiconducteur type *n* ($A_1 > A_2$) est le sens du courant du métal au semiconducteur.

B. CONTACT DE DEUX SEMICONDUCTEURS

1° On appelle *jonction électron-trou* (jonction *n-p*) le contact de deux semiconducteurs avec différents types de conduction *n* et *p* (p. 418 et 419). Habituellement, cette jonction est réalisée dans un même cristal du semiconducteur, où on crée par introduction d'impuretés correspondantes (dopage) des régions de différente conduction (*n* et *p*).

2° Une couche électrique double (p. 422) de jonction *p-n* se forme par passage des électrons du semiconducteur *n* dans le semi-

conducteur p (puisque $A_p > A_n$, où A_p et A_n sont les travaux d'extraction de l'électron des semiconducteurs type p et n) et par passage des trous dans le sens contraire. Dans ce cas il y a un excès d'ions positifs des donneurs dans la couche de contact du type n et un excès d'ions négatifs des accepteurs dans la couche de contact du type p. Donc, dans les deux semiconducteurs, la couche de contact est appauvrie en porteurs majoritaires et possède une conduction affaiblie, c'est-à-dire représente une couche d'arrêt. L'épaisseur d de la jonction p-n dans les cas d'importance pratique constitue $10^{-4} \div 10^{-5}$ cm.

3° Lorsqu'on applique à la couche de contact une tension extérieure de telle façon que le semiconducteur n est relié au pôle positif de la source de f.é.m. (fig. IV.5.2), le champ électrique extérieur intensifie le champ de la couche de contact et provoque le mouvement des électrons dans le semiconducteur n et des trous dans le semiconducteur p dans des sens opposés de part et d'autre de la jonction p-n. Ceci conduit à l'élargissement de la couche d'arrêt et à l'accroissement de sa résistance. On appelle *sens inverse* ou *sens d'arrêt* le sens du champ extérieur élargissant la couche d'arrêt. Dans ce sens le courant électrique ne passe pratiquement pas à travers le contact de deux semiconducteurs.

4° Dans le *sens conducteur* ou *direct* (fig. IV.5.3) le champ électrique extérieur est dirigé contrairement au champ de la couche de contact. Les électrons et les trous positifs se déplacent sous l'action du champ vers la jonction p-n à la rencontre les uns des autres, l'épaisseur de la couche de contact et sa résistance diminuent. Par conséquent, dans cette direction le courant électrique peut passer à travers le contact de deux semiconducteurs.

5° L'action de la jonction p-n, possédant une conduction unidirectionnelle, est analogue à l'effet redresseur d'une lampe à deux électrodes, *diode* (p. 512). Aussi appelle-t-on le semiconducteur à une jonction p-n *diode à semiconducteurs*.

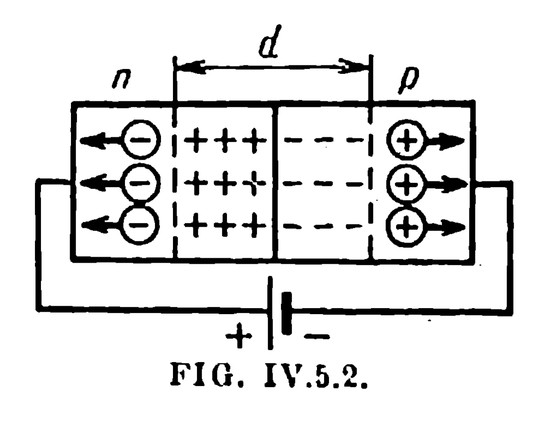


FIG. IV.5.2.

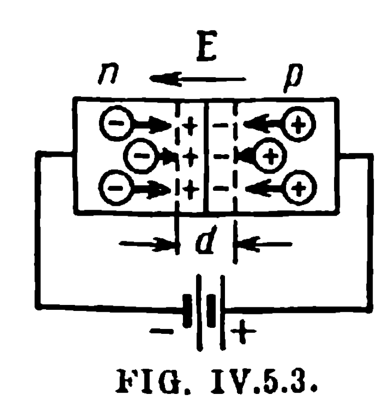


FIG. IV.5.3.

3. Phénomènes thermoélectriques dans les métaux et les semiconducteurs

1° Dans les métaux et les semiconducteurs les processus de transfert de charge (courant électrique) et d'énergie sont liés réciproquement, étant donné qu'ils sont réalisés par déplacement des porteurs de courant majoritaires, c'est-à-dire par les électrons de conduction et les trous. Ce lien réciproque conditionne toute une série d'effets (Seebeck, Peltier et Thomson) appelés *phénomènes* ou *effets thermoélectriques*.

Les expressions de la densité de courant constant $\mathbf{j}$ et de la densité de flux d'énergie $\mathbf{u}$ dans un métal ou un semiconducteur isotrope, en l'absence de champ magnétique extérieur, sont de la forme:

$$\frac{1}{\gamma}\mathbf{j} = -\alpha \operatorname{grad} T - \operatorname{grad}\left(\varphi - \frac{\mu}{e}\right),$$

$$\mathbf{u} = -K \operatorname{grad} T + \Pi\mathbf{j} + \left(\varphi - \frac{\mu}{e}\right)\mathbf{j}.$$

Ici μ est le potentiel chimique des électrons, φ le potentiel électrique, e la valeur absolue de la charge de l'électron, $(\mu - e\varphi)$ le potentiel électrochimique, K le coefficient le conductibilité thermique et γ la conductivité électrique. Les coefficients α et Π sont appelés respectivement *force thermoélectrique spécifique* et *coefficient d'effet Peltier*. Ils dépendent du matériau constituant le conducteur ou le semiconducteur, ainsi que de la température. Π et α sont liés entre eux par la relation découlant des principes de la thermodynamique et appelée *deuxième équation de Thomson*

$$\Pi = \alpha T.$$

2° On appelle *effet Seebeck* l'apparition d'une force électromotrice $\mathscr{E}_T$ dans un circuit fermé constitué de deux conducteurs (ou semiconducteurs) hétérogènes montés en série lorsqu'on maintient à différentes températures leurs points de contact (soudures). La grandeur $\mathscr{E}_T$ est appelée *force thermoélectrique* (f.é.m. de température). $\left(\varphi - \frac{\mu}{e}\right)$ étant une fonction continue des coordonnées, on a:

$$\mathscr{E}_T = -\oint_L \alpha\,(\operatorname{grad} T, d\mathbf{l}) = -\oint_L \alpha\, dT,$$

où l'intégration est étendue à tout le circuit fermé L.

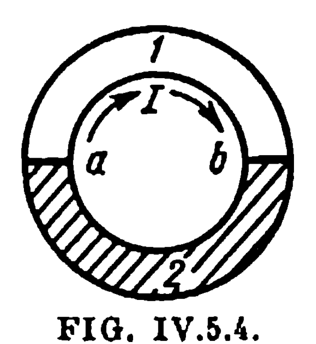


FIG. IV.5.4.

On appelle *couple thermoélectrique (thermocouple)* le circuit électrique fermé (fig. IV.5.4) constitué de deux conducteurs (ou semiconducteurs hétérogènes *1* et *2*). Si T_a et T_b sont les températures auxquelles se trouvent les soudures *a* et *b* du couple thérmoélectrique et si le parcours du circuit s'effectue dans le sens des aiguilles d'une montre (fig. IV.5.4), la f.é.m. de température est alors:

$$\mathcal{E}_T = -\int_{T_a}^{T_b} \alpha_1\, dT - \int_{T_b}^{T_a} \alpha_2\, dT = \int_{T_a}^{T_b} \alpha_{12}\, dT,$$

où α_1 et α_2 sont les valeurs de α pour les différents matériaux des branches *1* et *2* du couple thermoélectrique et $\alpha_{12} = \alpha_2 - \alpha_1$ la *force thermoélectrique spécifique différentielle* pour un couple de matériaux donné

$$\alpha_{12} = \frac{d\mathcal{E}_T}{dT}.$$

Si l'intervalle de températures $T_b - T_a$ n'est pas grand, on peut admettre dans ses limites que α_{12} est une grandeur constante et

$$\mathcal{E}_T = \alpha_{12}(T_b - T_a).$$

Quand $T_b > T_a$, $\mathcal{E}_T > 0$ si $\alpha_{12} = \alpha_2 - \alpha_1 > 0$ et $\mathcal{E}_T < 0$ si $\alpha_{12} < 0$. Dans le premier cas, le courant thermique passe dans le sens indiqué fig. IV.5.4 (dans le sens des aiguilles d'une montre), dans le second cas il passe dans le sens contraire. Donc, dans la soudure chaude du couple thermoélectrique le courant thermique passe toujours de la branche avec une valeur moindre de α dans la branche avec une plus grande valeur de α.

Lorsqu'on insère dans la rupture de l'une des branches du couple thermoélectrique un nombre arbitraire de conducteurs d'une autre composition montés en série, dont toutes les soudures sont maintenues à la température constante, la f.é.m. de température dans un tel circuit est égale à celle du couple thermoélectrique initial.

3° L'effet Seebeck est dû aux trois causes suivantes:

a) la diffusion prépondérante des porteurs de courant dans le conducteur ou le semiconducteur de l'extrémité chaude vers l'extrémité froide *(composante volumique de la force thermoélectrique)*;

b) variation du potentiel de contact avec la température, liée à la dépendance du potentiel chimique μ de la température *(composante de contact de la force thermoélectrique)*;

c) l'entraînement des électrons par les phonons (p. 286), qui se déplacent surtout de l'extrémité chaude du conducteur vers son extrémité froide et, interagissant avec les électrons, provoquent leur déplacement prépondérant dans le même sens *(composante phononienne de la force thermoélectrique)*; cette composante peut jouer un rôle prééminent aux basses températures.

La force thermoélectrique spécifique α est égale à la somme de trois composantes:

$$\alpha = \alpha_v + \alpha_c + \alpha_{ph},$$

où

$$\alpha_c = -\frac{1}{e}\frac{d\mu}{dT}.$$

Le gaz électronique dans les métaux est en état de dégénérescense intense (p. 240). La concentration des électrons de conduction est très grande et ne dépend pas de la température, et leur distribution suivant les énergies et les vitesses d'agitation thermique varie de façon insignifiante lors de l'échauffement. C'est pourquoi les valeurs de la force thermoélectrique des métaux sont très faibles (de l'ordre de quelques μV/degré). Pratiquement on utilise l'effet Seebeck dans les métaux pour mesurer la température.

Dans les semiconducteurs la concentration des porteurs de courant (électrons de conduction et trous) est notablement plus faible que dans les métaux. Généralement, elle est tellement insignifiante que les porteurs de courant obéissent à la statistique classique de Boltzmann (semiconducteur non dégénéré), autrement dit, l'énergie moyenne de leur agitation thermique est égale à $\frac{3}{2}kT$, où k est la constante de Boltzmann. Avec l'élévation de la température du semiconducteur augmente la concentration des porteurs de courant (parfois elle reste constante, p. 426) et, ce qui est particulièrement important, la vitesse de leur agitation thermique. C'est pourquoi les valeurs de la force thermoélectrique spécifique des semiconducteurs non dégénérés ayant un seul type de porteurs de courant sont très supérieures à celles des métaux (de l'ordre de $10^2 \div 10^3$ μV/degré). Les coefficients α des semiconducteurs électroniques et à trous sont de signes contraires. Aussi les plus grandes valeurs de la force thermoélectrique différentielle spécifique α_{12} sont-elles obtenues pour les couples constitués de semiconducteurs électroniques et à trous.

Les couples thermoélectriques à semiconducteurs sont utilisés pour la transformation directe de l'énergie interne en énergie électrique. Le rendement des générateurs thermoélectriques à semiconducteurs modernes atteint 15%.

4° On appelle *effet Peltier* le dégagement ou l'absorption (selon le sens du courant) de chaleur excédentaire à la chaleur de Joule et appelée *chaleur de Peltier*, qui a lieu dans la soudure de conducteurs ou semiconducteurs hétérogènes lors du passage d'un courant électrique continu à travers cette soudure.

Sur la surface de contact de deux conducteurs *1* et *2* sont continues les grandeurs suivantes: le potentiel électrochimique $(\mu - e\varphi)$, la température T et les composantes normales de la densité de flux d'énergie **u** et de la densité de courant **j**. Il suit alors de l'expression pour **u** (1°) que lors du passage du courant continu I du premier conducteur dans le second est dégagée (ou absorbée) sur la surface de contact, au cours de l'intervalle de temps t, la chaleur de Peltier

$$Q_{\text{P}} = \Pi_{12} It = \Pi_{12} q,$$

où

$$\Pi_{12} = \Pi_1 - \Pi_2 = -\alpha_{12} T \quad \text{et} \quad q = It.$$

A la différence de la chaleur de Joule, proportionnelle au carré de l'intensité de courant et se dégageant toujours dans le conducteur, la chaleur de Peltier est proportionnelle à l'intensité de courant à la puissance 1 et son signe dépend du sens du courant dans la soudure. Si le courant passe du conducteur avec une plus grande valeur du coefficient d'effet Peltier dans le conducteur avec une plus petite valeur du coefficient d'effet Peltier ($\Pi_1 > \Pi_2$ et $\Pi_{12} > 0$), on a $Q_{\text{P}} > 0$, autrement dit, il y a dégagement de chaleur de Peltier dans la soudure. Lorsque le courant passe dans le sens contraire à travers la soudure, $Q_{\text{P}} < 0$, autrement dit, il y a absorption de chaleur de Peltier dans la soudure.

5° L'effet Peltier s'explique par le fait que dans des conducteurs ou semiconducteurs hétérogènes en contact, les valeurs $\bar{w}_1$ et $\bar{w}_2$ de l'énergie moyenne des porteurs de courant mobiles ne sont pas égales l'une à l'autre. Soit, par exemple, $\bar{w}_1 > \bar{w}_2$ et supposons que le sens du courant est tel que les porteurs de courant passent à travers la surface de contact du premier conducteur dans le second. Dans ce dernier ces porteurs ont une énergie dépassant celle qui correspond à l'équilibre thermodynamique entre eux et les nœuds du réseau cristallin. Les porteurs de courant s'entrechoquant avec les nœuds du réseau cristallin du second conducteur cèdent alors à ceux-ci leur excès d'énergie, provoquant l'échauffement du con-

ducteur. Ce processus s'opère dans une couche très mince du second conducteur, attenante à la surface de contact, autrement dit, il se manifeste dans l'échauffement de la soudure. Si, dans les mêmes conditions, le courant dans la soudure a un sens contraire, les porteurs de courant passent du second conducteur dans le premier avec une énergie inférieure à l'énergie d'équilibre dans le premier conducteur. S'entrechoquant avec les nœuds du réseau cristallin du premier conducteur, les porteurs de courant obtiennent l'énergie qui leur manque pour atteindre l'énergie d'équilibre. Dans ce cas, la soudure doit se refroidir.

L'effet Peltier est l'inverse de l'effet Seebeck. Lors du passage du courant thermique dans le circuit du couple thermoélectrique, la chaleur de Peltier est absorbée par la soudure chaude, alors qu'elle est dégagée par la soudure froide. C'est pourquoi, en plein accord avec le deuxième principe de la thermodynamique, on doit, pour maintenir un courant thermique continu, amener sans arrêt de la chaleur du dehors à la soudure chaude du couple thermoélectrique et en enlever sans arrêt à la soudure froide. On utilise l'effet Peltier dans les semiconducteurs pour créer des appareils frigorifiques suffisamment économiques et productifs.

6° On appelle *effet Thomson* le dégagement (ou l'absorption) de chaleur excédentaire à la chaleur de Joule, lors du passage d'un courant continu à travers un conducteur ou semiconducteur homogène chauffé non uniformément. Il vient des expressions de la densité de flux d'énergie $\mathbf{u}$ et de la densité de courant $\mathbf{j}$ (1°) que dans une unité de volume se dégage par seconde la quantité de chaleur

$$w = -\operatorname{div} \mathbf{u} = \operatorname{div} (K \operatorname{grad} T) + \frac{1}{\gamma} j^2 + \tau(\mathbf{j}, \operatorname{grad} T),$$

où τ est le *coefficient d'effet Thomson* lié à la force thermoélectrique α du conducteur et au coefficient d'effet Peltier Π par la *première équation de Thomson:*

$$\tau = -\left(\frac{d\Pi}{dT} - \alpha\right) = -T\frac{d\alpha}{dT}.$$

Dans une unité de volume du conducteur se dégage par seconde la *chaleur de Thomson*

$$w_T = \tau(\mathbf{j}, \operatorname{grad} T).$$

Le signe de w_T dépend du sens du courant: si $\tau > 0$, on a $w_T > 0$ si le courant dans le conducteur passe de son extrémité froide à son extrémité chaude, et $w_T < 0$ si le courant passe dans le sens inverse.

Dans le tronçon de conducteur de longueur dl au cours de l'intervalle de temps t se dégage la chaleur de Thomson

$$dQ_T = \tau It\left(\frac{dT}{dl}\right)dl = \tau q\left(\frac{dT}{dl}\right)dl,$$

où $q = It$ est la charge passant au cours du temps t à travers la section transversale du conducteur, et la dérivée $\frac{dT}{dl} > 0$ si le courant passe dans le sens de l'élévation de température du conducteur.

L'effet Thomson s'explique par le fait que dans la partie plus chaude du conducteur l'énergie moyenne des porteurs de courant est plus grande que dans la partie moins chaude. Lorsque les porteurs de courant se déplacent dans le sens de la diminution de température, ils cèdent leur excès d'énergie au réseau cristallin du conducteur, autrement dit, il y a dégagement de chaleur de Thomson: $dQ_T > 0$. Lorsque les porteurs de courant se meuvent dans le sens contraire, ils complètent leur énergie au compte de l'énergie du réseau cristallin, autrement dit, il y a absorption de chaleur de Thomson: $dQ_T < 0$. Donc, pour les conducteurs et les semiconducteurs possédant une conduction électronique le coefficient d'effet Thomson $\tau > 0$, alors que pour les conducteurs et semiconducteurs possédant une conduction par trous $\tau < 0$.

4. Phénomènes d'émission dans les métaux

1° On appelle *émission thermoélectrique* l'émission d'électrons par les corps solides et liquides, qui a lieu par réchauffement de ces corps. Les électrons émis par le corps réchauffé sont appelés *électrons thermiques* et le corps lui-même *émetteur*.

Pour qu'un électron puisse quitter le métal, il doit posséder une énergie suffisante pour franchir la barrière de potentiel à la frontière métal-vide, autrement dit, pour effectuer le travail d'extraction (p. 422).

Aux températures ordinaires le nombre de tels électrons dans le métal est insignifiant et l'émission thermoélectrique fait pratiquement défaut. Elle devient sensible à des températures notablement plus élevées, correspondant à l'émission lumineuse visible d'un métal incandescent.

2° Le phénomène d'émission thermoélectrique est utilisé dans les tubes électroniques à cathode incandescente.

Le courant thermoélectrique dans un tube à deux électrodes (diode) à vide, dont la cathode incandescente émet des électrons

thermiques, dépend de la tension U_A appliquée entre l'anode et la cathode (*tension anodique* de la diode), de la forme, des dimensions et de la disposition réciproque des électrodes, du travail d'extraction des électrons de la cathode et de sa température. Toutes les autres conditions étant égales, la dépendance du courant I_A vis-à-vis de U_A est de la forme représentée fig. IV.5.5. Cette dépendance n'est pas linéaire, autrement dit, le courant n'obéit pas à la loi d'Ohm.

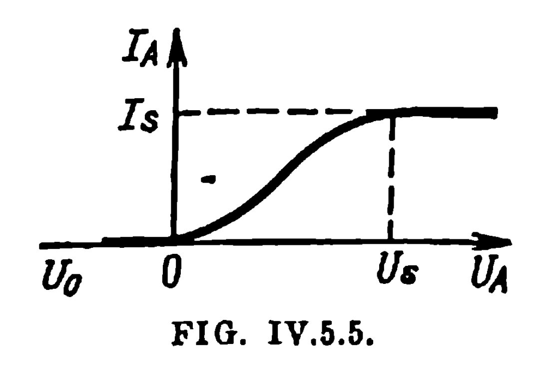


FIG. IV.5.5.

Le courant faible, existant dans le circuit de la diode pour des tensions anodiques négatives ($U_0 < U_A < 0$), est dû à ce que certains électrons, émis par la cathode, ont une énergie cinétique initiale suffisante pour franchir le champ électrique retardateur existant entre l'anode et la cathode. Habituellement, ce courant est très petit, même lorsque $U_A = 0$, c'est-à-dire on peut négliger l'énergie cinétique initiale des électrons thermiques. Dans ce cas, pour des valeurs positives pas très grandes de la tension anodique, la valeur du courant d'émission thermique limitée par la charge volumique négative satisfait à la *loi de Bogouslavski-Langmuir* (la *loi de la puissance* $\frac{3}{2}$): l'intensité de courant est proportionnelle à la tension anodique prise à la puissance $\frac{3}{2}$.

Ainsi, pour des électrodes planes infinies distantes de d, la densité de courant est:

$$j = BU_A^{3/2},$$

où

$$B = \frac{4\sqrt{2}}{9}\frac{\varepsilon_0}{d^2}\sqrt{\frac{e}{m}} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$B = \frac{\sqrt{2}}{9\pi}\frac{1}{d^2}\sqrt{\frac{e}{m}} \quad \text{(en u.é.s. CGS)},$$

e et m sont les valeurs absolues de la charge et de la masse de l'électron, ε_0 la constante électrique.

Pour des électrodes en forme de cylindres coaxiaux infinis, dont celui à l'intérieur est la cathode, le courant émis par une unité de longueur de la cathode est:

$$j = BU_A^{3/2},$$

où

$$B = \frac{8\pi\sqrt{2}}{9} \frac{\varepsilon_0}{r_A \beta^2} \sqrt{\frac{e}{m}} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$B = \frac{2\sqrt{2}}{9} \frac{1}{r_A \beta^2} \sqrt{\frac{e}{m}} \quad \text{(en u.é.s. CGS)},$$

r_A est le rayon de l'anode, β^2 une fonction du rapport des rayons de l'anode et de la cathode r_C. Lorsque r_A/r_C varie de 1 à 41,25, β^2 croît de 0 à 1,095, et lorsque $r_A/r_C > 41,25$ elle décroît tendant vers 1 quand $r_A/r_C \to \infty$.

3° Le courant thermoélectrique maximal, possible à une température donnée de la cathode, est appelé *courant de saturation*. Dans ce cas, tous les électrons quittant la cathode atteignent l'anode. Le courant de saturation s'accroît avec l'élévation de la température de la cathode. La densité de courant de saturation j_s se calcule d'après la *formule de Richardson-Dushman*

$$j_s = \bar{D}CT^2 e^{-\frac{A}{kT}},$$

où $\bar{D}$ est la transparence moyenne de la barrière de potentiel à la frontière métal-vide pour les ondes électroniques (p. 760), $C = \frac{4\pi mek^2}{h^3} = 1,2 \cdot 10^6$ A/m² · degré² est la constante d'émission, k la constante de Boltzmann, h la constante de Planck et A le travail d'extraction de l'électron du métal.

4° On appelle *émission froide* l'extraction des électrons du métal par un champ électrique extérieur. Ce phénomène peut avoir lieu à la température ordinaire. La température du métal au cours de l'émission froide ne varie pratiquement pas. L'émission froide s'explique par l'effet tunnel (p. 761), qui consiste en passage des électrons de n'importe quelle vitesse à travers la barrière de potentiel à la surface du métal. La probabilité de passage des électrons à travers la barrière de potentiel et, par conséquent,

la densité de courant j d'émission froide dépendent du champ électrique extérieur E

$$j \sim e^{-E_0/E},$$

où

$$E_0 = \frac{8\pi}{3he} \sqrt{2mA^3}.$$

5° Le *phénomène d'émission photoélectrique* consiste en arrachage des électrons de la surface des corps (principalement des métaux) introduits dans le vide ou dans un gaz sous l'action de la lumière (cf. p. 725).

6° Lorsqu'on bombarde la surface du métal dans le vide avec des électrons, on constate un flux contraire d'électrons à partir de la surface. Ce phénomène est appelé *émission secondaire.* Outre la réflexion des électrons par la surface du métal, a lieu leur extraction du métal. L'émission maximale d'électrons secondaires est observée pour des énergies des électrons incidents, atteignant quelques centaines d'électrons-volts. L'émission secondaire est caractérisée par le *coefficient d'émission secondaire* δ, égal au quotient de la somme du nombre d'électrons réfléchis et émis par le nombre d'électrons incidents. La figure IV.5.6 montre la forme typique de la dépendance de δ de l'énergie des électrons incidents W. Pour la plupart des métaux dégazés, lors de l'incidence normale des électrons sur la surface, δ_{max} ne dépasse pas 2. En présence d'un gaz adsorbé δ croît jusqu'à 3. L'émission secondaire est utilisée dans les multiplicateurs électroniques servant à l'amplification multiple des courants électroniques faibles.

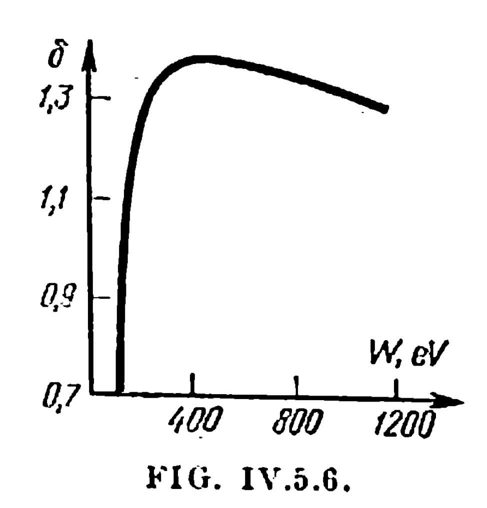


FIG. IV.5.6.

CHAPITRE 6

Champ magnétique du courant continu

1. Champ magnétique. Loi d'Ampère

1° On appelle *champ magnétique* l'une des formes de manifestation du champ électromagnétique. La particularité de ce champ est qu'il n'agit que sur les particules et corps chargés électriquement en mouvement, ainsi que sur les corps aimantés (p. 489) indépendamment de leur état de mouvement.

Le champ magnétique est créé par les conducteurs parcourus par un courant, par les particules et corps chargés électriquement en mouvement, par les corps aimantés, ainsi que par tout champ électrique variable (par les courants de déplacement, p. 521).

2° Le *vecteur induction magnétique* **B** est la caractéristique de force d'un champ magnétique. En unités SI il est numériquement égal à la limite du rapport de la force, agissant de la part du champ magnétique sur l'élément de conducteur parcouru par un courant électrique, au produit du courant par la longueur de l'élément de conducteur, lorsque la longueur de cet élément tend vers zéro et l'élément est disposé dans le champ de telle sorte que cette limite admette sa valeur maximale

$$B = \frac{1}{I}\left(\frac{dF}{dl}\right)_{max},$$

En unités du système de Gauss

$$B = \frac{c}{I}\left(\frac{dF}{dl}\right)_{max},$$

où c est la *constante électrodynamique*, qui est égale au rapport des unités de charge en u.é.s. et u.é.m. de CGS et coïncide avec la vitesse de la lumière dans le vide ($c \approx 3 \cdot 10^{10}$ cm/s).

Le vecteur **B** est dirigé perpendiculairement à la direction de l'élément de conducteur, satisfaisant à la condition indiquée ci-dessus, et à la direction de la force agissant sur cet élément de la part du champ magnétique; notons que de l'extrémité du vecteur **B** la rotation suivant la plus courte distance de la direction de la force à la direction du courant dans l'élément de conducteur apparaît contraire au sens des aiguilles d'une montre.

3° On appelle *force d'Ampère* la force agissant de la part du champ magnétique sur le conducteur parcouru par un courant. La force élémentaire d'Ampère $d\mathbf{F}$ agissant sur un petit élément de longueur dl de conducteur parcouru par un courant électrique I est égale à

$$d\mathbf{F} = I\, d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$d\mathbf{F} = \frac{I}{c}\, d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad \text{(en u. du système de Gauss)},$$

où $d\mathbf{l}$ est le vecteur, numériquement égal à la longueur dl de l'élément de conducteur et dirigé dans le même sens que le vecteur densité de courant $\mathbf{j}$ dans cet élément de conducteur. La relation écrite ci-dessus est appelée *loi (formule) d'Ampère.*

La disposition réciproque des vecteurs $d\mathbf{F}$, **B** et $d\mathbf{l}$ est montrée fig. IV.6.1. En particulier, lorsque $d\mathbf{l} \perp \mathbf{B}$, la direction de la force $d\mathbf{F}$ peut être trouvée par la *règle de la main gauche*: si l'on dispose la paume de la main gauche de façon que le vecteur induction magnétique entre dans la paume et les quatre doigts étendus montrent la direction du courant électrique, le pouce écarté montrera la direction de la force agissant de la part du champ sur le conducteur.

4° On introduit, pour représenter graphiquement les champs magnétiques, la notion de *lignes d'induction magnétique*, les courbes qui admettent en chaque point pour tangentes la direction du vecteur **B** en ces points du champ. Les lignes d'induction magnétique sont toujours fermées et embrassent les conducteurs parcourus par un courant qui crée le champ. Le fait que les lignes d'induction sont fermées exprime l'absence de char-

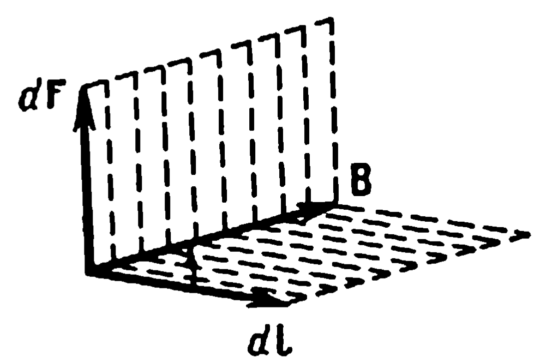


FIG. IV.6.1.

ges magnétiques libres dans la nature. Le champ magnétique est *uniforme* si les vecteurs **B** sont identiques en tous les points de ce champ. Dans le cas contraire le champ est *non uniforme*.

5° La direction des lignes d'induction du champ magnétique du courant est déterminée par la *règle de Maxwell (règle du tire-bouchon)*: si l'on tourne le tire-bouchon dans le sens qu'a le courant dans le conducteur, la direction du mouvement de la manche du tire-bouchon montrera la direction des lignes d'induction magnétique.

6° A la différence des forces électrostatiques, qui sont centrales (p. 357), la force d'Ampère, de même que les autres forces d'interaction électromagnétique, n'est pas centrale. Elle est dirigée perpendiculairement aux lignes d'induction du champ magnétique.

2. Loi de Biot-Savart-Laplace

1° La *loi de Biot-Savart-Laplace* établit la valeur et la direction du vecteur induction magnétique $d\mathbf{B}$ en un point arbitraire C du champ magnétique créé dans le vide par l'élément de conducteur de longueur dl parcouru par un courant I (fig. V.6.2):

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r^3} d\mathbf{l} \times \mathbf{r} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$d\mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{I}{r^3} d\mathbf{l} \times \mathbf{r} \quad \text{(en u. du système de Gauss)},$$

où $d\mathbf{l}$ est le vecteur de l'élément de conducteur, numériquement égal à dl et mené dans le sens du courant, $\mathbf{r}$ le rayon vecteur mené de cet élément de conducteur au point considéré du champ, $r = |\mathbf{r}|$, $c \approx 3 \cdot 10^{10}$ cm/s est la constante électrodynamique, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ V·s/A·m $= 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m la *perméabilité magnétique du vide*. Le vecteur $d\mathbf{B}$ est perpendiculaire au plan, dans lequel sont situés les vecteurs $d\mathbf{l}$ et $\mathbf{r}$, et dirigé de telle sorte que de son extrémité la rotation la plus courte du vecteur $d\mathbf{l}$ jusqu'à sa coïncidence avec le vecteur $\mathbf{r}$ apparaît contraire au sens des aiguilles d'une montre (fig. IV.6.2).

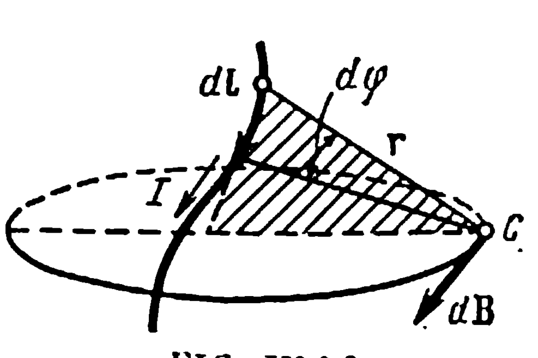


FIG. IV.6.2.

La même direction de $d\mathbf{B}$ est également déduite de la règle du tire-bouchon.

Numériquement le vecteur $d\mathbf{B}$ est égal à

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r} d\varphi \quad \text{(en u. SI)},$$

$$dB = \frac{1}{c} \frac{I}{r} d\varphi \quad \text{(en u. du système de Gauss)},$$

où $d\varphi$ est l'angle sous lequel on voit du point considéré du champ l'élément de conducteur dl.

2° Lorsque les conducteurs parcourus par un courant ou les corps chargés en mouvement (courants de convection) sont introduits non dans le vide, mais dans une substance quelconque (substance magnétique), cette substance est magnétisée et l'induction magnétique du champ résultant est égale à (p. 494)

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_{\text{int}},$$

où $\mathbf{B}_0$ est l'induction magnétique du champ extérieur (magnétisant) créé par les courants de conduction et les courants de convection *(courants macroscopiques)* et $\mathbf{B}_{\text{int}}$, l'induction magnétique du champ créé par la substance magnétisée, autrement dit, par les *courants moléculaires* dans la substance.

Dans les cas où la substance magnétique homogène et isotrope emplit entièrement l'espace où existe un champ magnétique ou un domaine de celui-ci de telle façon que les lignes d'induction du champ magnétisant ne coupent pas la surface de la substance magnétique, on a dans cette substance:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{B}_0,$$

où μ est la *perméabilité magnétique relative* de la substance magnétique, qui montre de combien de fois est plus grande que dans le vide l'induction magnétique au point considéré du champ dans la substance donnée emplissant tout le champ lors d'une répartition donnée des courants magnétiques.

3° On appelle *intensité de champ magnétique* ou *champ magnétique* la grandeur physique vectorielle $\mathbf{H}$ déterminée de la manière suivante:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{I} \quad \text{(en u. SI)}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{I} \quad \text{(en u. du système de Gauss)},$$

où **I** est le vecteur intensité d'aimantation du milieu (p. 489) au point considéré du champ. En particulier, pour un champ magnétique dans le vide

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \text{ (en u. SI), et } \mathbf{H} = \mathbf{B} \text{ (en u. du système de Gauss).}$$

Si le milieu est isotrope, on a:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu\mu_0} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu} \quad \text{(en u. du système de Gauss)},$$

où μ est une grandeur scalaire telle que les vecteurs **H** et **B** soient colinéaires.

Si les conditions indiquées plus haut (2°) sont réalisées, en particulier pour un champ magnétique dans une substance magnétique parfaite emplissant tout le volume du champ, **H** ne dépend pas de μ et coïncide au point considéré avec un champ magnétique engendré par un même système de courants macroscopiques dans le vide:

$$\mathbf{H} = \int_l d\mathbf{H},$$

où $d\mathbf{H}$ peut être trouvé de la *loi de Biot-Savart-Laplace pour le champ magnétique*

$$d\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi} \frac{I}{r^3} d\mathbf{l} \times \mathbf{r} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$d\mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{I}{r^3} d\mathbf{l} \times \mathbf{r} \quad \text{(en u. du système de Gauss)}.$$

(Cf. le sens des notations données plus haut (1°).)

4° L'induction magnétique $\mathbf{B}_q$ et l'intensité $\mathbf{H}_q$ du champ magnétique d'une charge q se mouvant dans un milieu infini homogène et isotrope avec une vitesse **v** sont égales à

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{B}_q &= \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{q}{r^3} \mathbf{v} \times \mathbf{r}, \\ \mathbf{H}_q &= \frac{1}{4\pi} \frac{q}{r^3} \mathbf{v} \times \mathbf{r} \end{aligned}\right\} \text{(en u. SI)},$$

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{B}_q &= \frac{\mu}{c} \frac{q}{r^3} \mathbf{v} \times \mathbf{r}, \\ \mathbf{H}_q &= \frac{1}{c} \frac{q}{r^3} \mathbf{v} \times \mathbf{r}, \end{aligned}\right\} \text{(en u. du système de Gauss)},$$

où **r** est le rayon vecteur mené à partir de la charge mobile au point considéré du champ. Les vecteurs $\mathbf{B}_q$ et $\mathbf{H}_q$ sont dirigés perpendiculairement au plan mené par les vecteurs **v** et **r**. Si $q > 0$, la rotation la plus courte de **v** à **r** apparaît, de l'extrémité des vecteurs $\mathbf{B}_q$ et $\mathbf{H}_q$, contraire au sens des aiguilles d'une montre. Si $q < 0$, $\mathbf{B}_q$ et $\mathbf{H}_q$ sont dirigés dans le sens contraire (fig. IV.6.3). Le champ magnétique d'une charge mobile est variable, car la valeur numérique et la direction de **r** varient même quand $\mathbf{v} = \text{const}$. A la différence du champ électrostatique d'une charge immobile (p. 360) de symétrie sphérique, le champ magnétique possède une symétrie par réflexion par rapport à la direction de **v**.

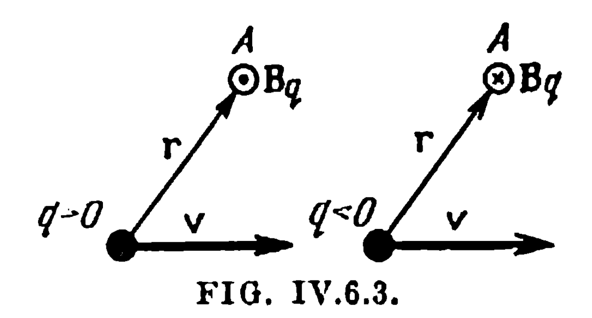


FIG. IV.6.3.

8. Champs magnétiques élémentaires des courants

1° En vertu du principe de superposition des champs (p. 359), vrai également pour le champ magnétique, l'induction magnétique **B** en un point quelconque du champ magnétique d'un conducteur parcouru par un courant I est la somme vectorielle des inductions $\Delta \mathbf{B}_i$ des champs élémentaires créés par tous les tronçons de conducteur:

$$\mathbf{B} = \sum_{i=1}^{n} \Delta \mathbf{B}_i,$$

où n est le nombre total de tronçons en lesquels est divisé le conducteur. Quand $n \to \infty$, $\mathbf{B} = \int_l d\mathbf{B}$, où l'intégration est étendue à toute la longueur du conducteur. On suppose dans tous les exemples de champs magnétiques considérés ci-après que le milieu est homogène et isotrope et qu'il emplit tout l'espace dans lequel existe le champ magnétique.

2° Champ magnétique d'un conducteur rectiligne MN parcouru par un courant I (fig. IV.6.4) en un point arbitraire A:

$$\left.\begin{aligned} B &= \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{I}{r_0}(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2), \\ H &= \frac{1}{4\pi}\frac{I}{r_0}(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2) \end{aligned}\right\} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$B = \frac{1}{c}\mu\frac{I}{r_0}(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2),$$
$$H = \frac{1}{c}\frac{I}{r_0}(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2)$$
(en u. du système de Gauss),

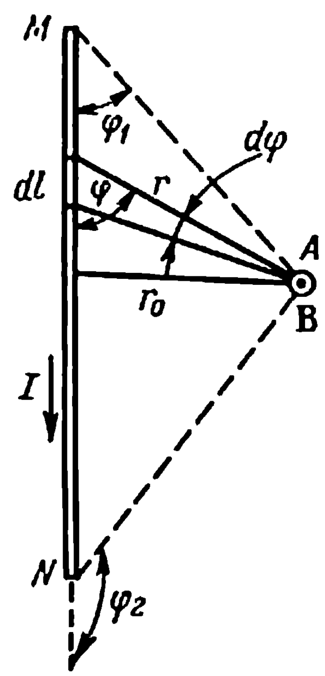


FIG. IV.6.4.

où r_0 est la distance du point A au conducteur, φ_1 et φ_2 les angles formés par les rayons vecteurs menés de l'origine et de l'extrémité du conducteur au point A, μ la perméabilité magnétique relative et μ_0 la perméabilité magnétique du vide. En particulier, pour le champ magnétique d'un conducteur rectiligne infini parcouru par un courant I

$$B = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{2I}{r_0}, \quad H = \frac{1}{4\pi}\frac{2I}{r_0} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$B = \frac{1}{c}\mu\frac{2I}{r_0}, \quad H = \frac{1}{c}\frac{2I}{r_0} \quad \text{(en u. du système de Gauss)}$$

(cf. les notations données plus haut).

3° Champ magnétique au centre d'une spire rectangulaire parcourue par un courant I:

$$B = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{8I\sqrt{a^2+b^2}}{ab},$$
$$H = \frac{1}{4\pi}\frac{8I\sqrt{a^2+b^2}}{ab}$$
(en u. SI),

$$B = \frac{1}{c}\mu\frac{8I\sqrt{a^2+b^2}}{ab},$$
$$H = \frac{1}{c}\frac{8I\sqrt{a^2+b^2}}{ab}$$
(en u. du système de Gauss),

où a et b sont les côtés du rectangle.

4° *Moment magnétique* $\mathbf{p}_m$ d'un circuit plan fermé parcouru par un courant I:

$$\mathbf{p}_m = I\mathbf{S} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$\mathbf{p}_m = \frac{1}{c} I\mathbf{S} \quad \text{(en u. du système de Gauss)},$$

où $\mathbf{S}$ est le vecteur numériquement égal à l'aire embrassée par le circuit et dirigé suivant la normale au plan du circuit de telle façon que de l'extrémité du vecteur $\mathbf{p}_m$ le sens du courant apparaît contraire au sens des aiguilles d'une montre (fig. IV.6.5).

Le moment magnétique $\mathbf{p}_m$ d'un système arbitraire de courants fermés est la somme vectorielle des moments magnétiques des circuits fermés constituant le système. En particulier, le moment magnétique d'un solénoïde (p. 451) est la somme vectorielle des moments magnétiques de toutes ses spires: $\mathbf{p}_m = NI\mathbf{S}$, où N est le nombre total de spires, $\mathbf{S}$ l'aire de section transversale du solénoïde, I le courant passant dans les spires. Le vecteur $\mathbf{p}_m$ est dirigé suivant l'axe du solénoïde et coïncide avec la direction de son champ magnétique.

5° Le champ magnétique créé par une spire circulaire parcourue par un courant I en un point quelconque de l'axe de la spire (fig. IV.6.6) est:

$$\left.\mathbf{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{2\mathbf{p}_m}{(R^2+h^2)^{3/2}}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{4\pi}\frac{2\mathbf{p}_m}{(R^2+h^2)^{3/2}}\right\} \text{(en u. SI)},$$

$$\left.\mathbf{B} = \mu\frac{2\mathbf{p}_m}{(R^2+h^2)^{3/2}}, \quad \mathbf{H} = \frac{2\mathbf{p}_m}{(R^2+h^2)^{3/2}}\right\} \text{(en u. du système de Gauss)}.$$

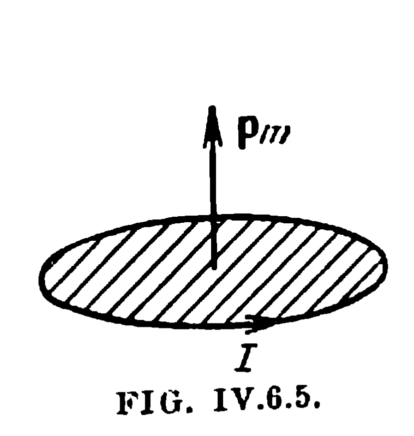


FIG. IV.6.5.

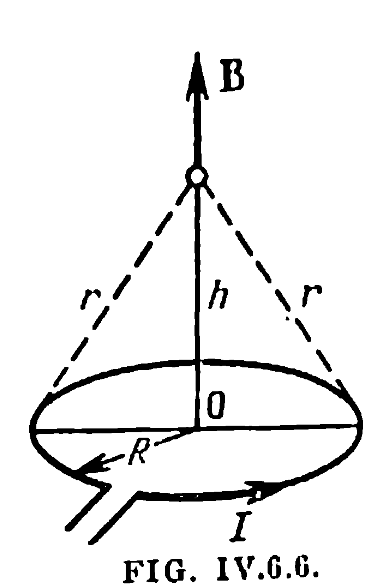


FIG. IV.6.6.

Numériquement B et H sont égaux à

$$\left.\begin{aligned} B &= \frac{\mu\mu_0}{2}\frac{IR^2}{(R^2+h^2)^{3/2}} = \frac{\mu\mu_0 IS}{2\pi(R^2+h^2)^{3/2}}, \\ H &= \frac{1}{2}\frac{IR^2}{(R^2+h^2)^{3/2}} = \frac{IS}{2\pi(R^2+h^2)^{3/2}} \end{aligned}\right\} \text{(en u. SI)},$$

$$\left.\begin{aligned} B &= \frac{1}{c}\mu\frac{2\pi IR^2}{(R^2+h^2)^{3/2}} = \frac{1}{c}\mu\frac{2IS}{(R^2+h^2)^{3/2}}, \\ H &= \frac{1}{c}\frac{2\pi IR^2}{(R^2+h^2)^{3/2}} = \frac{1}{c}\frac{2IS}{(R^2+h^2)^{3/2}} \end{aligned}\right\} \text{(en u. du système de Gauss)},$$

où h est la distance au centre de la spire, R le rayon de la spire, $S = \pi R^2$ l'aire de la spire.

6° Le champ magnétique au centre d'une spire circulaire de rayon R parcourue par un courant I (fig. IV.6.7) est:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{2\mathbf{p}_m}{R^3}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{4\pi}\frac{2\mathbf{p}_m}{R^3} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$\mathbf{B} = \mu\frac{2\mathbf{p}_m}{R^3}, \quad \mathbf{H} = \frac{2\mathbf{p}_m}{R^3} \quad \text{(en u du système de Gauss)}.$$

Numériquement B et H sont égaux à

$$B = \mu\mu_0\frac{I}{2R}, \quad H = \frac{I}{2R} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$B = \frac{1}{c}2\pi\mu\frac{I}{R}, \quad H = \frac{1}{c}\frac{2\pi I}{R} \quad \text{(en u. du système de Gauss)}.$$

Le champ magnétique d'une spire circulaire est dirigé suivant l'axe de la spire, perpendiculairement au plan de celle-ci.

7° On appelle *toroïde* une bobine annulaire en forme de tore enroulée autour d'un noyau (fig. IV.6.8). Le champ magnétique d'un toroïde est entièrement localisé à l'intérieur de son volume, où

$$B = \mu\mu_0\frac{NI}{2\pi r}, \quad H = \frac{NI}{2\pi r} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$B = \frac{1}{c}\mu\frac{2NI}{r}, \quad H = \frac{1}{c}\frac{2NI}{r} \quad \text{(en u. du système de Gauss)}.$$

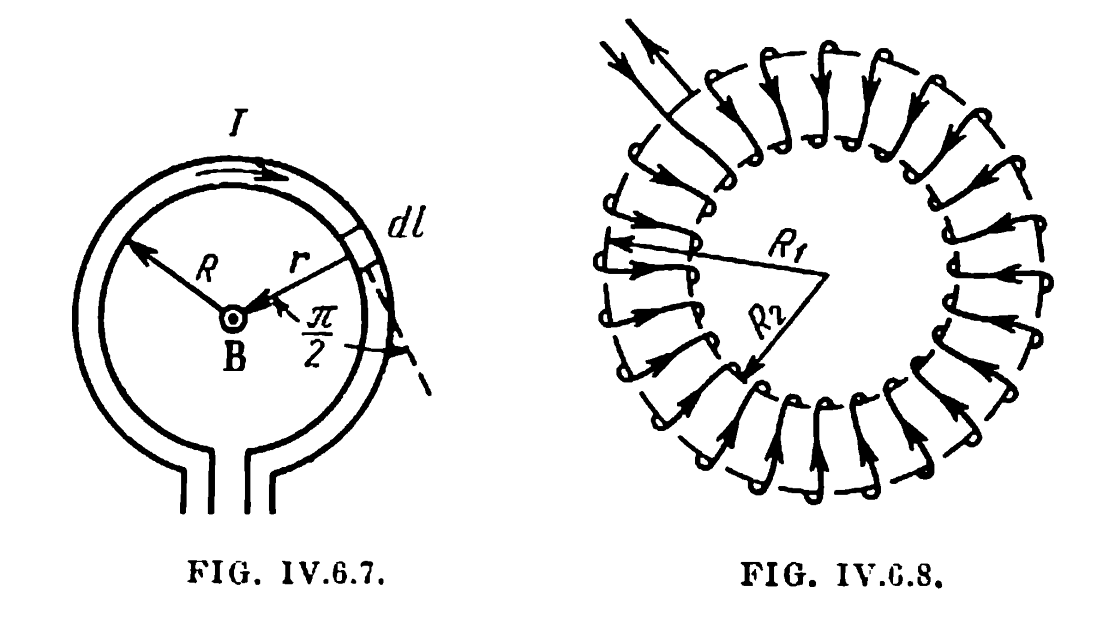


FIG. IV.6.7. FIG. IV.6.8.

L'intensité du champ magnétique à l'intérieur du toroïde décroît de $H_{max} = NI/2\pi R_2$ à $H_{min} = NI/2\pi R_1 = NI/2\pi(R_2+d)$, où R_1 et R_2 sont les rayons extérieur et intérieur du toroïde, N et d le nombre et le diamètre des spires de l'enroulement. L'intensité du champ magnétique sur la ligne médiane du toroïde est:

$$H_m = \frac{NI}{2\pi R_m} = nI \quad \text{(en u. SI)},$$

où $R_m = (R_1 + R_2)/2$, n est le nombre de spires par unité de longueur de la ligne médiane du toroïde. Quand $R_m \to \infty$ et que d et n sont constants, on obtient un solénoïde infiniment long dont le champ est uniforme.

8° On appelle *solénoïde* une bobine cylindrique constituée d'un grand nombre de spires de fil, formant un enroulement hélicoïdal. Si les spires sont serrées l'une contre l'autre ou sont suffisamment proches l'une de l'autre, le solénoïde représente un système de courants circulaires de même rayon, montés en série, avec un axe commun. Sur la figure IV.6.9 sont indiquées par points et par croix les sections des spires dans lesquelles le courant est dirigé en deçà et en delà du plan du croquis. D'après la règle du tire-bouchon (p. 444) l'induction magnétique **B** et le champ **H** sont dirigés suivant l'axe du solénoïde.

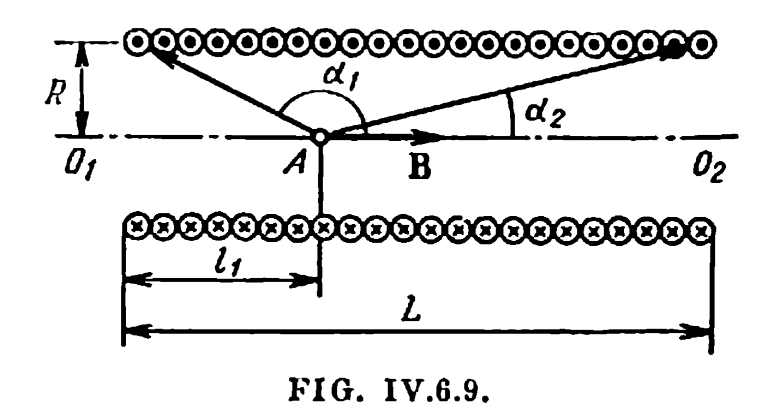


FIG. IV.6.9.

Le champ magnétique du solénoïde en un point quelconque A situé sur l'axe du solénoïde est:

$$B = \frac{\mu\mu_0}{2} nI(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1), \quad H = \frac{nI}{2}(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1) \quad \text{(en u. SI)},$$

$$B = \frac{1}{c} 2\pi\mu\, nI\, (\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1), \quad H = \frac{1}{c} 2\pi\, nI\, (\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1) \quad \text{(en u. du système de Gauss)},$$

où $n = N/L$ est le nombre de spires par unité de longueur du solénoïde, α_1 et α_2 les angles sous lesquels on voit les extrémités du solénoïde du point A $(\alpha_1 > \alpha_2)$ (fig. IV.6.9):

$$\cos\alpha_1 = -\frac{l_1}{\sqrt{R^2 + l_1^2}}, \quad \cos\alpha_2 = \frac{L - l_1}{\sqrt{R^2 + (L - l_1)^2}}.$$

Les valeurs maximales de l'induction magnétique B_{max} et du champ H_{max} correspondent au point situé au milieu de l'axe du solénoïde:

$$B_{max} = \mu\mu_0\, nI \frac{L}{\sqrt{4R^2 + L^2}}, \quad H_{max} = nI \frac{L}{\sqrt{4R^2 + L^2}} \quad \text{(en u. SI)}.$$

9° Le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde aux points de son axe suffisamment éloignés des extrémités du solénoïde est:

$$B = \mu\mu_0\, nI, \quad H = nI \quad \text{(en u. SI)},$$

$$B = \frac{1}{c} 4\pi\mu\, nI, \quad H = \frac{1}{c} 4\pi\, nI \quad \text{(en u. du système de Gauss)}$$

à condition que $L \gg R$.

10° **L'induction magnétique et l'intensité de champ magnétique d'un solénoïde suffisamment long aux points de l'axe coïncidant avec ses extrémités sont:**

$$B = \frac{\mu\mu_0}{2} nI, \qquad H = \frac{1}{2} nI \qquad \text{(en u. SI)},$$

$$B = \frac{1}{c} 2\pi\mu\, nI, \quad H = \frac{1}{c} 2\pi\, nI \quad \text{(en u. du système de Gauss)}.$$

11° **Le champ magnétique H créé par un système arbitraire de courants avec le moment magnétique $\mathbf{p}_m$ à des distances r du système, notablement supérieures aux dimensions linéaires de celui-ci, est égal au champ du « dipôle magnétique » équivalent avec le moment $\mathbf{p}_m$**

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{3(\mathbf{p}_m \cdot \mathbf{r})\,\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}_m}{r^3}\right] \quad \text{(en u. SI)},$$

$$\mathbf{H} = \frac{3(\mathbf{p}_m \cdot \mathbf{r})\,\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}_m}{r^3} \quad \text{(en u. du système de Gauss)}.$$

On appelle « dipôle magnétique» le système de deux «charges» ponctuelles magnétiques de signes contraires $+m$ et $-m$, séparées par la distance l, petite devant la distance r aux points considérés du champ. Le moment magnétique du dipôle s'exprime par $\mathbf{p}_m = m\mathbf{l}$, où le vecteur $\mathbf{l}$ est dirigé du pôle sud au pôle nord (de $-m$ à $+m$, cf. p. 361).

4. Action du champ magnétique sur les conducteurs parcourus par des courants. Interaction des conducteurs

1° La *loi d'Ampère* pour l'interaction magnétique dans le vide de petits éléments de longueur dl_1 et dl_2 de deux conducteurs parcourus par les courants I_1 et I_2:

$$\left.\begin{aligned}(d\mathbf{F}_{12})_{\text{vide}} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_1 I_2}{r^3_{12}}\, d\mathbf{l}_2 \times (d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{r}_{12})\\ (d\mathbf{F}_{21})_{\text{vide}} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_1 I_2}{r_{21}^3}\, d\mathbf{l}_1 \times (d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{r}_{21})\end{aligned}\right\} \text{(en u. SI)},$$

$$\left.\begin{aligned}(d\mathbf{F}_{12})_{\text{vide}} &= \frac{1}{c^2}\frac{I_1 I_2}{r^3_{12}}\, d\mathbf{l}_2 \times (d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{r}_{12})\\ (d\mathbf{F}_{21})_{\text{vide}} &= \frac{1}{c^2}\frac{I_1 I_2}{r^3_{21}}\, d\mathbf{l}_1 \times (d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{r}_{21})\end{aligned}\right\} \text{(en u. du système de Gauss)},$$

où $(d\mathbf{F}_{12})_{\text{vide}}$ est la force agissant sur l'élément de longueur dl_2 du second conducteur de la part de l'élément de longueur dl_1 du premier conducteur; $(d\mathbf{F}_{21})_{\text{vide}}$ la force agissant sur l'élément dl_1 de la part de l'élément dl_2; les vecteurs $d\mathbf{l}_1$ et $d\mathbf{l}_2$ sont menés dans les portions correspondantes des conducteurs dans le sens du courant; $\mathbf{r}_{12}$ est un vecteur mené de l'élément dl_1 dans l'élément dl_2 et $\mathbf{r}_{21} = -\mathbf{r}_{12}$.

Si, comme on le suppose dans tous les exemples considérés ci-après, les conducteurs sont placés dans un milieu homogène isotrope et infini de perméabilité magnétique relative μ, on a:

$$d\mathbf{F}_{12} = \mu\,(d\mathbf{F}_{12})_{\text{vide}} \quad \text{et} \quad d\mathbf{F}_{21} = \mu\,(d\mathbf{F}_{21})_{\text{vide}}.$$

2° La force agissant sur l'élément de longueur dl d'un conducteur rectiligne parcouru par le courant I_1 de la part d'un conducteur rectiligne long parcouru par le courant I_2, disposé parallèlement au premier et distant de d de celui-ci, est égale à

$$dF = \frac{\mu_0\mu}{4\pi}\,\frac{2I_1I_2}{d}\,dl \quad \text{(en u. SI)},$$

$$dF = \frac{1}{c^2}\,\mu\,\frac{2I_1I_2}{d}\,dl \quad \text{(en u. du système de Gauss)}.$$

La force F agissant sur la portion de conducteur de longueur l est égale à

$$F = \frac{\mu_0\mu}{4\pi}\,\frac{2I_1I_2}{d}\,l \quad \text{(en u. SI)},$$

$$F = \frac{1}{c^2}\,\mu\,\frac{2I_1I_2}{d}\,l \quad \text{(en u. du système de Gauss)}.$$

Les conducteurs parcourus par les courants I_1 et I_2 de même sens s'attirent. Dans le cas de courants de sens contraire, les conducteurs se repoussent.

3° La force d'interaction de deux circuits carrés identiques parcourus par les courants I_1 et I_2 (les côtés des deux carrés sont parallèles et leurs centres sont situés sur une droite perpendiculaire à leurs plans) est:

$$F = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\,8I_1I_2\left\{\frac{a^2+2d^2}{d\sqrt{a^2+d^2}} - \frac{d\sqrt{2a^2+d^2}}{a^2+d^2} - 1\right\} \text{(en u. SI)},$$

$$F = \frac{1}{c^2}\,8\mu\,I_1I_2\left\{\frac{a^2+2d^2}{d\sqrt{a^2+d^2}} - \frac{d\sqrt{2a^2+d^2}}{a^2+d^2} - 1\right\} \text{(en u. du système de Gauss)}.$$

où a est le côté du carré, d la distance entre les centres des carrés. Les circuits s'attirent lorsqu'ils sont parcourus par des courants de même sens et se repoussent dans le cas de courants de sens contraire.

4° La force d'interaction de deux solénoïdes coaxiaux suffisamment longs (avec des spires de rayon R_1 et R_2 respectivement), dont les extrémités voisines sont éloignées l'une de l'autre de $d \gg R_1$ et R_2, est égale à ($S_1 = \pi R_1^2$, $S_2 = \pi R_2^2$):

$$F = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I_2 n_2 S_2 I_1 n_1 S_1}{d^2} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$F = \frac{1}{c^2} \mu \frac{I_2 n_2 S_2 I_1 n_1 S_1}{d^2} \quad \text{(en u. du système de Gauss)}.$$

La direction de $\mathbf{F}$ dépend du sens des courants dans les solénoïdes. Si les courants dans les solénoïdes sont de même sens, les solénoïdes s'attirent, s'ils sont de sens contraire, ils se repoussent.

5° Sur un circuit fermé conducteur plan parcouru par un courant (un cadre rectangulaire, par exemple), introduit dans un champ magnétique homogène, agit le moment de forces $\mathbf{M}$:

$$\mathbf{M} = \mathbf{p}_m \times \mathbf{B},$$

où $\mathbf{p}_m$ est le vecteur moment magnétique du circuit, $\mathbf{B}$ l'induction magnétique du champ. Le moment de rotation est dirigé perpendiculairement aux vecteurs $\mathbf{p}_m$ et $\mathbf{B}$ de telle façon que de son extrémité la rotation minimale de $\mathbf{p}_m$ à $\mathbf{B}$ apparaît contraire au sens des aiguilles d'une montre. Sous l'action du moment $\mathbf{M}$ le circuit acquiert l'état d'équilibre stable lors duquel les vecteurs $\mathbf{p}_m$ et $\mathbf{B}$ sont parallèles.

6° Dans un champ magnétique non homogène, sur un circuit fermé parcouru par un courant agit, outre le moment de forces $\mathbf{M}$, la force résultante $\mathbf{F}$:

$$\mathbf{F} = \text{grad}\ (\mathbf{p}_m \cdot \mathbf{B}).$$

Sollicité par la force $\mathbf{F}$, le circuit se déplace du côté de grandes valeurs de l'induction magnétique du champ (dans la région où le champ est plus intense).

5. Loi du courant total. Circuits magnétiques

1° On appelle *circulation du vecteur* $\mathbf{H}$ *du champ magnétique* le long d'un circuit fermé L l'intégrale de la forme

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \oint_L H\, dl \cos(\mathbf{H}, d\mathbf{l}),$$

où L est un circuit de forme arbitraire, $d\mathbf{l}$ l'élément de longueur du circuit dans le sens de son parcours. L'intégration est étendue à toute la longueur du circuit fermé.

2° *Loi du courant total pour les courants de conduction:* la circulation du vecteur intensité de champ magnétique d'un courant électrique continu le long d'un circuit fermé est proportionnelle à la somme algébrique des courants embrassés par ce circuit:

$$\oint_L \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = \oint_L H\,dl\cos(\mathbf{H}, d\mathbf{l}) = \sum_{k=1}^{n} I_k \qquad \text{(en u. SI)},$$

$$\oint_L \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = \oint_L H\,dl\cos(\mathbf{H}, d\mathbf{l}) = \frac{4\pi}{c}\sum_{k=1}^{n} I_k \qquad \text{(en u. du système de Gauss)},$$

où n est le nombre de tous les conducteurs parcourus par des courants embrassés par le circuit L de forme arbitraire. Le courant est admis positif si de l'extrémité du vecteur densité de courant (p. 392), dirigé suivant l'axe du conducteur dans le sens du courant, le parcours du circuit L apparaît contraire au sens des aiguilles d'une montre (d'après la règle du tire-bouchon, p. 444). Dans le cas contraire, les courants sont admis négatifs. Les courants non délimités par le circuit L ne donnent aucun apport à la circulation de $\mathbf{H}$.

Pour le champ magnétique dans le vide, la *loi du courant total* peut être écrite sous la forme:

$$\oint_L \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum_{k=1}^{n} I_k \qquad \text{(en u. SI)},$$

$$\oint_L \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c}\sum_{k=1}^{n} I_k \qquad \text{(en u. du système de Gauss)},$$

où $\oint_L \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l}$ est la *circulation du vecteur induction magnétique* $\mathbf{B}$ le long du circuit fermé L.

Sur la généralisation de la loi du courant total au cas où des courants de déplacement et des courants moléculaires existeraient voir p. 523 et p. 496. La loi du courant total est utilisée pour calculer les champs magnétiques du courant continu.

3° Le flux élémentaire $d\Phi_m$ du vecteur induction magnétique $\mathbf{B}$ à travers la portion de surface d'aire dS est:

$$d\Phi_m = B\,dS\cos(\mathbf{B}, \mathbf{n}) = B_n\,dS = B\,dS_n,$$

où **n** est le vecteur unité de la normale extérieure à l'aire dS, B_n la projection du vecteur **B** sur la direction de la normale (fig. IV.6.10). Le *flux magnétique* Φ_m à travers une surface quelconque S est trouvé par sommation ou intégration de tous les flux élémentaires:

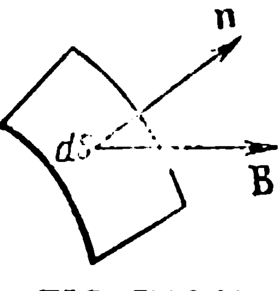


FIG. IV.6.10.

$$\Phi_m = \int_S B\, dS \cos(\mathbf{B}, \mathbf{n}) = \int_S B_n\, dS = \int_S B\, dS_n.$$

Pour un champ homogène et une surface plane S disposée perpendiculairement au vecteur **B**,

$$B_n = B = \text{const},\quad \Phi_m = BS.$$

4° *Théorème d'Ostrogradski-Gauss pour un flux d'induction magnétique:* le flux magnétique à travers une surface fermée quelconque est nul:

$$\oint_S B_n\, dS = 0.$$

Le théorème exprime l'absence de charges magnétiques dans la nature et le fait que les lignes d'induction du champ magnétique sont fermées.

La forme différentielle du théorème

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

représente l'une des équations de Maxwell pour le champ électromagnétique (p. 523).

5° On appelle *circuit magnétique* l'ensemble des corps ou des domaines de l'espace dans lesquels est concentré le champ magnétique. Les circuits magnétiques constituent une partie indispensable des machines électriques et de nombreuses installations électriques.

6° Le flux magnétique dans le circuit magnétique tient le rôle de l'intensité de courant dans le circuit électrique. Le flux magnétique Φ_m doit être le même dans toutes les sections du circuit magnétique sans dérivations.

7° *Formule d'Hopkinson (loi d'Ohm pour un circuit magnétique fermé):*

$$\Phi_m = \frac{\mathcal{E}_m}{R_m},$$

où Φ_m est le flux magnétique, constant le long de chaque tronçon de circuit, $\mathcal{E}_m = IN$ la *force magnétomotrice* (en u. SI), N le nombre de spires du courant magnétisant I, R_m la *réluctance totale* du circuit.

La réluctance d'un tronçon de circuit de longueur l_i avec une section transversale S d'aire constante est:

$$R_{mi} = \frac{l_i}{\mu\mu_0 S} \quad \text{(en u. SI)},$$

où μ est la perméabilité magnétique relative d'une portion donnée de circuit, μ_0 la perméabilité magnétique du vide.

Si S n'est pas constante, on a:

$$R_{mi} = \int_0^{l_i} \frac{dl}{\mu\mu_0 S} \quad \text{(en u. SI)}.$$

8° La réluctance totale R_m des tronçons de circuit magnétique montés en série est égale à

$$R_m = \sum_{i=1}^{n} R_{mi},$$

où n est le nombre de tronçons de circuit.

Lorsque n réluctances sont montées en parallèle, la réluctance totale R_m du circuit est égale à

$$R_m = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{R_{mi}}}.$$

9° *Première loi de Kirchhoff pour les circuits magnétiques dérivés:* la somme algébrique des flux magnétiques dans les branches de circuit aboutissant à un nœud est égale à zéro:

$$\sum_{i=1}^{n} \Phi_{mi} = 0,$$

où n est le nombre de branches aboutissant au nœud (cf. p. 399).

Il est convenu d'admettre le flux magnétique positif si les lignes d'induction s'approchent du nœud. Si elles s'en éloignent, le flux Φ_{mi} est admis négatif.

10° *Seconde loi de Kirchhoff:* dans tout circuit fermé, choisi arbitrairement dans un circuit magnétique dérivé, la somme algébrique des produits des flux magnétiques Φ_{mi} par les réluctances

R_{mi} des portions correspondantes du circuit est égale à la somme algébrique des forces magnétomotrices $\mathcal{E}_{mi}$ appliquées à ce circuit:

$$\sum_{i=1}^{k} \Phi_{mi} \ R_{mi} = \sum_{i=1}^{k} E_{mi},$$

où k est le nombre de portions du circuit magnétique, constituant le circuit fermé (cf. p. 400), Φ_{mi} et $\mathcal{E}_{mi}$ sont admis positifs si les directions des lignes d'induction des champs magnétiques correspondants coïncident avec la direction du parcours du circuit choisie arbitrairement.

6. Travail de déplacement d'un conducteur parcouru par un courant dans le champ magnétique

1° Sollicité par la force d'Ampère (p. 443), un conducteur non fixé parcouru par un courant se déplace dans le champ magnétique. Le travail élémentaire dA, accompli par la force d'Ampère lors du déplacement de l'élément dl de conducteur parcouru par un courant I, est égal à

$$dA = I \ d\Phi_m \qquad \text{(en u. SI)},$$

$$dA = \frac{1}{c} I \ d\Phi_m \qquad \text{(en u. du système de Gauss)},$$

où $d\Phi_m$ est le flux magnétique élémentaire à travers la surface formée par l'élément de longueur du conducteur en mouvement. Le travail développé par les forces d'Ampère, lors du déplacement d'un conducteur de longueur finie parcouru par le courant $I = \text{const}$, est:

$$A = I \ \Phi_m \qquad \text{(en u. SI)},$$

$$A = \frac{1}{c} I \ \Phi_m \qquad \text{(en u. du système de Gauss)},$$

où Φ_m est le flux magnétique à travers la surface que décrit le conducteur dans son mouvement, et $I = \text{const}$.

2° Lors d'un déplacement arbitraire d'un circuit fermé parcouru par le courant $I = \text{const}$ dans un champ magnétique, un certain travail est accompli:

$$A = I \ \Delta\Phi_m \qquad \text{(en u. SI)},$$

$$A = \frac{1}{c} I \ \Delta\Phi_m \qquad \text{(en u. du système de Gauss)},$$

où $\Delta\Phi_m$ est la variation du flux magnétique à travers la surface limitée par le circuit fermé.

Pour calculer un flux magnétique Φ_m à travers la surface limitée par un circuit fermé parcouru par un courant, on choisit la direction de la normale extérieure de manière que de l'extrémité du vecteur de la normale, le sens du courant dans le circuit apparaît contraire au sens des aiguilles d'une montre.

3° Le travail de déplacement dans le champ magnétique d'un conducteur ou d'un circuit fermé parcouru par le courant I = const est effectué au compte de l'énergie dépensée par la source de courant.

CHAPITRE 7

Mouvement de particules chargées dans des champs électrique et magnétique

1. Force de Lorentz

1° Sur une charge électrique se mouvant dans un champ magnétique agit la *force de Lorentz:*

$$\mathbf{F}_L = q\,\mathbf{v} \times \mathbf{B} \qquad \text{(en u. SI)},$$

$$\mathbf{F}_L = \frac{1}{c}\,q\,\mathbf{v} \times \mathbf{B} \qquad \text{(en u. du système de Gauss)},$$

où q est la grandeur algébrique de la charge mobile ($q > 0$ pour une charge positive et $q < 0$ pour une charge négative), $\mathbf{v}$ la vitesse de la charge, $\mathbf{B}$ l'induction magnétique du champ dans lequel se meut la charge, $c = 3\cdot10^{10}$ cm/s la constante électrodynamique. La figure IV.7.1 montre la disposition réciproque des vecteurs $\mathbf{F}_L$, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{v}$ pour les cas $q > 0$ et $q < 0$. Aucun travail n'est accompli par la force de Lorentz, car elle est perpendiculaire au vecteur $\mathbf{v}$.

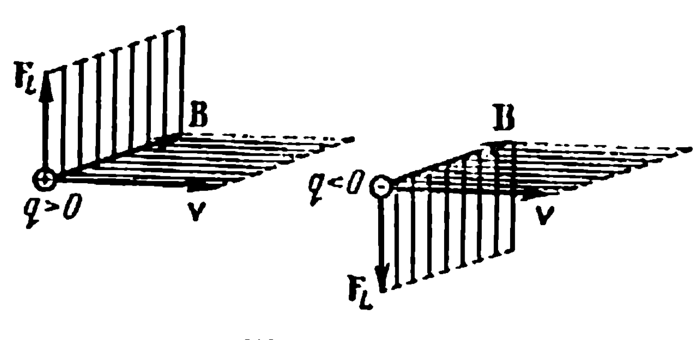


FIG. IV.7.1.

2° Lors de l'action simultanée des champs électrique et magnétique sur la charge en mouvement, la force résultante est (parfois on l'appelle également force de Lorentz)

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\,\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c}\,\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad \text{(en u. du système de Gauss)},$$

où $\mathbf{E}$ est l'intensité de champ électrique.

3° Dans un champ magnétique uniforme perpendiculaire à la direction de la vitesse d'une particule chargée en mouvement, cette dernière sous l'action de la force de Lorentz se meut suivant une circonférence de rayon constant r dans le plan perpendiculare au vecteur $\mathbf{B}$. La force de Lorentz est dans ce cas une force centripète (p. 45)

$$r = \frac{m}{|q|}\,\frac{v}{B} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$r = \frac{cm}{|q|}\,\frac{v}{B} \quad \text{(en u. du système de Gauss)},$$

où m est la masse de la particule, $|q|$ la valeur absolue de sa charge, v la vitesse de la particule, B l'induction magnétique. On juge du signe de la charge d'après le sens de déviation d'une particule élémentaire chargée (fig. IV.7.2) dans le champ magnétique.

La période de révolution T d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme est:

$$T = \frac{2\pi}{B}\,\frac{m}{|q|} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$T = \frac{2\pi}{B}\,\frac{mc}{|q|} \quad \text{(en u. du système de Gauss)}.$$

Lorsque la vitesse de la particule $v \ll c$, où c est la vitesse de la lumière dans le vide, la période de révolution T ne dépend pas de v.

4° Si la particule chargée se déplace dans un champ magnétique uniforme de façon telle que le vecteur vitesse $\mathbf{v}$ forme l'angle α avec la direction de l'induction magnétique $\mathbf{B}$, la trajectoire de la particule représente une hélice (fig. IV.7.3) avec des spires de rayon r et un pas d'hélice h:

$$r = \frac{m}{|q|}\,\frac{v \sin\alpha}{B}, \quad h = \frac{2\pi}{B}\,\frac{m}{|q|}\,v\cos\alpha \quad \text{(en u. SI)},$$

$$r = \frac{mc}{|q|}\,\frac{v \sin\alpha}{B}, \quad h = \frac{2\pi}{B}\,\frac{mc}{|q|}\,v\cos\alpha \quad \text{(en u. du système de Gauss)}.$$

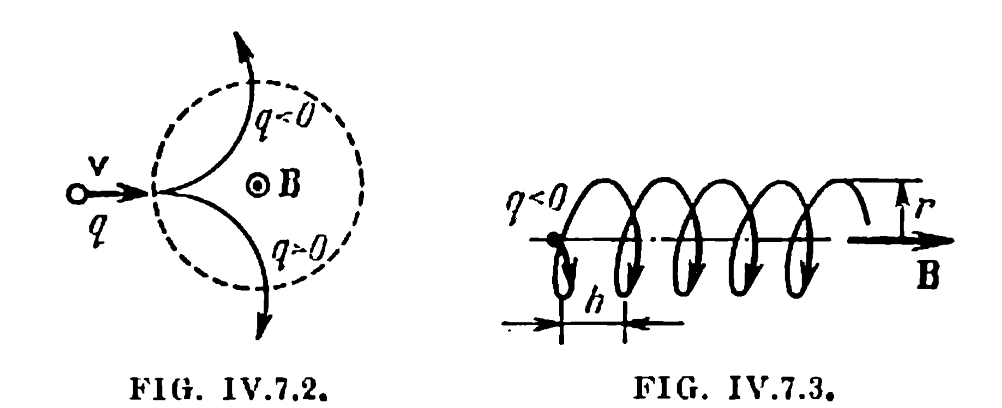


FIG. IV.7.2. FIG. IV.7.3.

5° Si le mouvement considéré ci-dessus (4°) a lieu dans un champ non uniforme dont l'induction magnétique croît dans le sens de déplacement de la particule, le rayon des spires et le pas d'hélice diminuent à mesure que s'accroît B.

2. Charge spécifique des particules. Spectrographie de masse

1° On appelle *charge spécifique* d'une particule le quotient de sa charge par sa masse q/m. On utilise pour mesurer la charge spécifique la déviation des particules chargées dans le champ magnétique (p. 461). On détermine expérimentalement la vitesse de la particule v (habituellement la vitesse de la particule est engendrée par un champ électrique avec une différence de potentiel donnée) et le rayon r de la trajectoire de la particule dans le champ magnétique. q/m est déterminé par la formule indiquée p. 426, 3°.

La charge spécifique de l'électron est donnée p. 933.

2° Pour déterminer la charge spécifique et la masse des ions positifs, on utilise l'action simultanée des champs électrique et magnétique sur la particule. Les appareils destinés aux mesures précises des poids atomiques relatifs (et, par conséquent, des masses relatives) des isotopes des éléments chimiques (p. 832) sont appelés *spectrographes de masse* et *spectromètres de masse.*

3° On appelle *spectre de masse* des particules l'ensemble des valeurs de leurs masses. Dans le *spectrographe de masse d'Aston* (fig. IV.7.4) toutes les particules de même charge spécifique q/m sont déviées dans le champ électrique du condensateur C et le champ magnétique de la bobine M réciproquement perpendiculaires de manière qu'elles sont focalisées en un même point, indépendamment de leurs vitesses. On obtient sur la plaque photo-

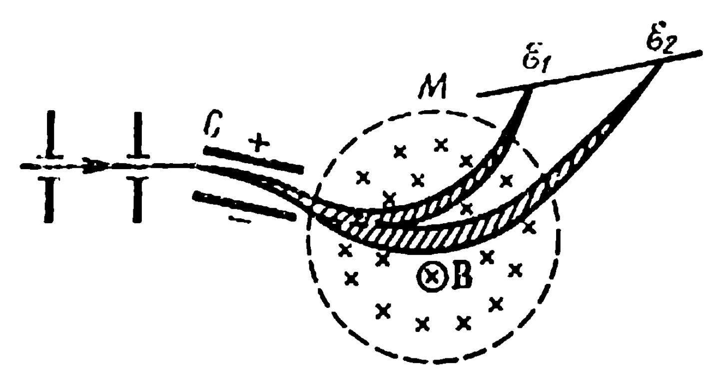


FIG. IV.7.4.

graphique une série de fines raies parallèles ($\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$, ...) correspondant à différentes valeurs de q/m $[(q/m)_{\mathscr{E}_1} > (q/m)_{\mathscr{E}_2}]$.

La *focalisation double* des ions suivant leurs énergies et leurs directions, réalisée par remplacement des condensateurs plans par des condensateurs cylindriques et par utilisation d'électro-aimants spéciaux, donne un faisceau plan-parallèle d'ions entrant dans le champ magnétique et assure, pour une intensité suffisante de raies sur les plaques photographiques, une précision de mesure des masses des ions d'éléments légers, qui atteigne 10^{-4} %.

4° On crée dans les spectromètres de masse, à l'aide de sources ioniques spéciales, des faisceaux monochromatiques d'ions qui se focalisent bien dans le champ magnétique transversal même dans le cas de faisceaux très divergents d'un grand nombre d'ions. Ceci permet d'atteindre une haute précision de mesure des concentrations de différents isotopes.

3. Accélérateurs de particules chargées

1° On appelle *accélérateurs* les dispositifs servant à communiquer une très grande énergie cinétique aux particules chargées. Les méthodes d'accélération se divisent en trois groupes: *électrostatique*, *par induction* et *par résonance*. Suivant la forme des trajectoires de mouvement des particules, les accélérateurs peuvent être *linéaires* ou *circulaires*. Dans les accélérateurs linéaires les trajectoires de mouvement des particules sont proches d'une droite, dans les accélérateurs circulaires elles représentent des circonférences ou des spirales.

2° Dans les accélérateurs électrostatiques linéaires la particule traverse une seule fois le champ électrique avec une barrière de potentiel élevée créée par des générateurs électrostatiques (*générateur de Van de Graaf*, p. 372).

3° Le *bêtatron* est le seul accélérateur par induction utilisé pour accélérer des électrons jusqu'à des énergies de l'ordre de 10^2 MeV. Son fonctionnement est basé sur l'utilisation d'un champ électrique rotationnel apparu dans la chambre d'accélération sous l'action du champ magnétique variable de l'électro-aimant. Les

trajectoires des électrons représentent des circonférences coïncidant avec les lignes de forces du champ électrique rotationnel. Lors du mouvement répété maintes fois d'un électron suivant une orbite circulaire stable, celui-ci acquiert une énergie très grande.

Intensité E du champ électrique rotationnel dans le bêtatron:

$$E = -\frac{1}{2} r \frac{dB_m}{dt} \quad \text{(en u. SI)},$$

où B_m est la valeur moyenne de l'induction magnétique à l'instant t à l'intérieur d'un cercle de rayon r, r étant la distance de l'axe du champ au point considéré (le rayon de l'orbite circulaire de l'électron dans le bêtatron). Condition exigée pour la stabilité de l'orbite électronique dans le bêtatron:

$$B = \frac{1}{2} B_m,$$

où B est la valeur instantanée de l'induction magnétique sur l'orbite.

Conditions exigées pour la stabilité de l'orbite électronique dans le bêtatron:

a) la *focalisation axiale*, autrement dit, la disposition de l'orbite dans un plan. Elle est atteinte au compte de la forme spéciale des pièces polaires de l'électro-aimant assurant un affaiblissement graduel du champ magnétique à mesure qu'on s'éloigne de son axe;

b) la *focalisation radiale*, autrement dit, le retour sur l'orbite stable des électrons l'ayant quitté fortuitement. Elle est atteinte au compte de ce que l'induction magnétique du champ de l'électro-aimant décroît de l'axe vers la périphérie de façon plus lente que $1/r$, où r est la distance du point considéré du champ à l'axe.

4° Dans les accélérateurs circulaires par résonance, utilisés pour accélérer les protons, les deutons et autres particules, la particule accélérée passe un grand nombre de fois à travers un champ électrique variable suivant une trajectoire fermée, augmentant chaque fois son énergie. Pour guider le mouvement des particules et leur retour périodique dans le domaine du champ électrique accélérateur, on utilise un champ magnétique intense. Le passage de la particule par des points déterminés du champ électrique variable se produit toujours à peu près à la même phase de celui-ci (la «résonance»).

5° Le *cyclotron* est l'accélérateur par résonance le plus simple. Un champ électrique accélérateur variable est créé dans la fente entre deux électrodes semi-circulaires en forme de «D» (les *dees*)

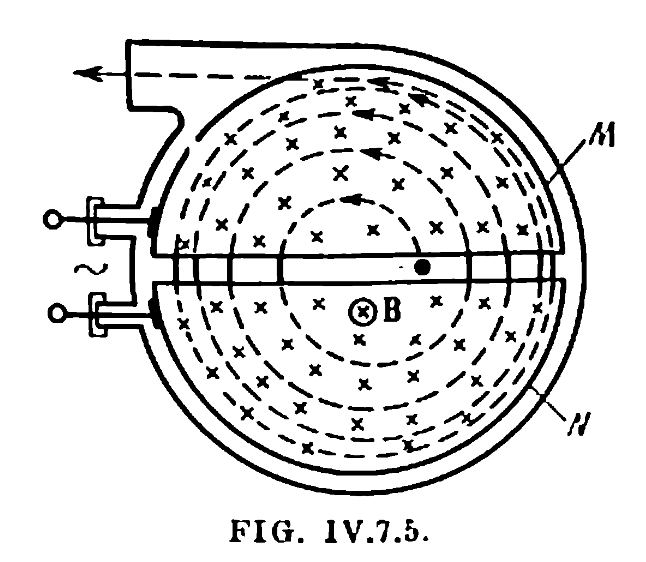


FIG. IV.7.5.

M et N (fig. IV.7.5). La particule est accélérée chaque fois que, décrivant sous l'action du champ magnétique un arc de cercle dans le dee, elle rentre dans la fente entre M et N. Il est indispensable pour l'accélération continue de la particule que la condition de résonance soit réalisée *(synchronisme)*: $T_0 = T$, où T_0 est la période d'oscillation du champ électrique, T la période de révolution de la particule. Aux vitesses v de la particule, commensurables à la vitesse de la lumière dans le vide, la période T croît, et la condition de synchronisme est compromise par suite de la dépendance relativiste de la masse m de la vitesse (p. 551).

6° Le *principe de stabilité de phase* dans les accélérateurs circulaires des particules relativistes consiste en ce que chaque écart de la période T de sa valeur de résonance T_0 conduit à une variation d'accroissement d'énergie de la particule à chaque accélération telle que T oscille autour de T_0, restant en moyenne égale à celle-ci:

$$T_0 \approx T = \frac{2\pi}{B}\left|\frac{m}{q}\right| = \frac{2\pi}{B}\,\frac{E}{|q|c^2},$$

où E est l'énergie totale de la particule (p. 552), c la vitesse de la lumière dans le vide, $m = m_0/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$, m_0 la masse au repos de la particule, cf. les autres notations p. 462.

7° Dans le *synchrocyclotron (phasotron)* l'accélération est réalisée, quand $B =$ const, par augmentation lente de T_0. Ceci étant, il découle du principe de stabilité de phase que l'énergie de la particule augmente par suite de l'accroissement relativiste de la masse avec la vitesse.

Dans le *synchrotron* l'induction du champ magnétique B croît proportionnellement à l'accroissement de la masse des particules ($m/B =$ const) lorsque la période T_0 du champ électrique accélérateur est invariable. L'énergie des particules augmente proportionnellement à l'accroissement de B (lorsque T est constante).

Dans le *synchrophasotron* T_0 et B croissent simultanément et en accord, ce qui conduit à l'accroissement de E.

8° L'intensité de champ magnétique dans les accélérateurs ne peut pas dépasser 15 000—20 000 Œ. C'est pourquoi la nécessité d'augmenter les rayons des orbites des particules pour les accélérer conduit à l'agrandissement des dimensions et du poids des accélérateurs et complique la focalisation indispensable pour assurer le mouvement stable des particules dans la chambre à vide de l'accélérateur. Une *focalisation forte* (ou *à gradient alterné*) permet de réduire le poids et les dimensions des accélérateurs. Elle est atteinte à l'aide d'une construction spéciale des électro-aimants et d'un régime particulier du champ magnétique. Ainsi, dans le synchrocyclotron circulaire, le champ magnétique invariable dans le temps est créé par un aimant constitué de secteurs radiaux isolés avec une variation brusque du champ suivant le rayon en directions opposées dans des secteurs voisins.

9° Actuellement, de nouvelles méthodes d'accélération sont développées avec succès: méthodes des faisceaux rencontrés, méthode cohérente, etc.

Dans la *méthode des faisceaux rencontrés* on utilise la collision de deux particules de hautes énergies W_1 et W_2 se mouvant l'une à la rencontre de l'autre. Chacune d'elles acquiert dans le mouvement relatif l'énergie $W \approx 2W_1W_2$. $10^{12} \div 10^{14}$ particules doivent se trouver sur l'orbite pour obtenir un nombre important de collisions.

Dans la *méthode cohérente* un faisceau d'électrons tombe sur le flux de protons et, du fait de l'interaction coulombienne, entraîne après lui des protons tant que $v_e > v_p$, où v_e est la vitesse des électrons, v_p la vitesse des protons. Quand $v_e = v_p$, l'énergie des protons se trouve être ~1 840 fois supérieure à l'énergie des électrons. Dans cette méthode, l'action accélérante du champ électrique est déterminée non seulement par la source extérieure mais aussi par le nombre de particules accélérées.

4. Notions d'optique électronique

1° L'*optique électronique* étudie les propriétés des faisceaux de particules chargées (électrons, protons) intéragissant avec les champs électrique et magnétique. En *optique électronique géométrique*, on néglige les propriétés ondulatoires des faisceaux de particules (p. 743). Les particules chargées y sont considérées comme des points matériels, et leur mouvement dans les champs se décrit par un ensemble de trajectoires.

Les lois de l'optique électronique géométrique tombent en défaut dans les parties des faisceaux de particules chargées où leur densité varie sensiblement dans les limites de dimensions linéaires:

$$l = \frac{h}{2\pi \sqrt{2me\varphi}},$$

où h est la constante de Planck, e et m la charge et la masse des particules, φ le potentiel du champ électrostatique. A ces segments correspondent les limites des faisceaux et leurs lieux de convergence (par exemple au foyer principal, aux points de l'image créée par les systèmes optico-électroniques) où sont observés des phénomènes de diffraction dus aux propriétés ondulatoires des faisceaux de particules.

2° Toutes les lois fondamentales de l'optique peuvent être appliquées à l'optique électronique. L'analogie entre l'optique courante et l'optique électronique est basée sur le fait que le champ dans lequel se meut le faisceau d'électrons (ou d'autres particules chargées) peut être assimilé à un milieu optiquement non homogène et les trajectoires d'électrons, à des rayons lumineux dans ce milieu (analogie optico-mécanique, p. 108).

En optique électronique, on utilise principalement des champs *à symétrie axiale* (analogiquement aux systèmes optiques à symétrie axiale).

3° Pour le mouvement de l'électron dans un champ électrostatique dans le cas non relativiste (la vitesse de l'électron $v \ll c$, où c est la vitesse de la lumière dans le vide), l'*indice de réfraction optico-électronique* du «milieu» est égal à

$$n = C\sqrt{\varphi},$$

où φ est le potentiel au point considéré du champ, compté à partir du potentiel du point où la vitesse de l'électron est nulle, C une constante arbitraire.

Dans ce cas la loi de la réfraction de la lumière sur la surface de séparation de deux «milieux» (loi de Snell) est de la forme:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{\sqrt{\varphi_2}}{\sqrt{\varphi_1}},$$

où i et r sont les angles «d'incidence» et de «réfraction» du faisceau électronique sur une certaine surface séparant les domaines du champ avec les potentiels φ_1 et φ_2. Cette relation est utilisée pour trouver une trajectoire électronique approximative. On se donne dans ce cas toute une série de surfaces équipotentielles

(«surfaces de séparation») (p. 368) et l'on considère les trajectoires électroniques comme des segments de droites («rayons»). Une construction plus précise des trajectoires électroniques est effectuée en tenant compte de leur courbure:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{2\varphi}\,\frac{d\varphi}{dn},$$

où $\frac{d\varphi}{dn}$ est la variation du potentiel du champ électrostatique dans la direction de la normale à la trajectoire.

Dans le cas relativiste l'indice de réfraction optico-électronique du champ électrostatique est de la forme:

$$n = C\sqrt{\varphi(1 + k\varphi)},$$

où $k = e/2m_0c^2$ est la correction relativiste, e et m_0 les valeurs absolues de la charge et de la masse au repos de l'électron.

Si, outre un champ électrostatique, l'électron est soumis à l'action d'un champ magnétique stationnaire, l'indice de réfraction dépend non seulement de φ, mais aussi de la direction du mouvement de l'électron au point considéré. Par conséquent, le champ mixte (électrostatique et magnétique) est semblable à un «milieu» anisotrope (p. 678).

4° Pour diriger le mouvement des électrons dans les appareils optico-électroniques *(microscopes électroniques, multiplicateurs, convertisseurs d'images)*, on se sert de lentilles électrostatiques et magnétiques.

Les *lentilles électrostatiques* sont des diaphragmes métalliques avec des ouvertures de forme circulaire ou des segments de tubes métalliques à section circulaire. L'axe optique de la lentille est formé des axes de symétrie de ses électrodes. La lentille est appelée *unipotentielle* si les potentiels de ses électrodes extrêmes sont égaux; dans le cas contraire elle est dite *bipotentielle* ou *d'immersion.*

Le champ de la lentille électrostatique change la vitesse des électrons en valeur et en direction. Si les électrons passent à travers la lentille, celle-ci est *convergente.* Les trajectoires des électrons périphériques du faisceau coupent l'axe optique de la lentille toujours plus tôt que les trajectoires des électrons centraux du faisceau (l'aberration sphérique est toujours négative, p. 667).

Si au point moyen d'une lentille unipotentielle *(point selle)* le potentiel est inférieur au potentiel de la source d'électrons (cathode), la lentille devient un *miroir électronique.* Ce miroir peut

être *divergent* et créer une image virtuelle (p. 653) ou bien *convergent* et créer une image réelle (p. 653) en fonction de la position dans la lentille de la surface équipotentielle sur laquelle sont réfléchis les électrons.

La forme des trajectoires électroniques dans les lentilles électrostatiques dépend uniquement de la distribution du potentiel dans le cas où les vitesses des électrons sont beaucoup plus faibles que la vitesse de la lumière dans le vide (cas non relativiste); quand la vitesse des électrons se rapproche de la vitesse de la lumière, la charge spécifique de l'électron e/m commence aussi à influer sur la forme de la trajectoire.

La lentille est dite *mince* si sa distance focale est supérieure au champ de la lentille en direction axiale. La *puissance* (p. 659) *d'une lentille électrostatique unipotentielle mince* dans le cas non relativiste est approximativement égale à

$$D_e = \frac{1}{f} = \frac{3}{16} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^2 dz,$$

où f est la distance focale de la lentille, $\varphi(z)$ la distribution du potentiel le long de l'axe optique de la lentille z, $\varphi' = \frac{d\varphi}{dz}$.

Pour une lentille d'immersion, dans les mêmes conditions,

$$\frac{1}{f_1} = \frac{3}{16} \sqrt[4]{\frac{\varphi_2}{\varphi_1}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^2 dz \quad \text{et} \quad f_2 = f_1 \sqrt{\frac{\varphi_2}{\varphi_1}},$$

où f_1 et f_2 sont respectivement les distances focales avant (dans le milieu objet) et arrière (dans le milieu image) de la lentille, φ_1 et φ_2 les potentiels du champ électrostatique dans l'espace objet et dans l'espace image.

5° Généralement, les *lentilles magnétiques* ont la forme de solénoïdes courts (p. 451), coaxiaux au faisceau d'électrons. Pour concentrer le champ magnétique au voisinage de l'axe optique, on utilise des solénoïdes en cuirasses ferromagnétiques.

La *puissance d'une lentille magnétique mince* pour un faisceau paraxial (p. 654), dans le cas non relativiste, est approximativement égale à

$$D_m = \frac{1}{f} = \frac{e}{8mU} \int_{-\infty}^{\infty} B_z^2 \, dz \quad \text{(en u. SI)},$$

où U est la différence de potentiel subie par l'électron jusqu'à son entrée dans la lentille magnétique, $B_z(z)$ est l'induction magnétique le long de l'axe optique de la lentille. Le champ de la lentille magnétique ne change que la direction de la vitesse des électrons *(action focale)* enroulant leurs trajectoires autour de l'axe optique. Ceci provoque la *rotation* de l'image électronique par rapport à l'objet d'un angle θ.

Pour un faisceau paraxial cet angle est:

$$\theta = \sqrt{\frac{e}{8mU}} \int_{-\infty}^{\infty} B_z^2 \, dz \quad \text{(en u. SI)}.$$

Etant donné que $\int_{-\infty}^{\infty} B_z^2 \, dz > 0$, il n'existe rien que des lentilles magnétiques convergentes. Dans ce cas, D_m, à la différence des lentilles électrostatiques, dépend de la vitesse des électrons (c'est-à-dire de U) même dans le cas non relativiste. Dans les formules rapportées ci-dessus il faut, aux vitesses relativistes des électrons, remplacer la grandeur U par $U^* = U + \frac{e}{2m_0c^2} U^2$ (m_0 est la masse au repos de l'électron, cf. p. 551).

6° Une image stigmatique des objets (p. 652) dans les systèmes optico-électroniques n'est obtenue que pour des faisceaux électroniques paraxiaux.

Les *équations fondamentales (équations des trajectoires)* dans les champs à symétrie axiale pour les faisceaux paraxiaux électroniques sont de la forme (en u. SI):

a) pour les lentilles électrostatiques dans le cas non relativiste:

$$\frac{d^2r}{dz^2} + \frac{1}{2\varphi} \frac{d\varphi}{dz} \frac{dr}{dz} + \frac{r}{4\varphi} \frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0,$$

où $\varphi(z)$ est le potentiel sur l'axe optique du système, compté à partir du potentiel du point auquel la vitesse de l'électron $v = 0$, z et r sont les coordonnées le long de cet axe et dans la direction radiale respectivement; d'ici découlent les *lois de similitude*: 1) lorsqu'on augmente de n fois les dimensions linéaires du système optico-électronique, les dimensions des trajectoires augmentent autant de fois; 2) les trajectoires ne changent pas si l'on augmente les potentiels de toutes les électrodes de n fois;

b) pour les lentilles électrostatiques dans le cas relativiste:

$$\sqrt{\varphi(1+k\varphi)}\,\frac{d}{dz}\left[\sqrt{\varphi(1+k\varphi)}\,\frac{dr}{dz}\right]+\frac{1}{4}\,(1+k\varphi)\,\frac{d^2\varphi}{dz^2}\,r=0,$$

où $k = e/2m_0c^2$, m_0 est la masse au repos de l'électron, c la vitesse de la lumière dans le vide;

c) pour les lentilles magnétiques dans le cas non relativiste

$$\frac{d^2r}{dz^2}+\frac{e}{8mU}\,B_z^2r=0,$$

où $B_z(z)$ est la projection de l'induction magnétique sur l'axe de la lentille, U la différence de potentiel subie par l'électron jusqu'à son entrée dans la lentille;

d) pour les lentilles magnétiques la formule s'étend au cas relativiste conformément à ce qui a été dit p. 471, 5°;

e) pour les champs électrostatique et magnétique combinés, dans le cas non relativiste

$$\frac{d}{dz}\left(\sqrt{\varphi}\,\frac{dr}{dz}\right)+\frac{1}{4\sqrt{\varphi}}\left(\frac{d^2\varphi}{dz^2}+\frac{e}{2m}\,B_z^2\right)r=0,$$

dans le cas relativiste

$$\sqrt{\varphi(1+k\varphi)}\,\frac{d}{dz}\left[\sqrt{\varphi(1+k\varphi)}\,\frac{dr}{dz}\right]+\frac{1}{4}\left[(1+k\varphi)\,\frac{d^2\varphi}{dz^2}+\frac{e}{2m_0}\,B_z^2\right]r=0.$$

La présence d'une charge spatiale (p. 360) dans les systèmes optico-électroniques est prise en considération dans les équations rapportées par substitution à $\frac{d^2\varphi}{dz^2}$ de $\frac{d^2\varphi}{dz^2}+\frac{\rho}{\varepsilon_0}$, où $\rho(z)$ est la distribution axiale de la charge spatiale, ε_0 la constante électrique (p. 357).

7° La limitation par faisceaux électroniques paraxiaux étant impossible, dans les systèmes optico-électroniques les aberrations sont inévitables (p. 667).

Les systèmes électrostatiques et magnétiques à symétrie axiale sont principalement caractérisés par une aberration sphérique, le coma, l'astigmatisme, la courbure du champ de l'image et la distorsion (cf. pp. 667-670).

L'instabilité de l'alimentation des sources d'électrons et des lentilles conduit à une certaine dispersion des vitesses des électrons et provoque l'apparition d'une aberration chromatique, d'une différence chromatique des agrandissements et d'une *différence chromatique de rotation de l'image* (les deux derniers défauts ne sont propres qu'aux lentilles magnétiques). Tous ces défauts dété-

riorent le pouvoir séparateur et la qualité de l'image dans les systèmes optico-électroniques.

8° La *microscopie électronique* est l'obtention d'images d'objets microscopiques à l'aide de faisceaux électroniques focalisés par des champs électriques et magnétiques. En microscopie électronique, on utilise des électrons avec une longueur d'onde de de Broglie (p. 742) inférieure aux dimensions de l'objet, de sorte que les faisceaux d'électrons se comportent comme les rayons en optique géométrique (p. 651). Le pouvoir séparateur des microscopes électroniques est de quelques ordres plus élevé que celui des microscopes optiques; pour une énergie donnée des électrons, il est limité par les propriétés ondulatoires de ceux-ci.

CHAPITRE 8

Induction électromagnétique

1. Loi fondamentale de l'induction électromagnétique

1° Le phénomène d'*induction électromagnétique* consiste en ce que dans un circuit conducteur situé dans un champ magnétique variable apparaît une *force électromotrice d'induction* $\mathscr{E}_i$. Si le circuit est fermé, il surgit dans celui-ci un courant électrique appelé *courant d'induction.*

2° *Loi de l'induction électromagnétique de Faraday:* la f.é.m. d'induction électromagnétique $\mathscr{E}_i$ dans le circuit est numériquement égale et de signe contraire à la vitesse de variation du flux magnétique Φ_m à travers la surface limitée par ce circuit:

$$\mathscr{E}_i = -\frac{d\Phi_m}{dt} \qquad \text{(en u. SI)},$$

$$\mathscr{E}_i = -\frac{1}{c}\,\frac{d\Phi_m}{dt} \qquad \text{(en u. du système de Gauss)}.$$

Les directions du parcours du circuit et de la normale extérieure **n**, acceptées lors du calcul de $\mathscr{E}_i$ et de Φ_m respectivement, sont réciproquement liées: de l'extrémité du vecteur **n** le sens du parcours du circuit apparaît contraire au sens des aiguilles d'une montre.

Si le circuit fermé est constitué de N spires en série (par exemple a la forme d'un solénoïde), on doit comprendre sous Φ_m le *flux magnétique total* à travers la surface limitée par toutes les N spires. Dans ce cas $\Psi = \sum_{i=1}^{N} \Phi_{mi}$ et la loi de l'induction élec-

tromagnétique prend la forme:

$$\mathscr{E}_i = -\frac{d\Psi}{dt} \quad \text{(en u. SI).}$$

3° Le signe moins dans la formule de $\mathscr{E}_i$ est l'expression de la *règle de Lenz:* le sens du courant d'induction est toujours tel que le flux magnétique qu'il crée à travers la surface limitée par le circuit diminue les variations du flux magnétique qui ont produit ce courant d'induction.

4° Le flux magnétique, embrassé par le circuit, peut varier sous l'action de toute une série de causes, par suite de la déformation ou du déplacement du circuit dans le champ magnétique extérieur, ainsi que de la variation du champ magnétique pendant un temps donné. La dérivée totale $d\Phi_m/dt$ tient compte de l'action de toutes ces causes.

Si le circuit conducteur se déplace dans un champ magnétique stationnaire, la f.é.m. d'induction est induite dans tous les tronçons du circuit coupant les lignes d'induction magnétique, et la f.é.m. totale dans le circuit est la somme algébrique des f.é.m. surgissant dans chacun de ses tronçons. L'apparition de la f.é.m. d'induction électromagnétique dans ce cas peut s'expliquer par le fait que sur chaque charge libre q (porteur de courant dans le conducteur), se déplaçant avec le conducteur dans le champ magnétique, agit la force de Lorentz:

$$\mathbf{F}_L = q(\mathbf{v} + \mathbf{v}') \times \mathbf{B} \quad \text{(en u. SI),}$$

$$\mathbf{F}_L = \frac{q}{c}(\mathbf{v} + \mathbf{v}') \times \mathbf{B} \quad \text{(en u. du système de Gauss).}$$

Ici $\mathbf{v}$ est la vitesse de déplacement de la charge q avec le conducteur et $\mathbf{v}'$ la vitesse de la charge par rapport au conducteur. Sollicitées par des forces extérieures (les composantes des forces de Lorentz tangentes au conducteur), les charges q se déplacent produisant un courant électrique.

5° La direction du champ électrique rotationnel extérieur d'induction électromagnétique dans un conducteur rectiligne se mouvant dans un champ magnétique est déterminée par la *règle de la main droite:* si l'on place la main droite de façon que le vecteur induction magnétique B entre dans la paume et le pouce écarté coïncide avec la composante de la vitesse du conducteur qui lui est perpendiculaire, les quatre doigts étendus montreront la direction du champ électrique rotationnel extérieur d'induction électromagnétique surgissant dans le conducteur.

EXEMPLE 1. La f.é.m. d'induction électromagnétique apparaît dans la portion de conducteur de longueur l, qui se meut dans le champ magnétique et coupe les lignes d'induction. Dans le cas le plus simple, quand la vitesse de mouvement du conducteur $\mathbf{v} \perp \mathbf{B}$, où $\mathbf{B}$ est le vecteur induction magnétique,

$$\mathscr{E}_i = -vBl.$$

EXEMPLE 2. Une spire plane tourne dans un champ magnétique uniforme avec une vitesse angulaire ω telle que l'axe de rotation soit situé dans le plan de la spire et qu'il soit perpendiculaire au vecteur induction magnétique $\mathbf{B}_0$ du champ extérieur. La f.é.m. d'induction dans la spire est égale à

$$\mathscr{E}_i = B_0 S \omega \sin \omega t - \frac{d\Phi_{ma}}{dt} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$\mathscr{E}_i = \frac{1}{c} B_0 S \omega \sin \omega t - \frac{1}{c} \frac{d\Phi_{ma}}{dt} \quad \text{(en u. du système de Gauss)},$$

où S est la surface limitée par la spire, Φ_{ma} le flux d'auto-induction de la spire (p. 477).

6° La f.é.m. d'induction électromagnétique dans un circuit conducteur immobile placé dans un champ magnétique variable est égale à

$$\mathscr{E}_i = -\frac{\partial \Phi_m}{\partial t} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$\mathscr{E}_i = -\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_m}{\partial t} \quad \text{(en u. du système de Gauss)}.$$

Le phénomène d'induction électromagnétique dans des conducteurs immobiles est dû au fait que le champ magnétique variable excite un *champ électrique rotationnel*. La circulation de l'intensité $\mathbf{E}$ de ce champ le long d'un circuit fermé L du conducteur est égale à

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial \Phi_m}{\partial t} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_m}{\partial t} \quad \text{(en u. du système de Gauss)}.$$

2. Courants de Foucault

1° Les courants d'induction surgissant dans les conducteurs massifs sont appelés *courants de Foucault* ou *courants parasites*. Les

circuits fermés de tels courants apparaissent dans l'épaisseur du conducteur lui-même.

La quantité de chaleur dégagée par les courants de Foucault par unité de temps est directement proportionnelle au carré de la fréquence de variation du champ magnétique. Pour dégager de plus grandes quantités de chaleur (dans les *fours à induction)*, on utilise des courants de haute fréquence.

2° On réduit les pertes d'énergie par courants de Foucault en fabriquant les circuits magnétiques des machines électriques et les noyaux des transformateurs avec des plaques isolées disposées parallèlement aux lignes d'induction magnétique.

Pour augmenter la résistance des circuits magnétiques, on utilise des *magnétodiélectriques:* mélanges de ferromagnétiques (p. 496) en poudre et de diélectriques (p. 376), comprimés sous forte pression, ainsi que des *ferrites* (ferromagnétiques semi-conducteurs avec une résistivité $\sim 10^9$ fois supérieure à celle des ferromagnétiques métalliques). Les ferrites représentent des oxydes doubles formés à partir de l'oxyde ferrique Fe_2O_3 avec des oxydes de métaux divalents (cf. p. 501).

3. Phénomène de self-induction

1° L'apparition d'une f.é.m. d'induction dans le circuit par suite de variation du courant dans ce circuit est appelé *phénomène de self-induction* ou *d'auto-induction*. Le champ magnétique propre du courant dans le circuit crée un flux magnétique Φ_{ms} à travers la surface S limitée par le circuit lui-même:

$$\Phi_{ms} = \int_S B_n \, dS.$$

Le flux magnétique Φ_{ms} est appelé *flux de self-induction* du circuit. Si le circuit se trouve dans un milieu non ferromagnétique, son flux de self-induction est proportionnel au courant I dans le circuit:

$$\Phi_{ms} = LI \qquad \text{(en u. SI)},$$

$$\Phi_{ms} = \frac{1}{c} LI \qquad \text{(en u. du système de Gauss)},$$

où

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S dS \oint_l \frac{\mu}{r^3} (d\mathbf{l} \times \mathbf{r})_n \qquad \text{(en u. SI)},$$

$$L = \int_S dS \oint_l \frac{\mu}{r^3} (d\mathbf{l} \times \mathbf{r})_n \qquad \text{(en u. du système de Gauss)}.$$

Ici μ_0 est la perméabilité magnétique du vide, μ la perméabilité magnétique relative du milieu, $\mathbf{r}$ le rayon vecteur mené de l'élément dl du circuit à l'élément dS de la surface S limitée par ce circuit, l'indice n signifie la projection sur la normale à l'élément dS.

La grandeur L est appelée *coefficient de self-induction* ou *inductance propre* ou tout simplement *self-inductance du circuit.* Elle est numériquement égale au flux de self-induction du circuit obtenu pour un courant d'intensité unité (en u. du système de Gauss pour un courant $I = c$). L dépend de la forme géométrique du circuit, de ses dimensions et de la perméabilité magnétique relative du milieu dans lequel il est plongé.

EXEMPLE 1. La self-inductance d'un solénoïde (p. 451) de longueur l et d'aire de section transversale S avec un nombre total de spires N est égale à

$$L = k\frac{\mu_0\mu N^2 S}{l} = k\,\mu_0\mu\, n^2 V \qquad \text{(en u. SI)},$$

$$L = k\mu\,\frac{4\pi N^2 S}{l} = k\mu\, 4\pi\, n^2 V \qquad \text{(en u. du système de Gauss)},$$

où $n = N/l$ est le nombre de spires par unité de longueur, $V = Sl$ le volume du solénoïde, k un coefficient dépendant du rapport de la longueur l du solénoïde au diamètre d de ses spires.

Dans le tableau ci-après on donne les valeurs de k en fonction de l/d.

l/d	0,1	0,5	1	5	10
k	0,2	0,5	0,6	0,9	$\approx 1{,}0$

Comme on voit, $k \approx 1$ quand $l/d \gg 1$.

EXEMPLE 2. La self-inductance d'un câble coaxial suffisamment long, de longueur l, est égale à

$$L = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi} l \ln \frac{R_2}{R_1} \quad \text{(en u. SI)},$$

où R_2 et R_1 sont les rayons des cylindres extérieur et intérieur.

EXEMPLE 3. La self-inductance d'une longue ligne bifilaire de longueur l, est égale à

$$L = \frac{\mu_0 \mu}{\pi} l \ln \frac{d}{R} \qquad \text{(en u. SI)},$$

où d est la distance entre axes des fils, R le rayon de section des fils $(d/R \gg 1)$.

2° La f.é.m. d'auto-induction $\mathcal{E}_a$ est déterminée par la loi de Faraday:

$$\mathcal{E}_a = -\frac{d\Phi_{ma}}{dt} = -\frac{d}{dt}(LI) \qquad \text{(en u. SI)},$$

$$\mathcal{E}_a = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi_{ma}}{dt} = -\frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}(LI) \qquad \text{(en u. du système de Gauss)}.$$

Si le milieu n'est pas ferromagnétique (p. 496) et si le circuit n'est pas déformé, $L = \text{const}$ et

$$\mathcal{E}_a = -L\frac{dI}{dt} \qquad \text{(en u. SI)},$$

$$\mathcal{E}_a = -\frac{L}{c^2}\frac{dI}{dt} \qquad \text{(en u. du système de Gauss)}.$$

3° Le courant d'induction surgissant par suite de self-induction, d'après la règle de Lenz, s'oppose à la variation du courant dans le circuit, ralentissant son accroissement ou sa décroissance. L'inductance propre du circuit est la mesure de son inertie par rapport à la variation du courant.

4° Loi de variation du courant dans un circuit avec une force électromotrice constante $\mathcal{E}$, une self-inductance L et une résistance électrique R lors de la fermeture et de l'ouverture de ce circuit:

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right),$$

où I_0 est l'intensité de courant à l'instant initial $t = 0$.

EXEMPLE 1. Lors de la fermeture du circuit (il n'y a pas de courant initial, $I_0 = 0$):

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

Le courant dans le circuit s'accroît, tendant à la valeur asymptotique $\mathcal{E}/R$ d'autant plus rapidement que plus grand est le rapport R/L (fig. IV.8.1).

EXEMPLE 2. Lorsqu'on débranche la source de f.é.m. ($\mathcal{E} = 0$),

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Le courant dans le circuit décroît de sa valeur initiale I_0 à zéro d'autant plus rapidement que plus grand est le rapport R/L (fig. IV.8.2). Une grande f.é.m. de self-induction surgissant lors de l'ouverture rapide du circuit est cause de la perforation de l'espace d'air entre les contacts des interrupteurs et de l'apparition d'une décharge en arc (p. 411) faisant fondre les contacts. On utilise pour l'extinction de l'arc des interrupteurs spéciaux et des condensateurs en tant que shunts dans le circuit.

5° Lors de l'augmentation brusque de la résistance du circuit de courant continu de R_0 à R, apparaît dans ce circuit la f.é.m. $\mathcal{E}_a$ égale à

$$\mathcal{E}_a = \mathcal{E}\left(\frac{R}{R_0} - 1\right) e^{Rt/L}$$

où L est la self-inductance du circuit, $\mathcal{E}$ la f.é.m. des sources branchées dans ce circuit.

6° Le champ électrique rotationnel de self-induction, surgissant dans un conducteur parcouru par un courant alternatif, s'oppose à la variation du courant à l'intérieur du conducteur et facilite sa variation au voisinage de la surface.

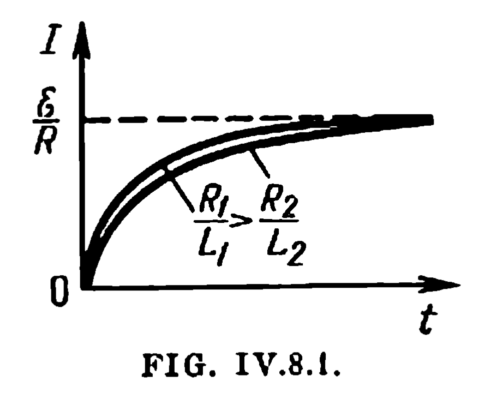


FIG. IV.8.1.

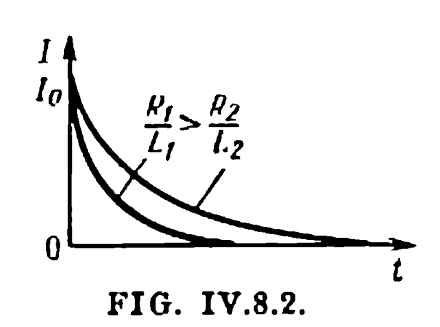


FIG. IV.8.2.

La fig. IV.8.3,*a* montre la direction des lignes de forces du champ rotationnel lors de l'accroissement du courant, la fig. IV.8.3, *b* leur direction lors de la baisse du courant. La résistance des parties internes du conducteur au courant alternatif est plus grande que celle des parties externes. La densité de courant alternatif est maximale à la surface du conducteur et minimale sur son axe. Dans le cas de courants à haute fréquence la densité de courant ne diffère de zéro que dans une couche mince à la surface du conducteur. Ce phénomène est appelé *effet pelliculaire* ou *effet Kelvin* (ou encore *effet de peau*). Les formules approximatives décrivant l'effet pelliculaire dans les conducteurs cylindriques homogènes sont:

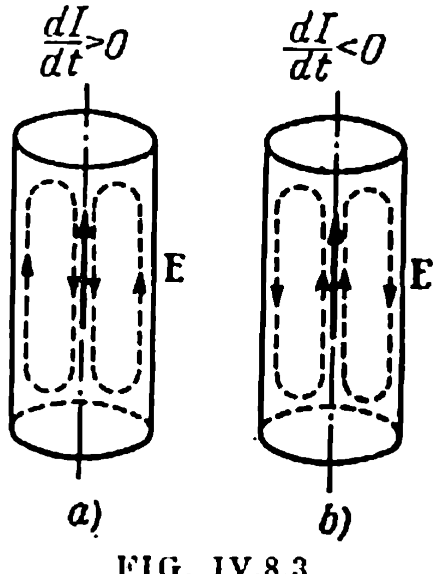


FIG. IV.8.3.

$$\frac{R_\omega}{R_0} = \begin{cases} 1 + \frac{k^4}{3} & \text{quand } k < 1, \\ 0{,}997k + 0{,}277 & \text{quand } 1{,}5 < k < 10, \\ k + \frac{1}{4} + \frac{3}{64k} & \text{quand } k > 10, \end{cases}$$

où R_ω est la résistance efficace du conducteur de rayon r au courant alternatif avec une pulsation ω, R_0 la résistance du conducteur au courant continu, $k = r/2\delta$,

$$\delta = 2\,(2\mu\mu_0\gamma\omega)^{-1/2} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$\delta = c\,(2\pi\mu\gamma\omega)^{-1/2} \quad \text{(en u. du système de Gauss)},$$

c est la constante électrodynamique, μ_0 la perméabilité magnétique du vide, γ la conductivité du conducteur pour le courant continu, μ sa perméabilité magnétique relative, δ la profondeur efficace de pénétration du courant alternatif, c'est-à-dire la distance comptée à partir de la surface du conducteur à laquelle la densité de courant baisse de e fois par rapport à sa densité sur la surface. Plus grande est la section du conducteur, plus notable est l'effet pelliculaire et pour d'autant plus petites valeurs de ω et γ on doit tenir compte de cet effet.

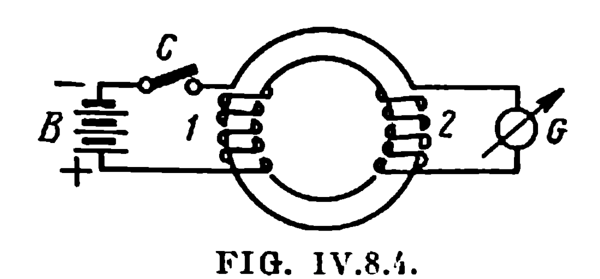


FIG. IV.8.4.

4. Induction mutuelle. Transformateur

1° Le phénomène d'*induction mutuelle* consiste en l'apparition d'une f.é.m. d'induction dans tous les conducteurs se trouvant au voisinage d'autres conducteurs parcourus par des courants variant avec le temps. Par exemple, lors de la variation du courant I_1 dans le premier circuit, représenté fig. IV.8.4, dans le second circuit s'induit une f.é.m. d'induction mutuelle $\mathscr{E}_2$ et surgit un courant d'induction

$$\mathscr{E}_2 = -\frac{d\Phi_{m21}}{dt} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$\mathscr{E}_2 = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi_{m21}}{dt} \quad \text{(en u. du système de Gauss)},$$

où Φ_{m21} est le flux magnétique du champ du courant I_1 à travers la surface embrassée par le second circuit.

2° Le flux magnétique Φ_{m21} est proportionnel au courant I_1:

$$\Phi_{m21} = M_{21} I_1 \quad \text{(en u. SI)},$$

$$\Phi_{m21} = \frac{1}{c} M_{21} I_1 \quad \text{(en u. du système de Gauss)},$$

où M_{21} est le *coefficient d'induction mutuelle* ou *inductance mutuelle* des second et premier circuits. M_{21} dépend de la forme, des dimensions et de la disposition réciproque des circuits, ainsi que de la perméabilité magnétique relative du milieu dans lequel sont placés les circuits.

De façon analogue $\Phi_{m12} = M_{12}I_2$, où I_2 est le courant dans le second circuit, Φ_{m12} le flux magnétique du champ du courant I_2 à travers la surface embrassée par le premier circuit, M_{12} l'inductance mutuelle des premier et second circuits. Pour un milieu non ferromagnétique (p. 496) $M_{21} = M_{12}$. Si le milieu est ferromagnétique, M_{12} et M_{21} dépendent, outre des valeurs énumérées ci-avant, des intensités des courants dans les circuits et, par suite du phénomène d'hystérésis (p. 499), du caractère de la variation de ces courants.

3° L'expression de la f.é.m. d'induction mutuelle est:

$$\mathscr{E}_2 = -\frac{d}{dt}(M_{21} I_1) \quad \text{(en u. SI)},$$

$$\mathscr{E}_2 = -\frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}(M_{21} I_1) \quad \text{(en u. du système de Gauss)}.$$

Si M_{21} = const, on a:

$$\mathcal{E}_2 = -M_{21}\frac{dI_1}{dt} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{M_{21}}{c^2}\frac{dI_1}{dt} \quad \text{(en u. du système de Gauss)}.$$

EXEMPLE. Pour élever ou abaisser la tension du courant alternatif, on se sert d'un *transformateur*, dont le fonctionnement est basé sur le phénomène d'induction mutuelle. Le champ magnétique variable du courant I_1 dans l'*enroulement primaire* provoque l'apparition d'une f.é.m. d'induction mutuelle dans l'*enroulement secondaire*. Le noyau assure une induction mutuelle M_{21} importante du transformateur; lors de sa marche à vide (quand $I_2 = 0$)

$$M_{21} = \frac{N_1 N_2}{R_m},$$

où N_1 et N_2 sont les nombres de spires dans les enroulements primaire et secondaire, R_m la réluctance du noyau (p. 457). Le rapport des valeurs absolues des tensions U_2 et U_1 aux extrémités des enroulements primaire et secondaire lors de la marche à vide est appelé *coefficient de transformation*:

$$\left|\frac{U_2}{U_1}\right| = \frac{N_2}{N_1}.$$

5. Energie du champ magnétique du courant électrique

1° On appelle *énergie propre du courant I* dans un circuit avec la self-inductance L une grandeur numériquement égale au travail dépensé pour vaincre la f.é.m. de self-induction lors de la création du courant (on suppose que le milieu n'est pas ferromagnétique, de sorte que L ne dépend pas de I):

$$W_m = \frac{LI^2}{2} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$W_m = \frac{1}{c^2}\frac{LI^2}{2} \quad \text{(en u. du système de Gauss)}.$$

L'énergie propre du courant est l'énergie de son champ magnétique. Pour un long solénoïde par exemple,

$$W_m = \frac{1}{2}\mu_0\mu n^2 I^2 V \quad \text{(en u. SI)},$$

$$W_m = \frac{\mu}{c^2} 2\pi n^2 I^2 V \quad \text{(en u. du système de Gauss)},$$

où V est le volume du solénoïde, n le nombre de spires par unité de sa longueur, μ_0 la perméabilité magnétique du vide, μ la perméabilité magnétique relative du milieu.

2° La *densité volumique d'énergie* w_m du champ magnétique est l'énergie comprise dans une unité de volume du champ:

$$w_m = \frac{dW_m}{dV}.$$

La densité volumique d'énergie du champ magnétique dans un milieu isotrope et non ferromagnétique est égale à

$$w_m = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0\mu} = \frac{1}{2}BH = \frac{1}{2}\mu_0\mu H^2 \quad \text{(en u. SI)},$$

$$w_m = \frac{\mu H^2}{8\pi} = \frac{BH}{8\pi} = \frac{1}{8\pi}\frac{B^2}{\mu} \quad \text{(en u. du système de Gauss)},$$

où μ_0 est la perméabilité magnétique du vide, μ la perméabilité magnétique relative du milieu, B et H l'induction magnétique et l'intensité au point considéré du champ magnétique.

3° L'énergie du champ magnétique créé dans un milieu isotrope et non ferromagnétique par n circuits parcourus par les courants $I_1, I_2, \ldots, I_n$ est:

$$W_m = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} M_{ik}I_iI_k \quad \text{(en u. SI)},$$

$$W_m = \frac{1}{2c^2}\sum_{i,k=1}^{n} M_{ik}I_iI_k \quad \text{(en u. du système de Gauss)},$$

où M_{ik} est l'inductance mutuelle des i-ième et k-ième circuits, $M_{ik} = L_i$ le coefficient d'auto-induction du i-ième circuit.

4° On appelle *énergie mutuelle* des courants I_i et I_k la grandeur

$$W_{ik} = \frac{\mu_0}{2}\int_V \mu\, \mathbf{H}_i\cdot\mathbf{H}_k\, dV = M_{ik}I_iI_k \quad \text{(en u. SI)},$$

$$W_{ik} = \frac{1}{8\pi}\int_V \mu\, \mathbf{H}_i\cdot\mathbf{H}_k\, dV = \frac{1}{c^2}M_{ik}I_iI_k \quad \text{(en u. du système de Gauss)},$$

où $i \neq k$, $\mathbf{H}_i$ et $\mathbf{H}_k$ les intensités des champs magnétiques créés par les courants I_i et I_k respectivement, et l'intégration est étendue à tout le volume V du champ. Ainsi, l'énergie du champ magnétique

du système de circuits parcourus par des courants est la somme des énergies propres et mutuelles de tous ces courants.

5° La ***densité volumique d'énergie du champ électromagnétique*** dans un milieu isotrope ne jouissant pas de propriétés ferromagnétiques et ferroélectriques est:

$$w = w_m + w_e = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} + \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} \qquad \text{(en u. SI)},$$

$$w = w_m + w_e = \frac{\mu H^2}{8\pi} + \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} \qquad \text{(en u. du système de Gauss)}.$$

CHAPITRE 9

Propriétés magnétiques de la matière

1. Moments magnétiques des électrons et des atomes

1° L'électron possède un *moment cinétique propre* (moment mécanique) $\mathbf{p}_s$, appelé *spin*. Ce moment ne peut prendre que deux orientations par rapport au champ magnétique extérieur, dirigé suivant l'axe des z, telles que ses deux projections possibles sur la direction de ce champ soient égales à

$$p_{sz} = \pm \frac{\hbar}{2} = \pm \frac{h}{4\pi},$$

où h est la constante de Planck (p. 721) et $\hbar = h/2\pi$.

2° Au spin de l'électron $\mathbf{p}_s$ correspond le *moment magnétique de spin* $\mathbf{p}_{ms}$:

$$\mathbf{p}_{ms} = g_s \mathbf{p}_s.$$

La grandeur g_s est appelée *rapport gyromagnétique pour le moment de spin*

$$g_s = -\frac{e}{m} \qquad \text{(en u. SI)},$$

$$g_s = -\frac{e}{mc} \qquad \text{(en u. du système de Gauss)},$$

où e est la valeur absolue de la charge de l'électron, m la masse de l'électron, c la vitesse de la lumière dans le vide. La projection du moment magnétique de spin de l'électron sur l'axe (1°) est numériquement égale au *magnéton de Bohr* μ_B:

$$p_{msz} = \pm \frac{e\hbar}{2m} = \pm \mu_B \qquad \text{(en u. SI)},$$

$$p_{msz} = \pm \frac{e\hbar}{2mc} = \pm \mu_B \qquad \text{(en u. du système de Gauss)},$$

où

$$\mu_B = 0{,}927 \cdot 10^{-23} \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{T}} = 0{,}927 \cdot 10^{-20} \frac{\mathrm{erg}}{\mathrm{G}}.$$

Le spin de l'électron explique la structure fine des raies spectrales (p. 788), le dédoublement de ces raies dans les champs magnétiques (p. 789). Le spin de l'électron a une certaine influence sur la distribution des électrons suivant leurs états énergétiques dans les systèmes atomiques. C'est par le spin qu'on explique également les propriétés magnétiques des ferromagnétiques (p. 496). (En ce qui concerne le moment magnétique anomal de l'électron, cf. p. 912).

3° Le moment magnétique $\mathbf{p}_m$ engendré par le mouvement de l'électron sur l'orbite est appelé *moment magnétique orbital*. Le moment cinétique $\mathbf{p}$ de l'électron est: $\mathbf{p} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ (p. 81), où $\mathbf{r}$ est le rayon vecteur, $\mathbf{v}$ la vitesse de l'électron.

4° Les moments magnétique et mécanique (par rapport au noyau) orbitaux de l'électron sont proportionnels l'un à l'autre et antiparallèles:

$$\mathbf{p}_m = g\mathbf{p},$$

où

$$g = -\frac{e}{2m} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$g = -\frac{e}{2mc} \quad \text{(en u. du système de Gauss)}.$$

Le *rapport gyromagnétique des moments orbitaux* g est deux fois plus petit que g_s (2°). La grandeur p relative à l'état stationnaire de l'électron dans l'atome est égale à

$$p = \sqrt{l(l+1)}\,\hbar,$$

où l est un nombre quantique orbital (p. 777),

$$p_m = \sqrt{l(l+1)}\,\mu_B,$$

μ_B est le magnéton de Bohr (2°).

5° On appelle *vecteur moment magnétique orbital de l'atome* $\mathbf{P}_m$ la somme vectorielle des moments magnétiques orbitaux de tous les Z de ses électrons:

$$\mathbf{P}_m = \sum_{i=1}^{Z} \mathbf{p}_{mi},$$

où Z est le nombre atomique de l'élément dans le système périodique de Mendéléev (pp. 799-801).

Le vecteur moment cinétique orbital de l'atome est déterminé de façon analogue:

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^{Z} \mathbf{p}_i,$$

où $\mathbf{p}_i$ est le moment cinétique orbital du i-ième électron. Pour les moments atomiques $\mathbf{P}_m$ et $\mathbf{P}$ la relation

$$\mathbf{P}_m = g\mathbf{P},$$

reste valable, où g est le rapport gyromagnétique (4°).

En ce qui concerne les moments magnétiques des nucléons et des noyaux atomiques, cf. pp. 838 et 839.

6° Le champ magnétique uniforme, dans lequel est introduit l'atome, modifie la vitesse angulaire (p. 28) de rotation de ses électrons autour du noyau. Cette modification a lieu au cours de l'accroissement du champ magnétique dans lequel est introduit l'atome et provient de l'apparition d'un champ électrique rotationnel d'induction (p. 520) agissant sur les électrons.

7° Si l'orbite de l'électron et son vecteur moment orbital $\mathbf{p}_m$ sont disposés par rapport au vecteur champ magnétique $\mathbf{H}$, comme il est indiqué fig. IV.9.1, il se produit une précession (p. 91) de l'orbite et du vecteur $\mathbf{p}_m$ autour de la direction de $\mathbf{H}$ avec une vitesse angulaire ω_L *(précession de Larmor):*

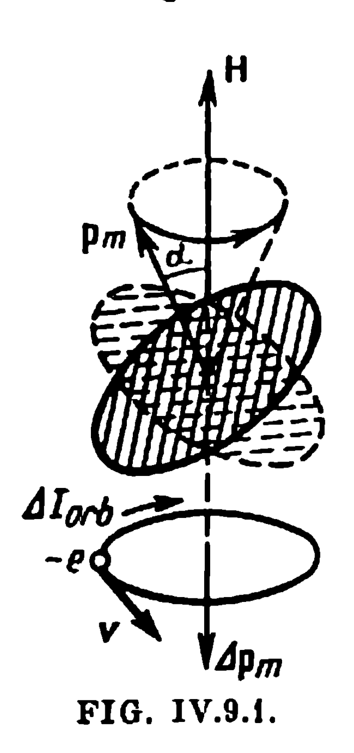


FIG. IV.9.1.

$$\omega_L = \mu_0 \frac{eH}{2m} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$\omega_L = \frac{eH}{2mc} \quad \text{(en u. du système de Gauss)},$$

où e est la valeur absolue de la charge de l'électron, m la masse de l'électron, c la vitesse de la lumière dans le vide, μ_0 la perméabilité magnétique du vide.

Théorème de Larmor: le seul résultat de l'influence du champ magnétique sur l'orbite électronique est la précession de l'orbite et du vecteur $\mathbf{p}_m$ avec une vitesse angulaire de Larmor ω_L autour de l'axe passant par le centre de l'orbite et parallèle au vecteur $\mathbf{H}$.

8° La précession provoque l'apparition d'un courant orbital complémentaire ΔI_{orb} et

d'un moment magnétique orbital induit de l'électron $\Delta \mathbf{p}_m$ antiparallèle au vecteur **H**:

$$\Delta \mathbf{p}_m = -\frac{e^2 \mu_0 S_\perp}{4\pi m} \mathbf{H} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$\Delta \mathbf{p}_m = -\frac{e^2 S_\perp}{4\pi m c^2} \mathbf{H} \quad \text{(en u. du système de Gauss)},$$

où $S_\perp$ est l'aire de la projection de l'orbite de l'électron sur le plan, perpendiculaire à la direction du champ magnétique, $S_\perp = \pi \overline{r_1^2}$; $\overline{r_1^2}$ la valeur moyenne du carré de la projection du rayon de l'orbite électronique en fonction du temps. Pour la couche électronique à symétrie sphérique $\overline{r_1^2} = {}^2/_3\ \overline{r^2}$, où $\overline{r^2}$ est la valeur moyenne du carré du rayon de l'orbite.

9° Le moment orbital induit total de l'atome $\Delta \mathbf{P}_m$ est égal à

$$\Delta \mathbf{P}_m = \sum_{i=1}^{Z} \Delta \mathbf{p}_{mi},$$

où $\Delta \mathbf{p}_{mi}$ est le moment magnétique orbital induit de l'électron, Z le nombre d'électrons dans l'atome

$$\Delta \mathbf{P}_m = -\frac{e^2 \mu_0}{6m} \sum_{i=1}^{Z} \overline{r_i^2}\, \mathbf{H} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$\Delta \mathbf{P}_m = -\frac{e^2}{6mc^2} \sum_{i=1}^{Z} \overline{r_i^2}\, \mathbf{H} \quad \text{(en u. du système de Gauss)}.$$

2. Classification des substances magnétiques

1° On appelle *substances magnétiques* tous les milieux susceptibles de s'aimanter dans un champ magnétique, c'est-à-dire de créer un champ magnétique propre. D'après leurs propriétés magnétiques les substances magnétiques se divisent en trois groupes fondamentaux: *diamagnétiques*, *paramagnétiques* et *ferromagnétiques*.

2° Pour caractériser l'aimantabilité de la substance, on introduit le *vecteur intensité d'aimantation (aimantation)* **I** qui est la

somme vectorielle des moments magnétiques des atomes (molécules) par unité de volume:

$$\mathbf{I} = \lim_{V \to 0} \left(\frac{1}{V} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{P}_{mi} \right),$$

où N est le nombre de particules contenues dans le volume V de substance magnétique, $\mathbf{P}_{mi}$ le moment magnétique de la i-ième molécule (atome). Pour les substances magnétiques situées dans des champs magnétiques non trop intenses:

$$\mathbf{I} = \varkappa_m \mathbf{H},$$

où $\varkappa_m$ est la *susceptibilité magnétique* de la substance. Pour les diamagnétiques $\varkappa_m < 0$, pour les paramagnétiques $\varkappa_m > 0$.

3° Les substances diamagnétiques se divisent en diamagnétiques « classiques », « anomaux » et supraconducteurs. Au premier sous-groupe se rapportent les gaz inertes, certains métaux (zinc, or, mercure, etc.), les éléments tels que le silicium et le phosphore, beaucoup de composés organiques. Pour ces substances $\varkappa_m < 0$, a une faible valeur absolue, de l'ordre de $(0{,}1 \div 10) \cdot 10^{-6}$ et ne dépend pas de la température. Au second sous-groupe se rapportent le bismuth, le gallium, l'antimoine, le graphite et autres. Pour ces substances $\varkappa_m < 0$, dépend de la température et admet des valeurs absolues de l'ordre de $(1 \div 100) \cdot 10^{-6}$. En ce qui concerne la susceptibilité des supraconducteurs, voir p. 503.

4° Les substances paramagnétiques se divisent en paramagnétiques normaux, métalliques avec une susceptibilité magnétique ne dépendant pas de la température, et en antiferromagnétiques.

Les paramagnétiques normaux sont les gaz O_2, NO, etc., le platine, le palladium, les sels de fer, de cobalt et de nickel et ces mêmes métaux à $T > \Theta_C$, où Θ_C est le point de Curie (p. 497), etc. La susceptibilité magnétique $\varkappa_m > 0$ dépend de la température d'après la *loi de Curie*

$$\varkappa_m = \frac{C}{T}$$

ou d'après la *loi de Curie-Weiss:*

$$\varkappa_m = \frac{C'}{T + \Delta},$$

où C et C' sont les *constantes de Curie*. La constante Δ peut être positive, négative ou nulle.

Les métaux paramagnétiques typiques, pour lesquels $\varkappa_m$ ne dépend pas de la température, sont les métaux alcalins: lithium,

sodium, potassium, rubidium et césium. Ils sont des substances magnétiques très faibles: $\varkappa_m \sim 10^{-7} \div 10^{-6}$.

Les antiferromagnétiques (cristaux des éléments des groupes de transition du système périodique de Mendéléev, leurs alliages et combinaisons chimiques) au-dessous du point de Curie antiferromagnétique Θ_{aC} (p. 497) sont des paramagnétiques normaux avec $\Delta < 0$.

5° Les ferromagnétiques représentent un groupe de quelques métaux de transition (fer, nickel, cobalt) et certains alliages jouissant de propriétés magnétiques particulières (p. 496).

3. Diamagnétisme

1° On appelle *diamagnétisme* l'induction d'un moment magnétique complémentaire dans les couches électroniques atomiques sous l'action d'un champ magnétique extérieur. Le diamagnétisme est propre à toutes les substances, mais est observé dans les cas où les atomes, ions ou molécules ont un moment magnétique résultant P_m nul (à l'état S ou Σ, p. 787 et 813).

2° La susceptibilité diamagnétique est égale à

$$\varkappa_{m\,\text{diam}} = -\frac{n_0 e^2 \mu_0}{6m} \sum_{i=1}^{Z} \overline{r_i^2} \qquad \text{(en u. SI)},$$

$$\varkappa_{m\,\text{diam}} = -\frac{n_0 e^2}{6mc^2} \sum_{i=1}^{Z} \overline{r_i^2} \qquad \text{(en u. du système de Gauss)},$$

où n_0 est la concentration des particules de la substance. Les autres notations sont indiquées pp. 793-794. Cette formule est vraie à condition que $\sum_{i=1}^{Z} \overline{r_i^2}$ ait une valeur stationnaire et ne varie pas sous l'action de l'agitation thermique des atomes. Si l'on prend en considération les propriétés quantiques de la couche électronique des atomes, la formule est vraie pour les états S et Σ non dégénérés (p. 229) et pour le champ électrique à symétrie sphérique du noyau de l'atome ou de l'ion.

3° Les électrons de conduction dans les métaux (p. 392) jouissent, en plus de leurs propriétés paramagnétiques, d'une susceptibilité diamagnétique:

$$\varkappa_m = -\frac{n_0 \mu_B^2 \mu_0}{2W_F} = -\frac{4m\mu_B^2\mu_0}{h^2}\left(\frac{\pi}{3}\right)^{2/3} n_0^{1/3} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$\varkappa_m = -\frac{n_0 \mu_B^2}{2W_F} = -\frac{4m\mu_B^2}{h^2}\left(\frac{\pi}{3}\right)^{2/3} n_0^{1/3} \quad \text{(en u. du système de Gauss)},$$

où W_F est l'énergie de Fermi (p. 241), n_0 la concentration des électrons de conduction, m la masse de l'électron, μ_B le magnéton de Bohr (p. 486), h la constante de Planck.

4. Paramagnétisme

1° On appelle *paramagnétisme* l'ensemble des propriétés magnétiques de certaines substances dont les atomes (ions) possèdent un moment magnétique constant $\mathbf{P}_m$ indépendant du champ magnétique extérieur. $\mathbf{P}_m$ est de l'ordre de 10^{-20} erg/G ou de 10^{-23} $\frac{\text{J}}{\text{Wb/m}^2}$.
En l'absence de champ extérieur l'action désorientante de l'agitation thermique ne permet pas l'orientation ordonnée des vecteurs $\mathbf{P}_m$ et l'apparition d'aimantabilité chez la substance.

2° Lors de l'introduction d'un corps paramagnétique dans un champ magnétique extérieur surgit une précession des orbites électroniques et des vecteurs moments magnétiques des atomes autour de la direction du champ extérieur (p. 488). L'action simultanée du champ et de l'agitation thermique des atomes conduit à une orientation préférentielle des moments magnétiques des atomes dans le sens du champ magnétique extérieur.

3° L'expression classique de l'intensité d'aimantation I (sans tenir compte de la quantification spatiale, p. 786), en admettant qu'il n'y a pas d'interaction entre atomes (molécules), est:

$$I = n_0 P_m L(a),$$

où n_0 est le nombre de particules par unité de volume, P_m le moment magnétique constant de l'atome (de la molécule), $L(a)$ la fonction classique de Langevin (p. 380):

$$L(a) = \coth a - \frac{1}{a},$$

$$a = \frac{\mu_0 P_m H}{kT} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$a = \frac{P_m H}{kT} \quad \text{(en u. du système de Gauss)},$$

H est l'intensité de champ magnétique, k la constante de Boltzmann, T la température absolue. Aux températures ambiantes et dans des champs non trop intenses, est réalisée la condition $P_m H \ll kT$, pour laquelle $L(a) \approx a/3$ et

$$\mathbf{I} = \frac{n_0 P_m^2 \mu_0}{3kT} \mathbf{H} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$\mathbf{I} = \frac{n_0 P_m^2}{3kT} \mathbf{H} \quad \text{(en u. du système de Gauss)}.$$

La susceptibilité paramagnétique est alors:

$$\varkappa_m = \frac{n_0 P_m^2 \mu_0}{3kT} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$\varkappa_m = \frac{n_0 P_m^2}{3kT} \quad \text{(en u. du système de Gauss)}.$$

Loi de Curie: la susceptibilité paramagnétique de la substance est inversement proportionnelle à sa température absolue.

Aux basses températures ou dans les champs intenses, la grandeur $P_m H \gg kT$, $L(a) \to 1$ et $I = n_0 P_m$ *(aimantation à saturation)*.

4° L'expression classique de l'intensité d'aimantation de la substance paramagnétique, admettant l'orientation fortuite des moments magnétiques des atomes, est remplacée en théorie quantique du paramagnétisme par la formule

$$I = n_0 g J \mu_B B_J(x),$$

où J est le quantum interne, μ_B le magnéton de Bohr (p. 486), g le facteur de Landé (p. 792), $x = gJ\mu_0 \mu_B H/kT$ (en u. SI), $x = gJ\mu_B H/kT$ (en u. du système de Gauss), $B_J(x)$ est la fonction de Brillouin:

$$B_J(x) = \frac{2J+1}{2J} \coth \frac{2J+1}{2J} x - \frac{1}{2J} \coth \frac{x}{2J}.$$

$$B_J(x) = \frac{J+1}{3J} x \text{ lorsque } x \ll 1,$$

L'intensité d'aimantation:

$$I = n_0 g \mu_B \frac{J+1}{3} x.$$

La susceptibilité paramagnétique:

$$\varkappa_m = \frac{n_0 (p\mu_B)^2 \mu_0}{3kT} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$\varkappa_m = \frac{n_0 (p\mu_B)^2}{3kT} \quad \text{(en u. du système de Gauss)},$$

où $p = g[J(J+1)]^{1/2}$ est le nombre efficace de magnétons de Bohr par atome.

Dans les champs intenses et aux très basses températures $x \to \infty$, $B_J(x) \to 1$ et l'aimantation atteint la saturation:

$$I = n_0 g J \mu_B.$$

5° Les propriétés paramagnétiques des métaux sont dues aux moments magnétiques de spin des électrons (p. 486). Le champ magnétique extérieur trouble l'équivalence des deux orientations possibles du spin. A l'équilibre thermodynamique stable du gaz électronique dans les métaux correspond une orientation préférentielle des moments magnétiques de spin des électrons suivant le champ, autrement dit, une aimantation paramagnétique. La susceptibilité paramagnétique du gaz électronique ne dépend pratiquement pas de la température et est trois fois supérieure à sa susceptibilité diamagnétique (p. 491):

$$\varkappa_m = \frac{3n_0\mu_B^2\mu_0}{2W_F} = \frac{12m\mu_B^2\mu_0}{h^2}\left(\frac{\pi}{3}\right)^{2/3} n_0^{1/3} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$\varkappa_m = \frac{3n_0\mu_B^2}{2W_F} = \frac{12m\mu_B^2}{h^2}\left(\frac{\pi}{3}\right)^{2/3} n_0^{1/3} \quad \text{(en u. du système de Gauss)},$$

où W_F est l'énergie de Fermi (p. 241), n_0 la concentration des électrons de conduction, m la masse de l'électron, μ_B le magnéton de Bohr, h la constante de Planck.

5. Champ magnétique dans les substances magnétiques

1° Le champ magnétique créé par les molécules (atomes, ions) d'une substance est appelé *champ magnétique propre* ou *intérieur*. Ce champ est dû à l'existence de moments magnétiques dans les

atomes (molécules, ions) et se caractérise par le vecteur induction magnétique $\mathbf{B}_{int}$.

2° Le vecteur induction **B** du champ magnétique résultant dans un corps magnétique est la somme vectorielle des inductions magnétiques des champs extérieur (magnétisant) et intérieur:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_{int},$$

où $\mathbf{B}_0$ est l'induction magnétique du champ dans le vide;

$\mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{H}$ (en u. SI) et $\mathbf{B}_0 = \mathbf{H}$ (en u. du système de Gauss).

L'induction magnétique du champ intérieur $\mathbf{B}_{int}$ des corps non ferromagnétiques est proportionnelle au vecteur intensité d'aimantation **I**:

$$\mathbf{B}_{int} = \mu_0 \mathbf{I} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$\mathbf{B}_{int} = 4\pi \mathbf{I} \quad \text{(en u. du système de Gauss)}.$$

3° La relation entre l'induction magnétique **B**, l'intensité **H** et l'intensité d'aimantation **I** est:

$$\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \mathbf{H} + \mathbf{I} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi \mathbf{I} \quad \text{(en u. du système de Gauss)}.$$

4° La relation entre la perméabilité magnétique relative du milieu μ (p. 445) et la susceptibilité magnétique $\varkappa_m$ (p. 490) est:

$$\mu = 1 + \varkappa_m \quad \text{(en u. SI)},$$

$$\mu = 1 + 4\pi\varkappa_m \quad \text{(en u. du système de Gauss)}.$$

Pour les substances diamagnétiques $\varkappa_m < 0$ et $\mu < 1$.
Pour les substances paramagnétiques $\varkappa_m > 0$ et $\mu > 1$.

Dans les deux cas μ ne dépend pas de l'intensité du champ magnétique dans lequel est situé le corps, et diffère peu de l'unité ($\mathbf{B}_{int} \ll \mathbf{B}_0$).

5° La densité volumique d'énergie (p. 484) d'un milieu non ferromagnétique aimanté est:

$$w_{m\,aim} = \mu_0 \frac{(\mu - 1)H^2}{2} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$w_{m\,aim} = \frac{(\mu - 1)H^2}{8\pi} \quad \text{(en u. du système de Gauss)}.$$

La densité volumique d'énergie du champ magnétique dans une substance magnétique w_m comprend la densité volumique d'énergie du

champ magnétique dans le vide ($\mu = 1$) $w_{m\ \text{vide}}$ et la densité volumique d'énergie de la substance magnétique aimantée:

$$w_m = w_{m\ \text{vide}} + w_{m\ \text{aim}}.$$

6° Loi du courant total pour la circulation du vecteur induction magnétique **B** dans les substances magnétiques (p. 456):

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \left(\sum I + \sum I_{\text{mol}} \right) \quad \text{(en u. SI)},$$

où $\sum I$ est la somme algébrique des courants de conduction embrassés par le circuit fermé L et $\sum I_{\text{mol}}$ la somme algébrique des courants moléculaires embrassés par ce même circuit, égale à la circulation du vecteur aimantation le long du circuit L:

$$\sum I_{\text{mol}} = \oint_L \mathbf{I} \cdot d\mathbf{l}.$$

6. Ferromagnétisme

1° On appelle *ferromagnétiques* les substances magnétiques dont le champ magnétique propre peut être des centaines et milliers de fois supérieur au champ magnétique extérieur qui l'excite.

2° Une valeur élevée de l'aimantation (p. 489) des ferromagnétiques s'explique par l'existence d'un champ magnétique moléculaire dans ceux-ci, dû à une interaction quantomécanique (d'échange) (pp. 784 et 808) particulière des moments magnétiques de spin non compensés des électrons (p. 486) des atomes dans les réseaux cristallins des ferromagnétiques. Par suite de cette interaction c'est l'état ordonné avec une orientation parallèle *(ferromagnétisme)* ou antiparallèle *(antiferromagnétisme)* des moments magnétiques de spin des atomes voisins dans le réseau qui représente un état stable et énergétiquement avantageux du système d'électrons dans le cristal.

3° Le ferromagnétisme et l'antiferromagnétisme sont observés uniquement dans les cristaux des métaux de transition: Fe, Co, Ni (ferromagnétisme), dans les halogènes des éléments du groupe du fer, du chrome, du manganèse, etc. (antiferromagnétisme), dans le réseau desquels sont présents des atomes avec des couches électroniques internes $3d$ ou $4f$ non remplies (p. 798) possédant un moment magnétique de spin résultant non nul.

4° Le ferromagnétisme (l'antiferromagnétisme) a lieu à condition d'une valeur positive (négative) de l'intégrale d'échange (p. 784), caractérisant une interaction (d'échange) quantique particulière entre les moments magnétiques de spin.

5° Le ferromagnétisme n'existe rien que pour des paramètres déterminés du réseau cristallin. Les distances entre atomes voisins doivent assurer la valeur voulue de superposition des fonctions d'onde des couches électroniques telle que l'interaction entre atomes voisins conduise à l'énergie totale du système d'électrons assurant la stabilité de l'état ferromagnétique (ou antiferromagnétique).

La condition de ferromagnétisme n'est réalisée que pour les cristaux des métaux de transition, pour lesquels $d/a \geqslant 1{,}5$, où d est le diamètre de l'atome, a le diamètre de la couche $3d$ (ou $4f$) non remplie. Aussi dans les éléments du groupe du fer le ferromagnétisme n'est-il observé que dans le fer α, le cobalt et le nickel. Quand $d/a < 1{,}5$ l'intégrale d'échange est négative et à la disposition ordonnée stable des spins correspond leur orientation antiparallèle (2°). Dans ce cas d'antiferromagnétisme, la structure magnétique du cristal peut être considérée comme étant complexe, constituée de deux sous-réseaux magnétisés en sens contraires. Si les moments magnétiques des sous-réseaux sont numériquement égaux, il ne surgit pas d'aimantation spontanée du cristal. S'ils sont différents (le nombre d'atomes est différent ou leur nature), il apparaît une différence des moments magnétiques des sous-réseaux conduisant à l'aimantation spontanée du cristal: *antiferromagnétisme non compensé* ou *ferrimagnétisme*. Ce sont les ferrites (p. 501), par exemple, qui jouissent de telles propriétés.

6° Les propriétés particulières des ferromagnétiques et antiferromagnétiques ne sont décelées qu'à des températures supérieures à Θ_C et Θ_{aC} respectivement, appelées *points de Curie* (on appelle souvent la température Θ_{aC} *point de Néel*). Quand $T < \Theta_C$, le corps ferromagnétique est divisé en petits *domaines d'aimantation spontanée* à saturation complète. En l'absence de champ magnétique extérieur, les directions des vecteurs aimantation des différents domaines ne coïncident pas et l'aimantation résultante de tout le corps peut être nulle.

7° Les monocristaux des ferromagnétiques jouissent d'une anisotropie très accusée de propriétés magnétiques, qui se manifeste dans l'existence des directions de facile aimantation et de difficile aimantation. Le nombre de directions de facile aimantation dépend de la structure cristalline d'une substance donnée. En l'absence de champ magnétique extérieur, la direction d'aimantation spontanée dans chaque domaine coïncide avec l'une des directions de facile

aimantation d'un monocristal ou d'un grain de polycristal (p. 278). Le nombre de domaines à diverses orientations d'aimantation spontanée (nombre de *phases magnétiques*) est égal au double du nombre d'axes de facile aimantation. Les dimensions, la forme et la délimitation des domaines sont déterminées, en l'absence de champ magnétique extérieur, par les conditions de minimum d'énergie libre du cristal. Les dimensions linéaires des domaines sont de 10^{-3} à 10^{-2} cm.

8° La zone transitoire entre deux domaines de différente orientation magnétique, qui est d'épaisseur finie (pour le fer cette zone est égale à $\sim$ 300 périodes du réseau), possède une aimantation hétérogène. Cette zone est caractérisée par une certaine énergie superficielle libre, égale au travail extérieur dépensé sur sa formation. Les parois qui limitent les domaines d'un cristal à l'état désaimanté d'équilibre passent par les endroits du cristal répondant aux conditions de minimum d'énergie libre du cristal et assurant l'absence d'aimantation macroscopique résultante dans celui-ci.

La preuve expérimentale de l'existence de domaines d'aimantation spontanée est: a) le caractère discontinu de la courbe d'aimantation (9°) dans la région de champs extérieurs faibles (au voisinage de la montée brusque de la courbe): *effet Barkhausen*; b) les hétérogénéités dans la répartition des poudres magnétiques à la surface d'un cristal ferromagnétique (figures de Bitter-Akoulov).

9° On appelle *processus d'aimantation des ferromagnétiques* l'apparition d'une aimantation résultante dans ceux-ci sous l'action d'un champ magnétique extérieur. La dépendance de l'aimantation I de l'intensité H du champ extérieur $I = f(H)$ est appelée *courbe d'aimantation* (fig. IV.9.2).

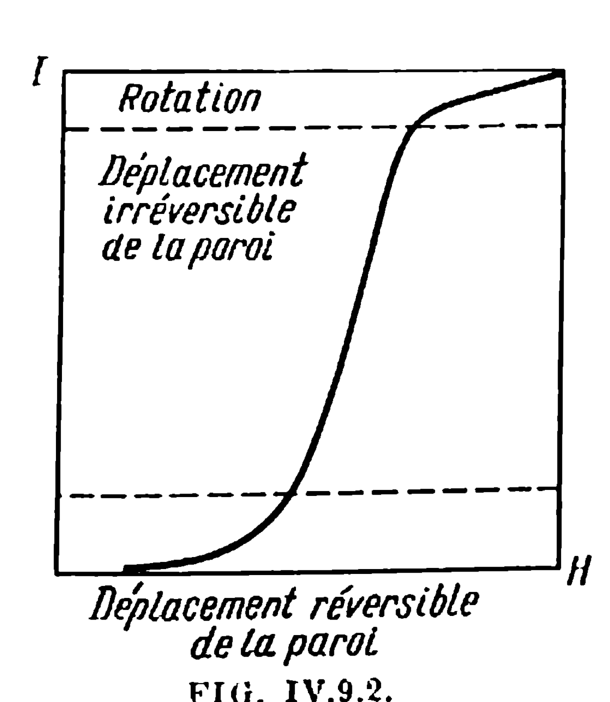


FIG. IV.9.2.

Il existe deux types de processus d'aimantation:

a) le *déplacement des parois* consistant en l'accroissement des domaines, dans lesquels l'aimantation est orientée presque parallèlement à la direction du champ extérieur au détriment des domaines voisins;

b) la *rotation* consistant en la modification de la direction de l'aimantation spontanée des domaines isolés ou de tout le cristal par rotation du vecteur aimantation à saturation.

10° Le déplacement des parois a lieu à une vitesse finie, lors de l'accroissement du champ magnétique extérieur, et peut être réversible ou irréversible. Dans le cas où le déplacement des parois des phases magnétiques est réversible, lors de l'affaiblissement quasi statique du champ extérieur, les parois des domaines se déplacent dans le sens contraire, en passant par les mêmes endroits dans le cristal, et les domaines occupent leurs positions initiales lorsque $H = 0$. Le déplacement réversible est observé à la partie initiale de la courbe d'aimantation. Le déplacement irréversible des parois des domaines ne disparaît pas lors de l'affaiblissement du champ magnétique. Les positions initiales des domaines peuvent être atteintes par *inversion de l'aimantation*. L'achèvement des processus de déplacement des parois dans les cristaux ferromagnétiques conduit à la saturation de ces derniers le long d'un des axes de facile aimantation, le plus proche de la direction du champ magnétisant.

11° L'accroissement de l'intensité du champ magnétique extérieur après l'achèvement des processus de déplacement excite des processus de rotation du vecteur aimantation **I**, qui prennent fin quand les vecteurs **I** et **H** deviennent parallèles. La division de la courbe d'aimantation en segments se différant par leur nature a un caractère relatif. Dans la région de champs faibles, au-dessous du maximum sur la courbe de Stolétov (voir fig. IV.9.4) $\varkappa_{\text{dépl}} \gg \varkappa_{\text{rot}}$; dans celui des champs moyens (après le maximum de la courbe $\varkappa(H)$ sur le segment en pente douce de la courbe $I(H)$ (fig. IV.9.2) $\varkappa_{\text{rot}} \gg \varkappa_{\text{dépl}}$, où $\varkappa_{\text{dépl}}$ et $\varkappa_{\text{rot}}$ sont les susceptibilités magnétiques du ferromagnétique liées aux processus de déplacement des parois et de rotation (9°).

12° Le phénomène d'*hystérésis magnétique* des ferromagnétiques consiste en retard de la variation de l'induction magnétique **B** sur la variation de l'intensité de champ extérieur magnétisant, conditionné par la dépendance de **B** de ses valeurs précédentes. L'hystérésis magnétique est la conséquence des variations irréversibles qui ont lieu lors de l'aimantation et de l'inversion d'aimantation. L'hystérésis magnétique est due aux processus irréversibles de déplacement des parois entre les domaines d'aimantation spontanée et aux processus de rotation (p. 498, 9°). On appelle *cycle* ou *boucle d'hystérésis* (fig. IV.9.3) la courbe de variation de l'induction magnétique du corps ferromagnétique introduit dans

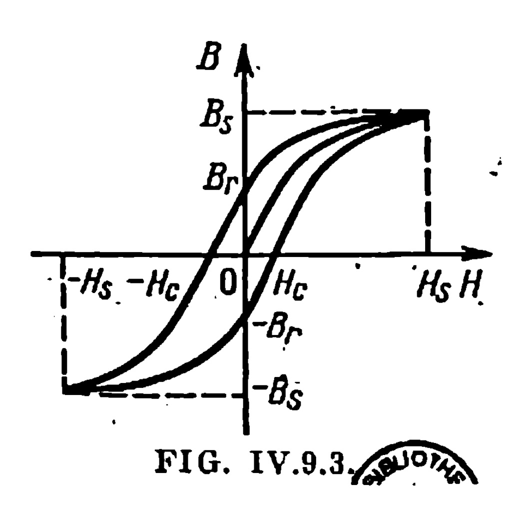


FIG. IV.9.3.

un champ magnétique extérieur lors de la variation de l'intensité de ce dernier de $+H_s$ à $-H_s$ et inversement, où H_s est l'intensité de champ magnétique correspondant à la saturation. L'*induction de saturation* est la valeur de l'induction magnétique $\pm B_s$ atteinte pour l'intensité de champ extérieur égale à $\pm H_s$. L'induction magnétique $\pm B$ conservée dans l'échantillon après la décroissance de l'intensité de champ de $\pm H_s$ à 0 est dite *induction rémanente*, la fabrication des aimants permanents est fondée sur son existence. L'intensité H_c du champ inverse qui annule l'induction magnétique est appelée *champ coercitif*. L'aire du cycle d'hystérésis P_h *(pertes par hystérésis)* est proportionnelle au travail développé lors de l'inversion d'aimantation

$$P_h = \oint H\, dB \quad \text{(en u. SI)}.$$

Selon les valeurs de H_c et P_h les ferromagnétiques se divisent en ferromagnétiques *doux* (H_c est de l'ordre de dizaines d'œrsteds, l'aire P_h est petite) et en ferromagnétiques *durs* (H_c est de l'ordre de 10^2-10^3 Œ, P_h est grande).

13° La courbe montrant la dépendance de la susceptibilité magnétique $\varkappa_m$ d'un corps ferromagnétique vis-à-vis de l'intensité H du champ magnétisant extérieur est appelée *courbe de Stolétov* (fig. IV.9.4).

14° La température de Curie Θ_C pour les ferromagnétiques et Θ_{aC} pour les antiferromagnétiques représente un point de transition de phase du deuxième ordre. A cette température les cristaux perdent leurs propriétés ferromagnétiques (antiferromagnétiques); la structure du réseau cristallin, la capacité calorifique, la conductibilité électrique et autres caractéristiques physiques subissent des modifications.

15° On appelle *phénomène de magnétostriction* la modification de la forme et du volume du corps ferromagnétique lors de son aimantation. La *magnétostriction linéaire* $\Delta l/l$, où Δl est l'allongement de l'échantillon, l sa longueur initiale, représente la mesure de l'effet magnétostrictif. On distingue la magnétostriction spontanée et la magnétostriction vraie. La *magnétostriction spontanée* dans chaque domaine est liée au fait qu'avec l'apparition de l'aimantation spontanée les conditions d'équilibre entre les nœuds du réseau cristallin changent et la déformation anisotrope

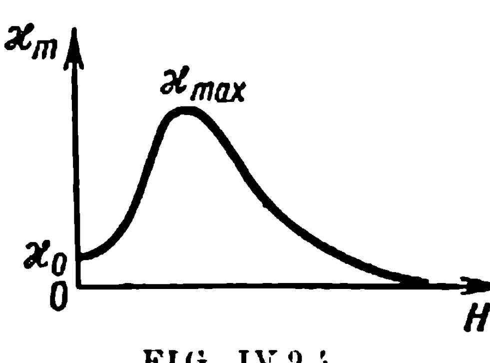


FIG. IV.9.4.

de celui-ci a lieu. Si le cristal ferromagnétique n'est pas aimanté en entier, la magnétostriction spontanée ne se manifeste pas. Elle est observée dans les processus d'aimantation. On appelle *magnétostriction vraie* la variation de la longueur des échantillons ferromagnétiques soumis à l'action de champs magnétiques extérieurs suffisamment intenses. Elle surgit dans les processus d'aimantation et est liée à l'orientation parallèle des vecteurs aimantation des domaines par suite du changement des conditions d'équilibre entre les nœuds du réseau cristallin. On appelle *vibrations magnétostrictives* les vibrations mécaniques surgissant dans les ferromagnétiques au cours de leur aimantation dans un champ magnétique à variation périodique. Elles sont utilisées dans les vibrateurs magnétostrictifs *ultrasonores*. On observe dans les ferromagnétiques un phénomène inverse au phénomène de magnétostriction consistant en une variation de l'aimantation lors des déformations.

16° On appelle *ferrites* les semiconducteurs ferromagnétiques de formule chimique générale $MOFe_2O_3$, où M est l'ion divalent d'un métal quelconque (Cu^{++}, Zn^{++}, Ni^{++}, etc.). Ils se distinguent par leurs propriétés ferromagnétiques marquées et sont de mauvais conducteurs de l'électricité. On les utilise pour les circuits magnétiques dans les dispositifs fonctionnant aux hautes fréquences (pertes faibles par courants de Foucault, cf. également p. 477).

7. Supraconductivité

1° On appelle *supraconductivité* la disparition pratiquement complète de la résistivité électrique de certains métaux (Pb, Zn, Al, etc.) et alliages (bismuth-or, carbures de molybdène et de tungstène, nitrure de niobium, etc.) à une certaine température T_c appelée *température de transition à l'état supraconducteur*. Les corps jouissant d'une telle propriété sont appelés *supraconducteurs*. La dépendance entre la résistivité électrique des supraconducteurs (fig. IV.9.5) et la température montre que la région transitoire d'apparition de la supraconductivité possède une largeur finie AB dépendant de la présence d'impuretés et de contraintes internes. Pour les supraconducteurs purs AB est de l'ordre de 10^{-3} degré. Les températures T_c des métaux purs sont comprises dans les limites de 0,35 °K (hafnium) à 9,22 °K (niobium), celles des alliages dans les limites de 0,155 °K (BiPt) à 18 °K (Nb_3Sn).

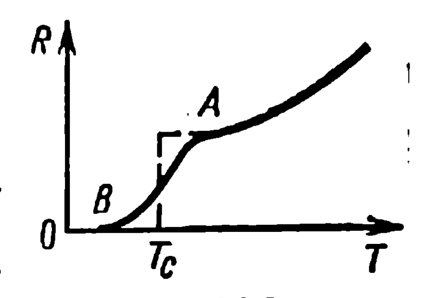


FIG. IV.9.5.

2° Les températures T_c sont inversement proportionnelles aux racines carrées des

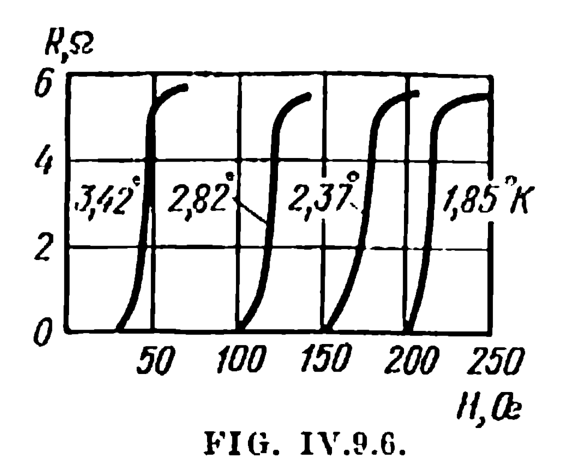


FIG. IV.9.6.

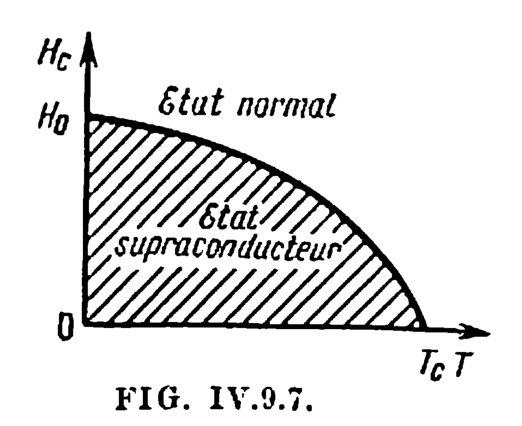


FIG. IV.9.7.

poids atomiques des isotopes (p. 832) d'un même métal supraconducteur *(effet isotopique)*.

3° Le champ magnétique agissant sur le supraconducteur provoque une baisse de la température T_c (1°). Les courbes donnant la dépendance de la résistance R de l'étain blanc vis-à-vis du champ magnétique H à différentes températures sont représentées fig. IV.9.6. Le champ magnétique provoquant, à la température donnée, la transition de la substance de l'état supraconducteur à l'état normal est appelé *champ critique.* Avec la baisse de la température T du supraconducteur le champ critique H_c augmente (fig. IV.9.7). En première approximation $H_c = H_0 \left[1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^2\right]$.

4° Les propriétés supraconductrices des conducteurs disparaissent lorsqu'on fait passer par ceux-ci un courant suffisamment intense. Ceci est lié à l'action du champ magnétique des courants sur les conducteurs, détruisant l'état supraconducteur.

5° Les champs magnétiques plus faibles que le champ critique (3°) ne pénètrent pas dans l'épaisseur du supraconducteur: l'induction magnétique B à l'intérieur du supraconducteur est nulle. Sur la figure IV.9.8 le champ magnétique uniforme est dirigé suivant l'axe d'un supraconducteur. Le supraconducteur représente un diamagnétique parfait de susceptibilité magnétique $\varkappa_m = -1$ (p. 495). La décroissance de l'intensité de champ magnétique dans un supraconducteur massif plan suivant la normale à la surface s'opère d'après la loi

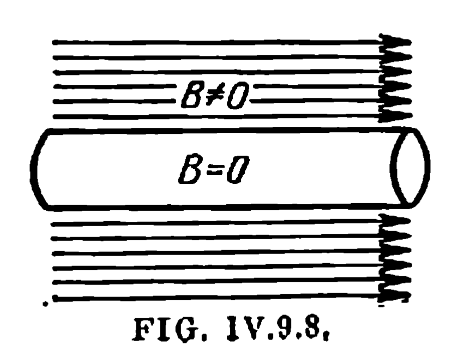


FIG. IV.9.8.

$$H = H_0 e^{-\frac{x}{\delta}},$$

où x est la distance de la surface, H_0 l'intensité de champ magnétique à la

surface, δ une constante déterminant la profondeur de pénétration du champ magnétique dans le supraconducteur:

$$\delta = \sqrt{\frac{mc^2}{4\pi e^2 n_{0\,supr}}} \quad \text{(en u. du système de Gauss)},$$

où m est la masse de l'électron, e sa charge, c la vitesse de la lumière dans le vide, $n_{0\,supr}$, le nombre d'électrons participant au courant de supraconduction par unité de volume. Lorsque $T < T_c$, la grandeur $\delta \approx 10^{-5}$ cm, lorsque $T \to T_c$, $\delta \to \infty$. Autrement dit, aux températures supérieures à T_c l'état supraconducteur se transforme en état normal et le champ magnétique se répartit dans tout le volume du conducteur.

6° En présence d'un champ magnétique la transition isotherme de l'état supraconducteur à l'état normal est liée à une absorption de chaleur et à un changement brusque de la capacité calorifique et de la conductibilité thermique de la substance: la transition inverse est liée à un dégagement de chaleur.

7° En vertu de la *théorie thermodynamique de supraconductivité* les états supraconducteur et normal représentent deux phases de la substance se transformant l'une dans l'autre à des valeurs déterminées des paramètres d'état: la température T et le champ magnétique H, correspondant à la courbe $H_c = f(T)$ (fig. IV.9.7). Le passage du supraconducteur à l'état normal sous l'action du champ magnétique, c'est-à-dire lorsque $T < T_c$, représente une transition de phase du premier ordre. Le passage du supraconducteur à l'état normal, en l'absence de champ magnétique, est une transition de phase du deuxième ordre.

8° La théorie moderne de la supraconductivité considère ce phénomène comme la superfluidité (p. 276) des électrons dans le métal. Une interaction particulière entre électrons (avec émission ou absorption de phonons) peut conduire à leur attraction mutuelle (formation de paires). Cet effet peut être, dans certains cas, la cause de transition à l'état supraconducteur. Dans le système d'électrons interagissant de la sorte tous les électrons de conduction forment un ensemble lié, qui ne peut céder d'énergie par petites portions, autrement dit, la diffusion des électrons sur les vibrations thermiques des ions (p. 394) ne se produit pas. Pour rompre la liaison de l'électron avec les autres électrons, il faut dépenser une certaine énergie correspondant à l'énergie moyenne des vibrations thermiques des nœuds du réseau à la température T_c (1°). C'est pourquoi, lorsque $T > T_c$, il n'y a ni apparition d'états liés, ni manifestation de propriétés supraconductrices.

9° Dans certains alliages soumis à des champs magnétiques d'intensité supérieure à H_c (p. 501), peut apparaître un état supraconducteur provenant de ce que le champ magnétique pénètre dans le supraconducteur sous forme de fins fils perçant l'échantillon. La substance entre les fils se trouve être supraconductrice et la résistance de tout l'échantillon, nulle. Certains alliages (Nb_3Sn, NbZn) restent supraconducteurs dans des champs jusqu'à 100 Œ et même jusqu'à 200 Œ. Ce fait est utilisé dans la technique d'obtention de champs magnétiques intenses. Les aimants basés sur les solénoïdes supraconducteurs ont trouvé une large utilisation.

10° En théorie moderne de la supraconductivité, on étudie la possibilité de supraconduction dans les molécules organiques longues. Donc, si dans une longue chaîne unidimensionnelle d'atomes ayant des branches latérales à forte polarisation *(modèle de Little)* les électrons se déplacent librement, l'électron en se mouvant au voisinage de la branche polarise celle-ci et induit à l'extrémité de la branche la plus proche de la chaîne centrale une certaine charge positive. L'attraction des électrons de cette chaîne principale vers cette charge peut conduire à une attraction efficace entre électrons, dépassant leur répulsion coulombienne. La théorie prédit dans un système d'électrons interagissant de la sorte l'existence d'un état supraconducteur avec une température T_c (p. 501) proche de 2 000 °K.

11° Le phénomène de supraconductivité est observé dans certains semiconducteurs (par exemple dans GeTe et le titanate de strontium $SrTiO_3$). La constante diélectrique relative du titanate de strontium est notable aux basses températures, ce qui diminue considérablement la répulsion coulombienne entre électrons et favorise l'apparition de paires d'électrons assurant la supraconductivité.

Oscillations électromagnétiques

1. Circuit oscillant

1° Dans le cas général le *circuit oscillant* est un circuit électrique constitué d'un condensateur de capacité C monté en série avec une bobine de self-inductance L et avec une résistance R (fig. IV.10.1). La variation de la charge électrique q aux armatures du condensateur dans le temps est décrite par l'équation différentielle

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=0.$$

La solution de cette équation est de la forme (quand $R<2\sqrt{L/C}$)

$$q=A_0e^{-\frac{R}{2L}t}\sin(\omega t+\alpha_0),$$

où $\omega=\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}$ est la pseudo-pulsation. Cette expression montre que la valeur de la charge du condensateur effectue des oscillations amorties (p. 124). La grandeur $\beta=R/2L$ est appelée *coefficient d'amortissement*. L'amplitude des oscillations amorties est:

$$A=A_0\,e^{-\beta t},$$

où A_0 est l'amplitude initiale.

Si, à l'instant initial ($t=0$), la charge aux armatures du condensateur est $q=q_0$ et qu'il n'y ait pas de courant dans le circuit, on a:

$$A_0=\frac{q_0}{\sqrt{1-\frac{R^2C}{4L}}}.$$

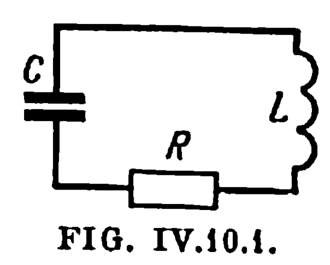


FIG. IV.10.1.

La phase initiale d'oscillations est:

$$\alpha_0 = \text{arc tg} \frac{\omega}{\beta} = \text{arc tg} \sqrt{\frac{4L}{R^2 C} - 1}.$$

2° La tension U_C entre les armatures du condensateur constitue:

$$U_C = \frac{q}{C} = \frac{A_0}{C} e^{-\frac{R}{2L}t} \sin (\omega t + \alpha_0).$$

L'intensité de courant I dans le circuit oscillant est alors:

$$I = -\frac{dq}{dt} = A_0 e^{-\frac{R}{2L}t} \left[\frac{R}{2L} \sin (\omega t + \alpha_0) - \omega \cos (\omega t + \alpha_0)\right].$$

3° La pseudo-période T du circuit (p. 125) est définie par

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}.$$

T croit avec l'augmentation de la résistance R du circuit et devient infinie quand $R = 2\sqrt{L/C}$.

4° Lorsque $R > 2\sqrt{L/C}$, la variation de la charge aux armatures n'a pas de caractère oscillant, la décharge du condensateur est dite *apériodique*. La solution de l'équation différentielle dans ce cas est de la forme:

$$q = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t},$$

où

$$\lambda_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}},$$

$$\lambda_2 = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}},$$

C_1 et C_2 sont des coefficients constants dépendant du choix de l'origine du barème du temps.

5° La variation périodique de la charge aux armatures du condensateur excite un courant électrique alternatif I, une tension variable U_C entre les armatures, des champs électrique et magnétique variables. Les oscillations libres de q, I et U_C sont dites *oscillations électromagnétiques libres*. Quand $q = q_0$ à l'instant $t = 0$, l'énergie d'oscillations est égale à l'énergie électrique du champ du

condensateur. L'énergie des oscillations électromagnétiques décroît (diffuse) au compte du dégagement de la chaleur de Joule dans le circuit, et ces oscillations s'amortissent.

6° Quand $R \to 0$, les oscillations électromagnétiques dans le circuit deviennent des oscillations non amorties ($\beta = 0$). Pour de telles oscillations

$$q = A_0 \sin(\omega_0 t + \alpha_0),$$

$$U_C = \frac{A_0}{C} \sin(\omega_0 t + \alpha_0),$$

$$I = -A_0 \omega_0 \cos(\omega_0 t + \alpha_0),$$

où $\omega_0 = 1/LC$ est la pulsation des oscillations électromagnétiques non amorties libres du circuit. L'intensité de courant est en retard de $\pi/2$ sur la tension entre les armatures.

7° La période T des oscillations non amorties libres s'exprime par la formule de Thomson:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{LC}.$$

8° L'amplitude de l'intensité de courant I_0 et l'amplitude de la tension U_C sont:

$$I_0 = A_0 \omega_0 = \frac{A_0}{\sqrt{LC}}, \quad U_{C_0} = \frac{A_0}{C}.$$

9° Il se produit lors d'oscillations électromagnétiques non amorties libres du circuit une transformation périodique de l'énergie du champ électrique du condensateur en énergie du champ magnétique du courant électrique. Aux instants $t = 0$, $T/2$, T, etc., l'énergie du champ électrique est maximale et égale à $CU_{C_0}^2/2$; alors que l'énergie du champ magnétique est nulle. Aux instants $t = T/4$, $^3/_4\ T$, etc., l'énergie du champ magnétique est maximale et égale à $LI_0^2/2$, tandis que l'énergie du champ électrique est nulle.

De la condition

$$\frac{CU_{C_0}^2}{2} = LI^2$$

suit

$$I_0 = \frac{U_{C_0}}{\sqrt{L/C}}.$$

La grandeur $\sqrt{L/C}$ est dite *impédance d'onde du circuit.*

2. Oscillations électromagnétiques forcées

1° La résistance électrique R d'un circuit oscillant réel diffère de zéro et les oscillations électromagnétiques libres s'amortissent. Pour obtenir des oscillations électromagnétiques non amorties, il est indispensable de fournir au circuit une certaine énergie compensant les pertes en chaleur de Joule. Afin d'entretenir dans le circuit des oscillations électromagnétiques forcées, il est nécessaire d'y brancher une source de courant avec une f.é.m. alternative, sinusoïdale par exemple (fig. IV.10.2):

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 \sin \Omega t,$$

où $\mathscr{E}_0$ est l'amplitude de la f.é.m., Ω sa pulsation. Une f.é.m. continue arbitraire s'exprimant par la fonction $\mathscr{E} = \mathscr{E}(t)$ peut être représentée en vertu du théorème de Fourier sous forme d'une somme (finie ou infinie) de f.é.m. sinusoïdales simples avec différentes amplitudes, phases initiales et pulsations.

2° L'équation différentielle des oscillations électromagnétiques forcées est la suivante:

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = - \mathscr{E}_0 \sin \Omega t;$$

les notations sont données p. 505. La solution de cette équation est représentée sous la forme de la somme de deux termes: la solution complète de l'équation sans second membre (p. 505) et la solution particulière de l'équation. Le premier terme caractérisant les oscillations amorties libres du circuit peut être négligé après un certain temps, compté à partir du début des oscillations. L'intensité de courant du circuit, lors des oscillations forcées permanentes, s'exprime par

$$I = I_0 \sin (\Omega t + \alpha),$$

où I_0 est l'amplitude de l'intensité de courant du circuit:

$$I_0 = \frac{\mathscr{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\Omega C} - \Omega L\right)^2}} = \frac{\mathscr{E}_0}{Z},$$

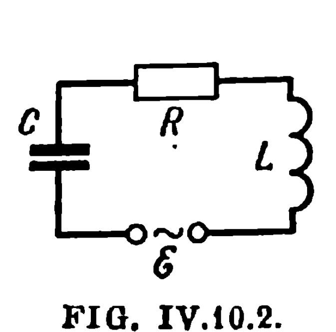


FIG. IV.10.2.

α le déphasage entre l'intensité de courant et la f.é.m. appliquée:

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg} \frac{\frac{1}{\Omega C} - \Omega L}{R}.$$

3° La grandeur

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\Omega C} - L\Omega\right)^2}$$

est dite *impédance* ou *résistance apparente* du circuit électrique du courant alternatif (du circuit oscillant). Elle est constituée de *résistance ohmique* R, de *résistance inductive* $R_L = \Omega L$ et de *capacitance* $R_C = 1/\Omega C$. La résistance inductive pure provoque un déphasage de l'intensité de courant alternatif dans le circuit de $\alpha = -\pi/2$ sur la f.é.m. appliquée. La capacitance pure conduit à une avance de phase de $\alpha = \pi/2$ de l'intensité de courant sur la f.é.m.

4° Pour un courant sinusoïdal alternatif circulant dans un circuit électrique la puissance moyenne reçue au cours d'une période est:

$$\bar{N} = \frac{\mathscr{E}_0 I_0}{2} \cos \alpha,$$

où I_0 et $\mathscr{E}_0$ sont les amplitudes de l'intensité de courant et de la f.é.m. du circuit, α le déphasage entre le courant et la f.é.m.

On appelle *valeurs efficaces* de l'intensité de courant I_{eff} et de la force électromotrice $\mathscr{E}_{eff}$ les valeurs de ces grandeurs en courant continu qui, sur la même résistance ohmique, apporte la même puissance $\bar{N}$ que le courant alternatif. Pour un courant sinusoïdal alternatif

$$I_{eff} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}, \quad \mathscr{E}_{eff} = \frac{\mathscr{E}_0}{\sqrt{2}}.$$

5° L'amplitude de l'intensité de courant dépend non seulement des paramètres du circuit (R, L et C) et de l'amplitude de la f.é.m. $\mathscr{E}_0$, mais aussi de la pulsation Ω. Les figures IV.10.3 et IV.10.4 montrent les dépendances de $I_0(\Omega)$ et $\alpha(\Omega)$ pour R, L, C et $\mathscr{E}_0$ constants.

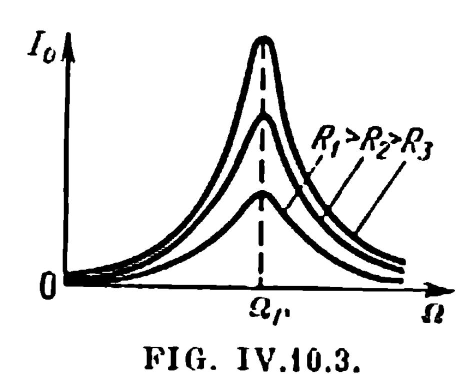


FIG. IV.10.3.

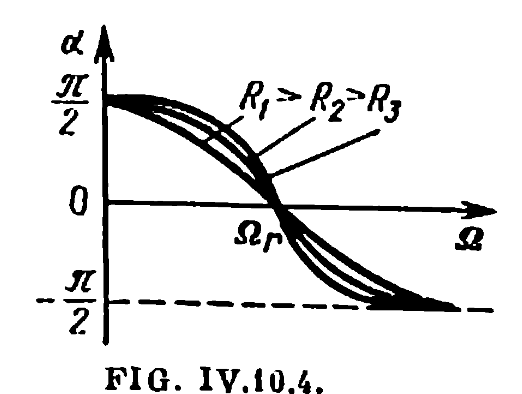


FIG. IV.10.4.

La valeur maximale du courant:

$$I_{0\max} = \frac{\mathscr{E}}{R}$$

est atteinte pour la valeur

$$\Omega = \Omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0,$$

où ω_0 est la pulsation des oscillations non amorties libres du circuit (p. 507). Lorsque $\Omega = \Omega_r$, l'impédance du circuit oscillant est minimale et égale à la résistance ohmique R. Par ailleurs, $\alpha = 0$, autrement dit, l'intensité de courant et la f.é.m. imposée coïncident en phase.

On appelle ***résonance du circuit électrique*** l'augmentation brusque de l'amplitude de l'intensité de courant se produisant dans le circuit oscillant quand $\Omega \to \Omega_r$. Ω_r est appelée ***pulsation de résonance.*** La courbe donnant la dépendance de I_0 de Ω (fig. IV.10.3) est dite ***courbe de résonance.*** Ω_r ne dépend pas de la résistance ohmique R.

6° Les amplitudes des chutes de tension sur l'inductance U_L et sur la capacité U_C lors de la résonance dans le circuit (fig. IV.10.2) sont les mêmes:

$$U_{0L} = U_{0C} = L\,\Omega_r\,I_0 = \frac{I_0}{\Omega_r C},$$

alors que les phases sont contraires: U_L est en avance de π sur U_C de sorte que $U_L + U_C = 0$. La chute totale de tension dans le circuit (fig. IV.10.2) est égale à la chute de tension U_R sur la résistance ohmique ***(résonance de tension).***

7° Lorsqu'on insère dans un circuit électrique, de capacité C et de self-inductance L montées en parallèle, une f.é.m. sinusoïdale (fig. IV.10.5) $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 \sin \Omega t$, les intensités des courants I_1 et I_2 dans les branches sont égales à

$$I_1 = I_{01} \sin(\Omega t + \alpha_1), \quad I_2 = I_{02} \sin(\Omega t + \alpha_2),$$

où

$$I_{01} = \frac{\mathscr{E}_0}{\sqrt{R_1^2 + \frac{1}{\Omega^2 C^2}}}, \quad I_{02} = \frac{\mathscr{E}_0}{\sqrt{R_2^2 + \Omega^2 L^2}},$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{1}{\Omega C R_1}, \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = -\frac{\Omega L}{R_2}.$$

FIG. IV.10.5.

L'intensité de courant dans la partie de circuit sans dérivations est:

$$I = I_0 \sin(\Omega t + \alpha),$$

où

$$I_0 = \sqrt{I_{01}^2 + I_{02}^2 + 2I_{01}I_{02}\cos(\alpha_2 - \alpha_1)},$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{I_{01}\sin\alpha_1 + I_{02}\sin\alpha_2}{I_{01}\cos\alpha_1 + I_{02}\cos\alpha_2}.$$

Si les résistances ohmiques des dérivations sont nulles ($R_1 = R_2 = 0$), on a:

$$I_{01} = \frac{\mathscr{E}_0}{\frac{1}{\Omega C}}, \quad I_{02} = \frac{\mathscr{E}_0}{\Omega L}, \quad \operatorname{tg}\alpha_1 = \infty, \ \operatorname{tg}\alpha_2 = -\infty,$$

c'est-à-dire $\alpha_1 = \pi/2$ et $\alpha_2 = 3\pi/2$; les courants dans les dérivations sont de phase contraire. L'amplitude du courant dans la partie de circuit sans dérivations est:

$$I_0 = |I_{01} - I_{02}| = \mathscr{E}_0 \left|\Omega C - \frac{1}{\Omega L}\right|.$$

Lorsque $\Omega = \Omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $I_{01} = I_{02}$ et $I_0 = 0$. La diminution brusque de l'amplitude de l'intensité de courant du circuit extérieur alimentant la résistance inductive et la capacitance en parallèle, lorsque $\Omega \to \Omega_r = 1/\sqrt{LC}$, est appelée ***résonance de courant*** ou ***antirésonance***.

8° Lorsqu'on fait agir sur le circuit oscillant une f.é.m. représentant la somme de plusieurs f.é.m. sinusoïdales de différentes pulsations Ω_i,

$$\mathscr{E} = \sum_{i=1}^{n} \mathscr{E}_{0i} \sin \Omega_i t,$$

le circuit, grâce au phénomène de résonance, réagit plus intensément à celle des composantes de la f.é.m. dont la pulsation Ω_k est égale ou la plus proche de la pulsation de résonance Ω_r du circuit. Dans les récepteurs radio (p. 607), basés sur ce principe, la pulsation de résonance varie au compte de la variation de la capacité ou de la self-inductance du circuit.

9° L'influence sur le circuit oscillant des f.é.m. imposées, dont les fréquences sont différentes de Ω_r, est d'autant plus faible que

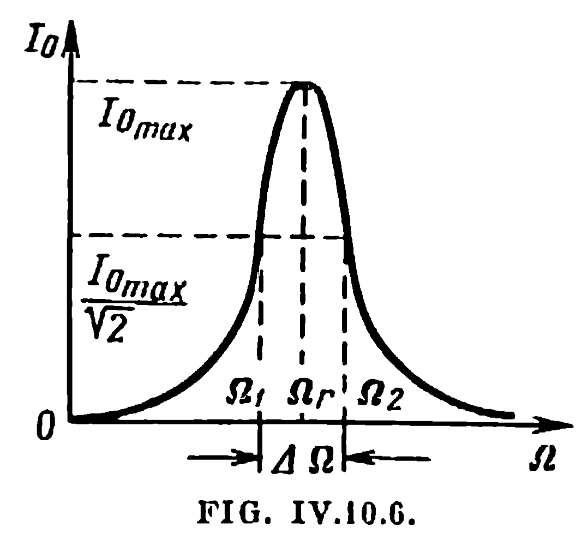


FIG. IV.10.6.

plus aiguë est la courbe de résonance $I_0(\Omega)$ au voisinage de la valeur $\Omega = \Omega_r = \omega_0$. L'acuité de la courbe de résonance est caractérisée par sa *demi-largeur relative* $\Delta\Omega/\Omega_r$:

$$\frac{\Delta\Omega}{\Omega_r} = \frac{2\beta}{\Omega_r},$$

où $\Delta\Omega = \Omega_2 - \Omega_1$ est la différence des valeurs de la pulsation correspondant à $I_0^2 = \frac{1}{2} I_{0max}^2$ (fig. IV.10.6), β le coefficient d'amortissement du circuit (p. 505), Ω_r la pulsation de résonance.

La grandeur

$$Q = \frac{\Omega_r}{2\beta} = \frac{\Omega_r}{R/L}$$

est appelée *facteur de qualité du circuit.*

Par conséquent,

$$\frac{\Delta\Omega}{\Omega_r} = \frac{1}{Q}.$$

8. Redresseurs et amplificateurs électroniques et à semiconducteurs

1° Pour redresser le courant alternatif et amplifier les oscillations électromagnétiques, on utilise des circuits électriques appelés *redresseurs* et *amplificateurs*. Les tubes électroniques et les semiconducteurs constituent leur partie principale.

2° Les *tubes électroniques* sont basés sur le phénomène d'émission thermoélectronique (p. 438). Le tube électronique le plus simple à deux électrodes, appelé *diode*, est schématiquement représenté fig. IV.10.7. A une température constante de chauffage de la cathode (du filament) du tube, le courant I_A dans la diode dépend de la tension anodique U_A (p. 439).

3° Les diodes possèdent une conductibilité unilatérale *(unipolaire)*: le courant dans le tube n'est possible que lorsque la tension U_A est supérieure à zéro; ceci permet de les utiliser pour redresser le courant alternatif. La diode à vide servant au redressement du courant alternatif est appelée *kénotron*.

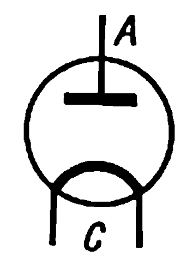


FIG. IV.10.7.

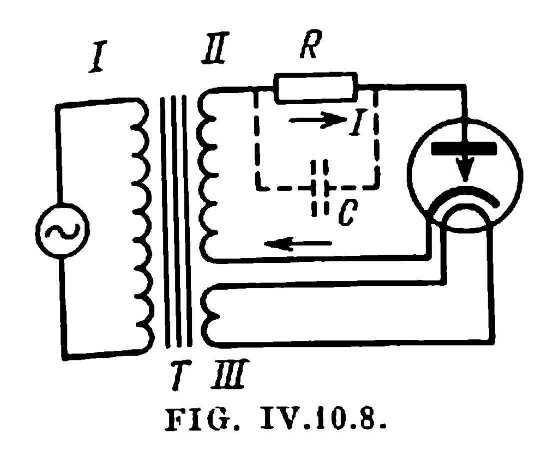


FIG. IV.10.8.

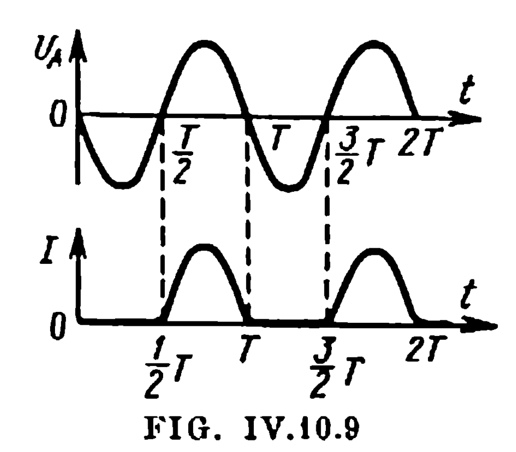


FIG. IV.10.9

4° La figure IV.10.8 montre le schéma d'un simple redresseur kénotron *à une alternance*. L'enroulement primaire *I* du transformateur *T* est connecté à la source de courant alternatif. L'enroulement secondaire *III* alimente le filament du kénotron. Les extrémités de l'enroulement secondaire *II* sont connectées à l'anode et à la cathode. Le courant dans le tube et dans la résistance de charge *R* circule dans un sens, indiqué par les flèches. Sa valeur numérique varie *(courant pulsatoire)*. Les variations du courant pulsatoire en une période sont montrées fig. IV.10.9. Dans la première demi-période $U_A < 0$ et $I = 0$. L'aplatissement des pulsations du courant redressé est réalisé à l'aide de *filtres:* condensateur ou *self* montés en parallèle ou en série avec la résistance de charge *R*. L'aplatissement des pulsations par la self est basé sur le phénomène de self-induction (p. 477). On utilise dans les redresseurs kénotrons *à deux alternances* une diode bianodique *(diode jumelée)*, ce qui permet de redresser le courant dans les deux demi-périodes (fig. IV.10.10).

5° Le principe des redresseurs à semiconducteurs (à l'oxyde cuivreux, au sélénium et au germanium) est basé sur la conduction unipolaire de la jonction *p-n* des semiconducteurs à trous et électroniques (p. 431). On donne sur la figure IV.10.11 la désignation conventionnelle de la diode semiconductrice et sur les figures IV.10.12 et IV.10.13 les schémas des redresseurs à semicon-

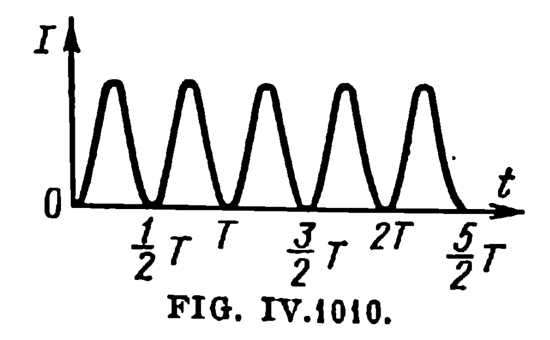


FIG. IV.1010.

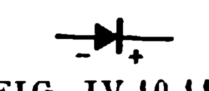


FIG. IV.10.11.

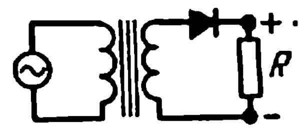


FIG. IV.10.12.

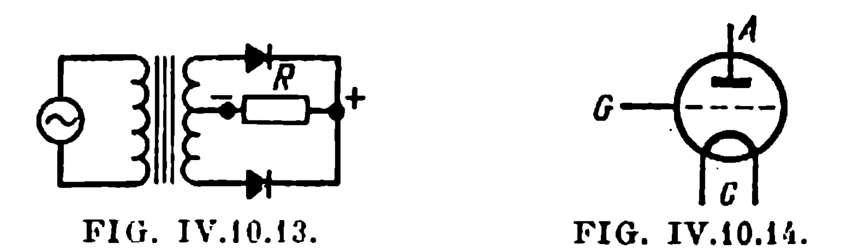


FIG. IV.10.13. FIG. IV.10.14.

ducteurs à une alternance et des redresseurs à deux alternances. L'effet redresseur de valve des diodes semiconductrices est sensible aux variations de température et diminue avec l'élévation de celle-ci. La plage utile de températures pour différents types de diodes semiconductrices s'étend de $-60\,°C$ à $+(50\div90)\,°C$.

6° Pour amplifier les oscillations électromagnétiques, on utilise des *triodes* électroniques et semiconductrices, ainsi que des tubes électroniques à électrodes multiples *(tétrodes, pentodes)*. Dans la triode une *grille de commande G* est insérée entre la cathode C (au voisinage de celle-ci) et l'anode A (fig. IV.10.14). La dépendance du courant anodique I_A vis-à-vis de la tension U_G entre la grille et la cathode *(tension de grille)* pour une valeur constante de la tension U_A entre l'anode et la cathode *(tension anodique)* et un chauffage constant du tube est appelée *caractéristique statique de grille* du tube. Les caractéristiques statiques de grille de la triode pour différentes U_A sont représentées fig. IV.10.15. La tension de grille négative, à laquelle le courant anodique n'existe pas, est appelée *tension de blocage* du tube. Elle croît en valeur absolue avec l'accroissement de la tension anodique.

La grandeur S, numériquement égale à la tangente de l'angle d'inclinaison de la caractéristique de grille par rapport à l'axe U_G, est appelée *pente de la caractéristique de grille* de la triode

$$S=\left(\frac{\partial I_A}{\partial U_G}\right)_{U_A}.$$

7° La dépendance du courant anodique I_A vis-à-vis de la tension anodique U_A, pour $U_G=\text{const}$ et un chauffage constant, est appelée *caractéristique statique anodique* du tube. La famille de telles caractéristiques pour différentes U_G est montrée fig. IV.10.16. La grandeur R_i, numériquement égale à la cotangente de l'angle d'inclinaison par rapport

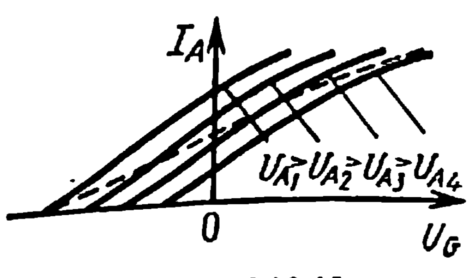


FIG. IV.10.15.

à l'axe U_A tangent à la caractéristique statique anodique, est appelée ***résistance interne de la triode:***

$$R_i = \left(\frac{\partial U_A}{\partial I_A}\right)_{U_G}.$$

8° A une tension constante de chauffage

$$I_A = f(U_A,\ U_G).$$

L'accroissement du courant anodique de la triode constitue:

$$dI_A = \frac{1}{R_i}(dU_A + \mu dU_G),$$

où $\mu = R_iS$ est le ***facteur statique d'amplification d'un tube à trois électrodes.*** La grandeur $D = 1/\mu = 1/R_iS$ est dite ***transparence de grille.***

9° Le schéma d'un simple amplificateur de tension variable est donné fig. IV.10.17. La tension variable à amplifier U_1 est appliquée à la grille de la triode. La tension amplifiée U_2 est prélevée sur les extrémités de la résistance ohmique R_A insérée dans le circuit anodique. Les batteries B_G et B_A créent une tension négative constante U_{G_0} entre la grille et la cathode et une tension positive U_A entre l'anode et la cathode:

$$U_G = U_{G_0} + U_1 = -\mathcal{E}_1 + U_1,\quad U_A = \mathcal{E}_2 - I_A(R_A + r_A),$$

où $\mathcal{E}_1$ est la f.é.m. de la batterie B_G, $\mathcal{E}_2$ la f.é.m. de la batterie B_A, r_A sa résistance interne, I_A le courant anodique. Etant donné que $r_A \ll R_A$, on a:

$$U_A = \mathcal{E}_2 - I_AR_A = \mathcal{E}_2 - U_2.$$

Lorsque $\mathcal{E}_2$ et R_A sont constantes, la tension anodique baisse avec l'accroissement de U_G. La dépendance $I_A = f(U_G)$, pour $\mathcal{E}_2$ et R_A

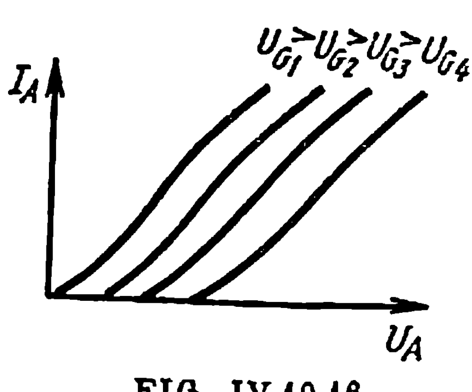


FIG. IV.10.16.

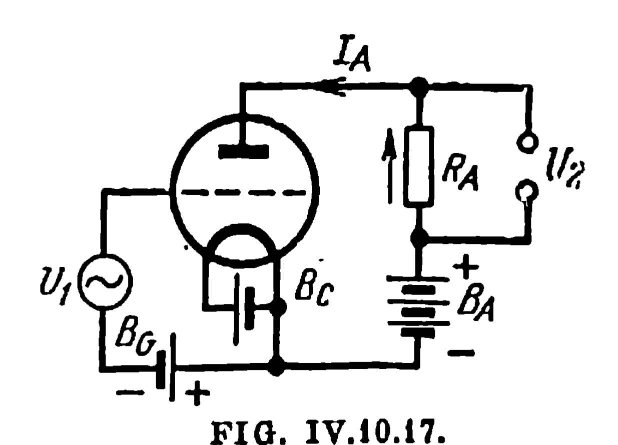


FIG. IV.10.17.

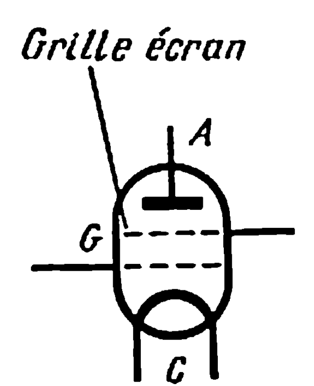


FIG. IV.10.18.

constantes, est appelée *caractéristique dynamique de la triode* (ligne en pointillé sur la figure IV.10.15).

10° Le *facteur d'amplification* K est le rapport des variations des tensions de sortie U_2 et d'entrée U_1:

$$K = \frac{dU_2}{dU_1} = \frac{\mu}{1 + \frac{R_i}{R_A}};$$

lorsque $R_A \gg R_i$, le coefficient $K \approx \mu$.

11° Pour augmenter le facteur statique d'amplification, on diminue la capacité mutuelle C_{AC} de l'anode et de la cathode *(capacité de sortie)*. Pour diminuer C_{AC}, on établit entre l'anode et la grille de commande une *grille écran (tétrode*, fig. IV.10.18). Le potentiel de la grille écran est constant et de beaucoup inférieur à celui de l'anode: ceci permet d'atteindre un affaiblissement du champ électrique de l'anode au voisinage de la grille de commande et de la cathode et une augmentation de μ.

12° La dépendance du courant anodique I_A vis-à-vis de la tension anodique U_A, aux tensions constantes de la grille de commande (U_G) et de la grille écran (U_{GE}), représentée fig. IV.10.19, n'est pas uniforme. Lorsque $U_A \to U_{A1}$ les électrons secondaires arrachés de l'anode se dirigent vers la grille écran, diminuant le courant anodique I_A *(effet dynatron)*. Dans le domaine de l'effet dynatron, observé de U_{A1} à U_{A2}, les signaux à amplifier sont distordus et le fonctionnement de la tétrode devient impossible.

13° Pour éliminer l'effet dynatron, on introduit entre l'anode et la grille écran une troisième grille: *grille d'arrêt* (ou *de suppression)* réunie à la cathode *(pentode*, fig. IV.10.20). Le champ élec-

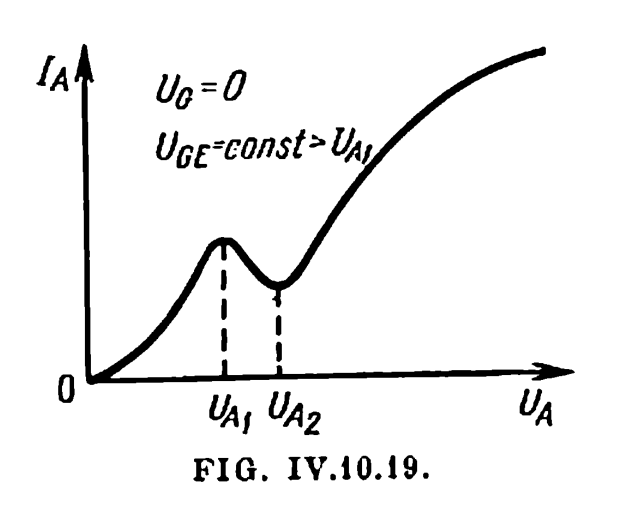


FIG. IV.10.19.

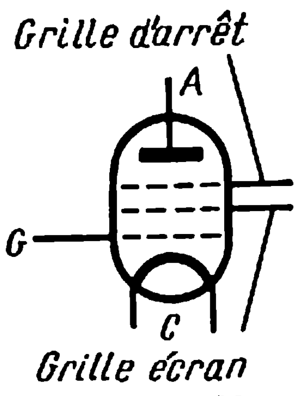


FIG. IV.10.20.

trique entre la grille d'arrêt et l'anode repousse les électrons secondaires vers l'anode, assurant par là même l'accroissement monotone du courant anodique I_A avec l'élévation de la tension anodique U_A.

14° Les *triodes semiconductrices (transistors)* tiennent deux jonctions *p-n* (p. 431). Le schéma d'une triode au germanium *à pointes* est montré fig. IV.10.21. Le cristal du germanium A, possédant une conduction électronique type n (p. 418), est soudé par le bas à la *base* O. Au voisinage des deux électrodes à pointes: émetteur E et le collecteur C, se trouvent des domaines de conduction par trous type p (p. 419). La tension à amplifier U_1 est appliquée à l'émetteur. La tension amplifiée U_2 est prélevée sur la résistance de charge R. La tension U_{EO} entre l'émetteur et la base est positive, c'est pourquoi le courant électrique I dans le circuit émetteur-base traverse toujours le cristal du germanium de E à O dans le sens direct de la jonction *p-n* située au voisinage de l'émetteur (p. 432). La tension U_{CO} entre le collecteur et la base est négative, et le courant électrique dans le circuit collecteur-base ne traverse le cristal du germanium que de O à C, c'est-à-dire dans le sens correspondant à une grande résistance de la jonction *p-n* située au voisinage du collecteur (p. 431).

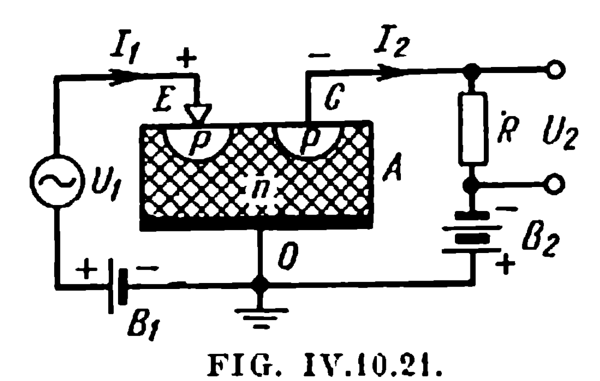


FIG. IV.10.21.

15° La tension U_{EC} entre l'émetteur et le collecteur est positive. Même pour de petites valeurs de U_{EC} et U_{EO} l'intensité de champ électrique est notable au voisinage de la pointe de l'émetteur. Il se forme des trous positifs dans le germanium type p attenant à l'émetteur (p. 417). Le passage des trous du germanium type p dans la partie principale du cristal (type n) est appelé *injection de trous*. L'émetteur et le germanium type p lui attenant représentent une source de porteurs de courant mobiles, autrement dit, jouent le rôle de cathode dans le tube électronique. Le contact du germanium type p et du germanium type n au voisinage du collecteur présente une faible résistance aux trous. L'élévation du courant I_2 dans le circuit du collecteur et la chute de tension sur la résistance R dépendent du nombre de trous qui arrivent par unité de temps à la jonction *p-n*, située au voisinage du collecteur, et font baisser la barrière de potentiel. Le nombre de trous dépend de l'intensité de champ électrique au voisinage de l'émetteur, autrement dit, varie en concordance avec les oscillations de la ten-

sion à amplifier U_1. De ce fait la tension de sortie U_2 de l'amplificateur (fig. IV.10.21) dépend de la tension d'entrée U_1.

16° Aux températures proches de celles auxquelles apparaît la conduction intrinsèque du semiconducteur (p. 416; ≈ 100 °C pour le germanium), le nombre de porteurs de courant libres augmente brusquement, et le réglage de leur nombre, indispensable au fonctionnement de l'amplificateur, devient difficile. La limite supérieure de la température de fonctionnement des triodes au germanium est 55-75 °C. La limite inférieure de la température de fonctionnement (−55 °C généralement) correspond aux énergies de l'agitation thermique des particules pour lesquelles est impossible la libération du nombre nécessaire de porteurs de courant dans le volume du semiconducteur. Ceci conduit à une augmentation de la résistance de l'appareil et celui-ci sort de son régime de travail.

17° On peut créer par dopage des couches type *n* entre deux semiconducteurs type *p* (triode type *p-n-p*, à base d'un semiconducteur type *n*) ou bien une couche type *p* entre deux semiconducteurs type *n* (triode type *n-p-n*, à base d'un semiconducteur type *p*). De telles *triodes semiconductrices planes* possèdent des puissances de sortie supérieures à celles des triodes à pointes; le principe de fonctionnement de ces triodes et le schéma de leur montage sont montrés fig. IV.10.22 et IV.10.23.

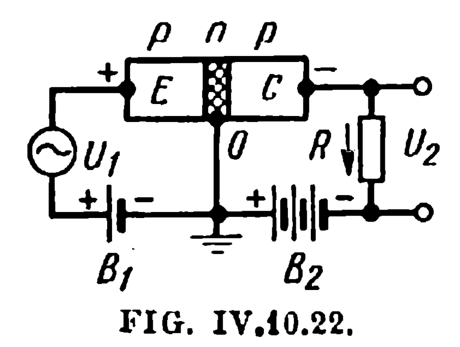


FIG. IV.10.22.

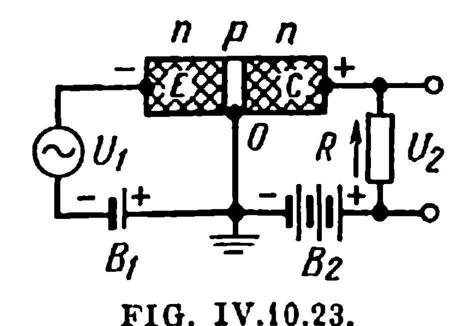


FIG. IV.10.23.

CHAPITRE 11

Eléments de l'électrodynamique des milieux immobiles

1. Caractéristique générale de la théorie de Maxwell

1° La *théorie de Maxwell* représente la généralisation successive des lois fondamentales des phénomènes électriques et électromagnétiques: théorème d'Ostrogradski-Gauss (p. 364), loi du courant total (p. 455) et loi de l'induction électromagnétique (p. 474). Etant la théorie du champ électromagnétique, la théorie de Maxwell permet de résoudre les problèmes liés à la recherche des champs électriques et magnétiques créés par une distribution donnée de charges électriques et de courants.

2° La théorie de Maxwell est *phénoménologique*. Elle donne la description des propriétés électriques et magnétiques du milieu à l'aide de trois grandeurs qui sont la constante diélectrique relative ε, la perméabilité magnétique relative μ et la conductivité électrique γ. La dépendance de ces grandeurs vis-à-vis des propriétés du milieu et le mécanisme interne des phénomènes se produisant dans le milieu et provoquant l'apparition de champs électriques et magnétiques n'y sont pas considérés.

3° La théorie de Maxwell est *macroscopique*. Elle considère les champs créés par les charges et les courants macroscopiques concentrés dans des volumes $V \gg V_m$, où V_m sont les volumes des atomes et molécules isolés. De plus, on suppose réalisées les conditions suivantes:

a) $r \gg d$, où r est la distance des sources des champs aux points considérés de l'espace, d les dimensions linéaires des atomes et molécules;

b) $T \gg T_m$, où T et T_m sont respectivement les temps caractéristiques des variations des champs électriques et magnétiques et des processus intramoléculaires.

4° Les charges et courants macroscopiques représentent des ensembles de charges et de courants microscopiques créant des champs électriques et magnétiques variables *(champs microscopiques*, p. 529). On considère en théorie de Maxwell des champs de valeur moyenne. La moyenne est prise sur les intervalles de temps $t \gg T_m$ pour des secteurs de champ de volume $V \gg V_m$ (cf. 3°).

5° La théorie de Maxwell est une théorie en vertu de laquelle la vitesse de propagation des interactions électriques et magnétiques est égale à la vitesse de la lumière dans un milieu donné. La théorie de Maxwell dévoile la nature électromagnétique de la lumière.

2. Première équation de Maxwell

1° Selon Maxwell, la loi de l'induction électromagnétique (p. 476) sous la forme:

$$\left.\begin{aligned} &\oint_L \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial \Phi_m}{\partial t} && \text{(en u. SI)},\\ &\oint_L \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi_m}{\partial t} && \text{(en u. du système de Gauss)}, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

est valable pour tout circuit fermé (non seulement conducteur) choisi arbitrairement dans un champ magnétique variable. Un champ magnétique variable crée en tout point de l'espace un champ électrique rotationnel. Les formules (1) expriment la *première équation de Maxwell sous forme intégrale.*

2° A l'aide de la relation donnée pour le flux magnétique

$$\Phi_m = \int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = \int_S B_n dS,$$

où B_n est la projection du vecteur induction magnétique sur la normale unité $\mathbf{n}$ à l'élément de surface dS, et à l'aide du théorème de Stokes:

$$\oint_L \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = \int_S \text{rot } \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S},$$

où $d\mathbf{S} = dS\mathbf{n}$, on peut écrire la *première équation de Maxwell sous forme différentielle:*

$$\left.\begin{array}{ll} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \text{(en u. SI)}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \text{(en u. du système de Gauss).} \end{array}\right\} \quad (1')$$

8. Courant de déplacement. Deuxième équation de Maxwell

1° La loi du courant total (p. 456) sous la forme:

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum_{k=1}^{n} I_k \qquad \text{(en u. SI)},$$

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \sum_{k=1}^{n} I_k \qquad \text{(en u. du système de Gauss)},$$

affirme que le champ magnétique est créé par des charges électriques en mouvement ordonné, autrement dit, par des courants de conduction et de convection (p. 391); $\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$ est la circulation du vecteur intensité magnétique le long du circuit fermé L embrassant les courants. Selon Maxwell, le champ électrique variable, dont l'action magnétique se caractérise par un courant de déplacement, représente également une source d'apparition de champ magnétique rotationnel.

2° La *densité de courant de déplacement* est:

$$\mathbf{j}_{\text{dépl}} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \qquad \text{(en u. SI)},$$

$$\mathbf{j}_{\text{dépl}} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \qquad \text{(en u. du système de Gauss).}$$

Le *courant de déplacement* à travers la surface arbitraire S est alors:

$$I_{\text{dépl}} = \int_S \mathbf{j}_{\text{dépl}} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \frac{\partial D_n}{\partial t}\, dS = \frac{\partial \Phi_e}{\partial t} \qquad \text{(en u. SI)},$$

$$I_{\text{dépl}} = \int_S \mathbf{j}_{\text{dépl}} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \frac{1}{4\pi}\frac{\partial D_n}{\partial t}\, dS = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \Phi_e}{\partial t} \qquad \text{(en u. du système de Gauss)},$$

où $\Phi_e = \int_S D_n dS$ est le flux du vecteur déplacement électrique **D** à travers la surface S. Les courants de déplacement assurent la fermeture des circuits de tous courants non continus quelconques. Par exemple, il se crée entre les armatures du condensateur, lors de sa charge ou de sa décharge, un courant de déplacement fermant le circuit.

3° Dans un diélectrique (p. 333).

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}_e \quad \text{(en u. SI)},$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}_e \quad \text{(en u. du système de Gauss)},$$

où $\mathbf{P}_e$ est le vecteur polarisation (p. 379), ε_0 la constante diélectrique (p. 357).

La densité de courant de déplacement dans un diélectrique est:

$$\mathbf{j}_{\text{dépl}} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}_e}{\partial t} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$\mathbf{j}_{\text{dépl}} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}_e}{\partial t} \quad \text{(en u. du système de Gauss)},$$

où $\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ est la *densité de courant de déplacement dans le vide* (en u. SI) ou $\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ (en u. du système de Gauss), $\frac{\partial \mathbf{P}_e}{\partial t}$ la *densité de courant de polarisation.* Le courant de déplacement dans le vide ne produit pas de chaleur de Joule. Le courant de polarisation produit une chaleur due au frottement qui a lieu dans le processus de polarisation du diélectrique.

4° La *loi généralisée du courant total* porte:

$$\left.\begin{aligned} &\oint_L \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = \sum_{k=1}^{n} I_k + I_{\text{dépl}} && \text{(en u. SI)}, \\ &\oint_L \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c}\left(\sum_{k=1}^{n} I_k + I_{\text{dépl}}\right) && \text{(en u. du système de Gauss)}. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Les formules (2) représentent la *deuxième équation de Maxwell sous forme intégrale.*

A l'aide de la formule de Stokes $\oint\limits_L \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = \int\limits_S \text{rot}_n\ \mathbf{H}dS$ et de la relation pour le courant total

$$I_{\text{tot}} = \sum_{k=1}^{n} I_k + I_{\text{dépl}} = \int\limits_S (j_n + j_{n\,\text{dépl}})\,dS,$$

où $\mathbf{j}$ est la densité de courant de conduction, on peut écrire la *deuxième équation de Maxwell sous forme différentielle:*

$$\left.\begin{aligned} &\text{rot}\ \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} && \text{(en u. SI)},\\ &\text{rot}\ \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} && \text{(en u. du système de Gauss)}. \end{aligned}\right\} \quad (2')$$

4. Système complet d'équations de Maxwell pour le champ électromagnétique

1° Outre les équations (1), (2), le système d'équations de Maxwell contient également le théorème d'Ostrogradski-Gauss pour les champs électriques et magnétiques (en u. SI):

$$\Phi_e = \oint\limits_S D_n dS = q, \qquad (3)$$

$$\Phi_m = \oint\limits_S B_n dS = 0, \qquad (4)$$

où Φ_e et Φ_m sont respectivement les flux de déplacement électrique $\mathbf{D}$ et d'induction magnétique $\mathbf{B}$ à travers la surface fermée embrassant la charge libre q. L'équation (4) exprime le fait de l'absence de charges magnétiques libres. En introduisant la notion de densité volumique des charges libres ρ: $q = \int\limits_V \rho\, dV$ (dV est l'élément de volume) et en utilisant le théorème de Gauss $\oint\limits_S A_n dS = \int\limits_V \text{div}\mathbf{A}\,dV$, on tire des équations (3), (4) les *troisième et quatrième équations de Maxwell sous forme différentielle* (en u. SI):

$$\text{div}\ \mathbf{D} = \rho, \qquad (3')$$

$$\text{div}\ \mathbf{B} = 0. \qquad (4')$$

2° Le système complet d'équations de Maxwell:

$$\left.\begin{array}{ll} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, & \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \end{array}\right\} \text{(en u. SI)}, \quad (5)$$

$$\left.\begin{array}{ll} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} = \dfrac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, & \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \end{array}\right\} \text{(en u. du système de Gauss)} \quad (5')$$

est complété par les équations reliant les vecteurs **E**, **D**, **H** et **B** aux grandeurs décrivant les propriétés électriques et magnétiques du milieu:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_0\mu\mathbf{H}, \quad \mathbf{j} = \gamma\mathbf{E} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \quad \mathbf{j} = \gamma\mathbf{E} \quad \text{(en u. du système de Gauss)},$$

ε est la constante diélectrique relative, μ la perméabilité magnétique relative, γ la conductivité électrique, ε_0 la constante diélectrique, μ_0 la perméabilité magnétique du vide. On suppose ici (et par la suite) que le milieu est isotrope, non ferromagnétique (p. 496) et non ferroélectrique (p. 385).

3° A la surface de séparation de deux milieux sont réalisées les conditions aux limites suivantes:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} D_{n_1} - D_{n_2} = \sigma, \\ B_{n_1} = B_{n_2}, \end{array}\right\} (6) \\ \left.\begin{array}{l} E_{t_1} = E_{t_2}, \\ H_{t_1} - H_{t_2} = j_{sup}, \end{array}\right\} (7) \end{array}\right\} \text{(en u. SI,)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} D_{n_1} - D_{n_2} = 4\pi\sigma, \\ B_{n_1} = B_{n_2}, \end{array}\right\} (6') \\ \left.\begin{array}{l} E_{t_1} = E_{t_2}, \\ H_{t_1} - H_{t_2} = \dfrac{4\pi}{c} j_{sup} \end{array}\right\} (7') \end{array}\right\} \text{(en u. du système de Gauss)},$$

où σ est la densité superficielle des charges libres, **n** le vecteur de la normale à la surface de séparation menée du milieu 2 dans le milieu 1, **t** le vecteur tangent à la surface de séparation. Les équations (6) expriment la continuité des composantes normales

du vecteur induction magnétique et le saut de composantes normales du vecteur déplacement. Les équations (7) établissent la continuité des composantes tangentielles du vecteur champ électrique sur la surface de séparation et le saut de ces composantes pour l'intensité du champ magnétique (j_{sup} est la projection du vecteur densité des courants superficiels de conduction sur la direction $\mathbf{t} \times \mathbf{n}$).

4° Pour les conditions initiales (pour les valeurs des vecteurs **E** et **H** à l'instant initial $t = 0$) le système d'équations de Maxwell n'a qu'une seule solution. Les équations de Maxwell sont invariantes par rapport aux transformations de Lorentz (p. 548).

5. Résolution des équations de Maxwell par la méthode des potentiels retardés (pour ε, μ = const)

1° On introduit pour résoudre le système d'équations de Maxwell les *potentiels scalaire* φ et *vecteur* **A**:

$$\mathbf{B} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A},\quad \mathbf{E} = -\,\mathrm{grad}\,\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \qquad \text{(en u. SI)},$$

$$\mathbf{B} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A},\quad \mathbf{E} = -\,\mathrm{grad}\,\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \qquad \text{(en u. du système de Gauss)}.$$

Une telle introduction n'est pas univoque. Le potentiel vecteur **A** est déterminé au grad ψ près, où ψ est une fonction scalaire arbitraire du point:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 - \mathrm{grad}\,\psi.$$

Le potentiel scalaire est déterminé à la dérivée de la fonction scalaire du point par rapport au temps près:

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

Pour assurer la détermination univoque des potentiels, on impose à **A** et φ la condition de normalisation de Lorentz:

$$\mathrm{div}\,\mathbf{A} + \varepsilon'\mu'\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \qquad \text{(en u. SI)},$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{A} + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \qquad \text{(en u. du système de Gauss)}.$$

Cette condition est réalisée lorsque ψ vérifie l'équation

$$\Delta\psi - \varepsilon'\mu'\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \mathrm{div}\,\mathbf{A}_0 + \varepsilon'\mu'\frac{\partial \varphi_0}{\partial t} \qquad \text{(en u. SI)},$$

où φ_0 et $\mathbf{A}_0$ sont les valeurs particulières des potentiels vérifiant les équations:

$$\left.\begin{aligned} \text{rot rot } \mathbf{A} + \varepsilon'\mu' \ \text{grad } \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \varepsilon'\mu' \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} &= \mu'\mathbf{j}_{\text{cond}}, \\ \Delta\varphi + \text{div}\,\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} &= -\frac{1}{\varepsilon'}\rho; \end{aligned}\right\} \text{(en u. SI)},$$

$\varepsilon' = \varepsilon_0\varepsilon$; $\mu' = \mu_0\mu$ sont la *constante diélectrique absolue* et la *perméabilité magnétique absolue* du milieu, Δ l'opérateur de Laplace (p. 334).

2° Les potentiels scalaire et vecteur vérifient les équations de d'Alembert:

$$\left.\begin{aligned} \Delta\mathbf{A} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\mu'\mathbf{j}_{\text{cond}}, \\ \Delta\varphi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\varepsilon'} \end{aligned}\right\} \text{(en u. SI)},$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta\mathbf{A} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi\mu}{c}\mathbf{j}_{\text{cond}}, \\ \Delta\varphi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho \end{aligned}\right\} \text{(en u. du système de Gauss)}.$$

Ici $v = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$ est la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques dans le milieu donné et c leur vitesse dans le vide, ρ la densité volumique des charges libres, $\mathbf{j}_{\text{cond}}$ la densité des courants de conduction, en u. SI $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \approx 3\cdot10^8$ m/s, en u. du système de Gauss $c \approx 3\cdot10^{10}$ cm/s est la constante électrodynamique (p. 442).

3° Les potentiels φ et $\mathbf{A}$ peuvent être considérés comme *retardés*. Ceci signifie qu'on prend en considération la vitesse finie v de propagation des signaux électromagnétiques:

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon'}\int\limits_{V'}\frac{\rho\left(x', y', z', t - \frac{r}{v}\right)}{r}\,dV' \quad \text{(en u. SI)},$$

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{V'}\frac{\rho\left(x', y', z', t - \frac{r}{v}\right)}{r}\,dV' \quad \text{(en u. du système de Gauss)},$$

$$\mathbf{A}(x, y, z, t) = \frac{\mu'}{4\pi}\int\limits_{V'}\frac{\mathbf{j}\left(x', y', z', t-\frac{r}{v}\right)}{r}\,dV' \quad \text{(en u. SI)},$$

$$\mathbf{A}(x, y, z, t) = \frac{\mu'}{c}\int\limits_{V'}\frac{\mathbf{j}\left(x', y', z', t-\frac{r}{v}\right)}{r}\,dV' \quad \text{(en u. du système de Gauss)},$$

où x, y, z sont les coordonnées du point auquel à l'instant t sont recherchés les potentiels φ et $\mathbf{A}$; x', y', z' sont les coordonnées courantes de l'élément de volume dV', disposé de façon arbitraire; r la distance de l'élément dV' au point d'observation. Les potentiels φ et $\mathbf{A}$ seront déterminés à l'instant t par les valeurs de ρ et de $\mathbf{j}$ à l'instant $t-\frac{r}{v}$ au point situé à la distance r des charges et des courants, autrement dit, des sources du champ.

6. Lois de la conservation dans le champ électromagnétique

1° *Loi de la conservation des charges électriques:* l'affirmation que les charges électriques ne disparaissent pas et ne peuvent être créées établit que la décroissance des charges q dans le volume fermé V par unité de temps est égale à l'intensité de courant:

$$I = -\frac{\partial q}{\partial t}.$$

L'équation de continuité pour la densité volumique des charges représente la forme différentielle de la loi de la conservation de la charge:

$$\operatorname{div}\mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

où $\mathbf{j}$ est la densité des courants de conduction, ρ la densité volumique des charges.

2° L'énergie du champ électromagnétique variable localisée dans l'espace de densité volumique $w = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}$ (p. 483) se propage avec une vitesse de groupe (p. 595). La quantité d'énergie transportée en une seconde par unité de surface perpendicu-

laire à la direction de propagation de l'énergie est déterminée par le *vecteur de Poynting* (densité instantanée du flux d'énergie):

$$\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \qquad \text{(en u. SI)},$$

$$\mathbf{P} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H} \qquad \text{(en u. du système de Gauss)}.$$

La *loi de la conservation de l'énergie dans le champ électromagnétique* (sous forme intégrale) s'exprime de la façon suivante:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V w\, dV = \int_V a\, dV + \oint_S P_n\, dS,$$

où a est la densité volumique de puissance calorifique du courant (p. 395). La décroissance de l'énergie dans le volume V du champ est dépensée pour le dégagement de la chaleur de Joule dans les conducteurs situés dans le champ et pour la propagation de l'énergie à travers la surface fermée S limitant le volume. L'équation de continuité pour la densité volumique d'énergie w:

$$\operatorname{div} \mathbf{P} + \frac{\partial w}{\partial t} = 0$$

représente la forme différentielle de la loi de la conservation de l'énergie dans le champ (en l'absence de charges et de courants).

3° Avec l'énergie du champ électromagnétique est transmise l'impulsion du champ, distribuée dans l'espace de densité volumique $\mathbf{g}$:

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}}{c^2} = \frac{\mathbf{P}}{c^2} \qquad \text{(en u. SI)},$$

$$\mathbf{g} = \frac{1}{4\pi c} \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{\mathbf{P}}{c^2} \qquad \text{(en u. du système de Gauss)}.$$

L'impulsion totale du champ dans le volume V est:

$$\mathbf{G} = \int_V \mathbf{g}\, dV.$$

L'existence de l'impulsion $\mathbf{G}$ du champ électromagnétique se manifeste dans la pression de radiation (p. 732).

Loi de la conservation de l'impulsion du champ électromagnétique:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \mathbf{g}\, dV = -(\mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m) + \oint_S \mathbf{T}_n\, dS,$$

où $\mathbf{F}_e$ et $\mathbf{F}_m$ sont les forces agissant respectivement sur les charges et les courants situés dans le volume V; $\oint_S \mathbf{T}_n \, dS$ l'impulsion transmise en une seconde à travers la surface fermée S limitant le volume; $\mathbf{T}_n$ la force extérieure agissant sur l'unité de surface le long de la normale extérieure $\mathbf{n}$ à celle-ci. La loi de la conservation de l'impulsion dans le champ électromagnétique est remplie si l'on tient compte non seulement de l'impulsion mécanique $\mathbf{K}$ (p. 43) liée aux forces agissant sur les courants et les charges:

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial t} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m,$$

mais aussi de l'impulsion du champ électromagnétique $\mathbf{G}$. Lorsque la surface S embrasse tout le champ, l'impulsion totale dans le volume V est:

$$\mathbf{G} + \mathbf{K} = \text{const.}$$

7. Bases fondamentales de la théorie électronique. Système d'équations de Lorentz

1° La *théorie électronique de Lorentz* représente le développement de la théorie du champ électromagnétique de Maxwell. Elle est fondée sur des conceptions déterminées de la structure de la substance *(théorie microscopique)*. En théorie électronique, la substance est considérée comme étant constituée de particules chargées en mouvement. Pour décrire les phénomènes électromagnétiques dans les milieux, la théorie électronique n'utilise pas les grandeurs ε et μ (p. 524) caractérisant la substance dans la théorie phénoménologique de Maxwell. Les propriétés électriques et magnétiques de la substance et tous les phénomènes électromagnétiques dans les milieux s'expliquent par le caractère de la disposition dans l'espace, du mouvement et de l'interaction des charges électriques dont sont constitués les atomes et les molécules.

2° Il existe en chaque point de l'espace des *champs microscopiques:* électrique d'intensité $\mathbf{e}$ et magnétique d'intensité $\mathbf{h}$, qui vérifient le *système d'équations de Lorentz:*

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{e} &= -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{e} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{h} &= \mathbf{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{h} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(en u. SI)},$$

$$\left.\begin{array}{ll}\operatorname{rot} \mathbf{e} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t}, & \operatorname{div} \mathbf{e} = 4\pi\rho, \\ \operatorname{rot} \mathbf{h} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t}, & \operatorname{div} \mathbf{h} = 0\end{array}\right\} \text{(en u. du système de Gauss).}$$

La densité des courants $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$, où ρ est la densité volumique des charges, $\mathbf{v}$ leur vitesse.

3° Le système d'équations de Lorentz est complété par l'expression de la densité volumique de force de Lorentz $\mathbf{f}$ (p. 461), agissant sur les charges et les courants:

$$\mathbf{f} = \rho\mathbf{e} + \rho\mathbf{v} \times \mu_0\mathbf{h} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$\mathbf{f} = \rho\mathbf{e} + \frac{\rho}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{h} \quad \text{(en u. du système de Gauss).}$$

Les lois de la conservation sont vraies pour les champs microscopiques $\mathbf{e}$ et $\mathbf{h}$ (p. 527).

4° La densité volumique d'énergie w du champ électromagnétique (p. 485), la densité instantanée $\mathbf{P}$ du flux d'énergie, autrement dit, le vecteur de Poynting (p. 528), et la densité volumique d'impulsion $\mathbf{g}$ (p. 528) pour les champs microscopiques sont:

$$w = \frac{1}{2}(\varepsilon_0 e^2 + \mu_0 h^2) \quad \text{(en u. SI)},$$

$$w = \frac{1}{8\pi}(e^2 + h^2) \quad \text{(en u. du système de Gauss);}$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{e} \times \mathbf{h} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$\mathbf{P} = \frac{c}{4\pi}\mathbf{e} \times \mathbf{h} \quad \text{(en u. du système de Gauss);}$$

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{e} \times \mathbf{h}}{c^2} = \frac{\mathbf{P}}{c^2} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$\mathbf{g} = \frac{1}{4\pi c}\mathbf{e} \times \mathbf{h} = \frac{\mathbf{P}}{c^2} \quad \text{(en u. du système de Gauss).}$$

8. Médiation des équations des champs microscopiques

1° Les champs macroscopiques $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{D}$ et $\mathbf{B}$, qui sont observés expérimentalement, peuvent être obtenus en prenant la

valeur moyenne des champs microscopiques e et h sur l'espace-temps (p. 529).

Le système d'équations de Lorentz pour les valeurs moyennes est de la forme:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot} \overline{\mathbf{e}} &= -\mu_0 \frac{\partial \overline{\mathbf{h}}}{\partial t}, & \operatorname{div} \overline{\mathbf{e}} &= \frac{\overline{\rho}}{\varepsilon_0}, \\ \operatorname{rot} \overline{\mathbf{h}} &= \varepsilon_0 \frac{\partial \overline{\mathbf{e}}}{\partial t} + \overline{\rho \mathbf{v}}, & \operatorname{div} \overline{\mathbf{h}} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{(en u. SI)},$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot} \overline{\mathbf{e}} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \overline{\mathbf{h}}}{\partial t}, & \operatorname{div} \overline{\mathbf{e}} &= 4\pi \overline{\rho}, \\ \operatorname{rot} \overline{\mathbf{h}} &= \frac{4}{c} \overline{\rho \mathbf{v}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \overline{\mathbf{e}}}{\partial t}, & \operatorname{div} \overline{\mathbf{h}} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{(en u. du système de Gauss)},$$

où le trait indique la médiation des grandeurs correspondantes.

2° Les charges existant dans le milieu se divisent en charges libres et liées (p. 359).

$$\overline{\rho} = \overline{\rho}_{\text{libres}} + \overline{\rho}_{\text{liées}}.$$

La densité moyenne des charges liées s'exprime par le vecteur polarisation $\mathbf{P}_e$ (p. 381):

$$\overline{\rho}_{\text{liées}} = -\operatorname{div} \mathbf{P}_e.$$

3° La densité moyenne des courants $\overline{\mathbf{j}} = \overline{\rho \mathbf{v}}$ se compose de la densité des courants des charges libres $\overline{\mathbf{j}}_{\text{libres}} = \overline{\rho_{\text{libres}} \mathbf{v}}$ et de la densité des courants des charges liées $\overline{\mathbf{j}}_{\text{liées}} = \overline{\rho_{\text{liées}} \mathbf{v}}$: $\overline{\mathbf{j}} = \overline{\mathbf{j}}_{\text{libres}} + \overline{\mathbf{j}}_{\text{liées}}$.

La densité moyenne des courants des charges liées $\overline{\mathbf{j}}_{\text{liées}}$ se compose de la densité des courants de polarisation $\overline{\mathbf{j}}_{\text{pol}}$ et de la densité des courants d'aimantation $\overline{\mathbf{j}}_{\text{aim}}$: $\overline{\mathbf{j}}_{\text{liées}} = \overline{\mathbf{j}}_{\text{pol}} + \overline{\mathbf{j}}_{\text{aim}}$. Le courant de polarisation représente un déplacement des charges dans les molécules non polaires ou une rotation des axes des molécules polaires au cours de la polarisation: $\overline{\mathbf{j}}_{\text{pol}} = \frac{\partial \mathbf{P}_e}{\partial t}$.

Le courant d'aimantation apparaît par suite de l'existence de courants moléculaires fermés (p. 445) dus au mouvement orbital des électrons dans les atomes et les molécules: $\overline{\mathbf{j}}_{\text{aim}} = \operatorname{rot} \mathbf{I}$, où **I** est le vecteur aimantation (p. 489).

La substitution des expressions de $\bar{\rho}_{\text{liées}}$ et $\bar{\mathbf{j}}$ dans le système d'équations de Lorentz donne les équations suivantes pour les champs macroscopiques:

$$\left.\begin{aligned} \text{rot}\ \bar{\mathbf{e}} &= -\frac{\partial}{\partial t}(\mu_0 \bar{\mathbf{h}}), \\ \text{rot}\ (\bar{\mathbf{h}} - \mathbf{I}) &= \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0 \bar{\mathbf{e}} + \mathbf{P}_e), \\ \text{div}\ (\varepsilon_0 \bar{\mathbf{e}} + \mathbf{P}_e) &= \rho, \quad \text{div}\ \bar{\mathbf{h}} = 0 \end{aligned}\right\} \text{(en u. SI)},$$

$$\left.\begin{aligned} \text{rot}\ \bar{\mathbf{e}} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \bar{\mathbf{h}}}{\partial t}, \\ \text{rot}\ (\bar{\mathbf{h}} - 4\pi \mathbf{I}) &= \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\mathbf{e}} + 4\pi \mathbf{P}_e), \\ \text{div}\ (\bar{\mathbf{e}} + 4\pi \mathbf{P}_e) &= 4\pi\rho, \quad \text{div}\ \bar{\mathbf{h}} = 0 \end{aligned}\right\} \text{(en u. du système de Gauss)},$$

où ρ est la densité volumique des charges libres et $\mathbf{j}$ la densité de courant de ces charges (des courants macroscopiques, p. 445).

4° De la comparaison des équations de Lorentz pour les valeurs moyennes avec les équations de Maxwell sont déduites les formules suivantes:

$$\bar{\mathbf{e}} = \mathbf{E}, \quad \bar{\mathbf{h}} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$\bar{\mathbf{e}} = \mathbf{E}, \quad \bar{\mathbf{h}} = \mathbf{B} \quad \text{(en u. du système de Gauss)},$$

et la relation entre les vecteurs polarisation $\mathbf{P}_e$ et aimantation $\mathbf{I}$ et les champs macroscopiques (pp. 383 et 495):

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}_e, \quad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{I} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}_e, \quad \mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi \mathbf{I} \quad \text{(en u. du système de Gauss)}.$$

5° La théorie électronique décèle le sens physique des constantes macroscopiques ε, μ et γ des substances introduites dans différents champs électriques et magnétiques, constants et variables.

6° La théorie électronique, de même que la théorie phénoménologique de Maxwell, considère des champs électromagnétiques continus. Toutes les questions pour lesquelles est essentielle la discontinuité des champs (effet photoélectrique, p. 725, rayonne-

ment thermique, p. 721, effet Compton, p. 729) n'obtiennent pas d'explication en théorie électronique classique. Ces difficultés sont surmontées en théorie quantique.

7° La théorie électronique classique de conduction (p. 392) étudie les propriétés du gaz classique d'électrons libres. Ceci conduit à toute une série de difficultés (p. 395), qui sont résoutes en statistique de Fermi-Dirac pour le gaz électronique dégénéré dans les métaux (p. 241).

CHAPITRE 12

Eléments de l'hydrodynamique magnétique

1. Equations d'hydrodynamique magnétique

1° L'*hydrodynamique magnétique* étudie l'interaction des champs électromagnétiques avec les milieux liquides et gazeux doués d'une conductibilité électrique notable. Le plasma (p. 411) et les métaux liquides sont des exemples de tels milieux.

2° Dans les problèmes d'hydrodynamique magnétique les milieux étudiés sont supposés continus (p. 323). On ne fait pas de différence entre l'intensité de champ magnétique **H** et l'induction magnétique **B** des milieux (en u. du système de Gauss) étant donné que pour tous les liquides et gaz conducteurs la perméabilité magnétique relative est $\mu \approx 1$. On suppose également que la partie réelle de la constante diélectrique des milieux $\varepsilon = \text{const}$.

Pour la conductibilité électrique des milieux γ on fait les suppositions suivantes:

a) la grandeur γ est homogène et isotrope dans tout le milieu, γ ne dépend pas de H. Ceci est vrai si est réalisée la condition suivante:

$$\omega_L \tau \ll 1,$$

où $\omega_L = eH/2mc$[1]) est la vitesse angulaire de précession de Larmor pour les électrons (p. 488), τ le temps moyen du libre parcours des électrons dans le milieu. Cette condition peut être compromise dans des milieux très raréfiés et pour de hautes intensités du champ magnétique;

[1]) Dans ce chapitre on utilise les unités du système de Gauss.

b) la grandeur γ est suffisamment grande, de sorte que

$$\frac{e}{4\pi}\frac{\omega}{\gamma} \ll 1,$$

où ω est la fréquence des processus évoluant dans le milieu, la fréquence des ondes électromagnétiques se propageant dans le plasma par exemple.

On suppose également que le libre parcours moyen des électrons dans le milieu est très inférieur à un certain paramètre dans le problème donné, par exemple la distance entre deux plaques conductrices entre lesquelles se meut le liquide sous l'action du champ magnétique appliqué.

Cette condition peut ne pas avoir lieu dans des milieux très raréfiés.

On suppose enfin en hydrodynamique magnétique non relativiste que les mouvements du milieu ont lieu à des vitesses v très inférieures à la vitesse de la lumière c dans le vide.

3° Les équations d'hydrodynamique magnétique représentent l'ensemble des équations de Maxwell pour le champ électromagnétique (p. 524), des équations hydrodynamiques de mouvement (p. 333), des équations thermodynamiques d'état du milieu (p. 154) et de l'équation de la loi de la conservation de l'énergie (p. 340).

Lors du mouvement du milieu électroconducteur dans un champ magnétique surgit un courant d'induction dont la densité est égale à

$$\mathbf{j}_{\text{ind}} = \frac{\gamma}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{H},$$

où $\mathbf{v}$ est la vitesse de mouvement du milieu. L'action du champ magnétique sur les courants dans le milieu excite dans celui-ci l'apparition d'une force électromagnétique volumique de densité

$$\mathbf{f}_{\text{él}} = \rho_e \mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{j} \times \mathbf{H},$$

où $\mathbf{j}$ est la densité de courant total:

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_{\text{ind}} + \rho_e \mathbf{v} + \gamma \mathbf{E},$$

où ρ_e est la densité des charges électriques dans le milieu, $\mathbf{E}$ l'intensité de champ électrique dans le milieu. Les grandeurs $\mathbf{j}_{\text{ind}}$ et $\mathbf{f}_{\text{él}}$ expriment la relation existant entre les phénomènes hydrodynamiques et électromagnétiques.

Prenant en considération les suppositions faites p. 534, 2°, on néglige dans l'expression de $\mathbf{j}$ les deux premiers termes et l'on ne conserve que la densité de courant de conduction $\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}$.

En théorie non relativiste, on néglige également le premier terme dans l'expression de $\mathbf{f}_{\text{él}}$ et l'on ne conserve que la force de Lorentz (p. 461) $\mathbf{f} = \frac{1}{c}\,\mathbf{j} \times \mathbf{H}$.

4° Le système complet d'équations d'hydrodynamique magnétique est de la forme:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \text{rot}\,(\mathbf{v} \times \mathbf{H}) + \nu_m \Delta \mathbf{H}, \quad \text{div}\,\mathbf{H} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\,\text{grad}\,p - \frac{1}{4\pi\rho}\,\mathbf{H} \times \text{rot}\,\mathbf{H} +$$

$$+ \frac{\eta}{\rho}\,\Delta\mathbf{v} + \frac{1}{\rho}\left(\zeta + \frac{\eta}{3}\right)\text{grad div}\,\mathbf{v}$$

(l'analogue de l'équation de Navier-Stokes, p. 334),

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}\,(\rho\mathbf{v}) = 0 \quad \text{(l'équation de continuité, p. 333),}$$

$$p = p(\rho,\ T) \quad \text{(l'équation d'état du milieu),}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho u + \frac{H^2}{8\pi}\right) = -\,\text{div}\,\mathbf{w}$$ (l'équation de la loi de la conservation de l'énergie, p. 340),

où $\mathbf{w}$ est la densité du flux d'énergie:

$$\mathbf{w} = \rho\mathbf{v}\left(u + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2}\right) - K\,\text{grad}\,T +$$

$$+ \eta\left\{2\left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2\right] + \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)^2 +\right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right)^2\right] - \frac{2}{3}\,(\text{div}\,\mathbf{v})^2\right\}\mathbf{v} +$$

$$+ \zeta\,(\text{div}\,\mathbf{v})^2\,\mathbf{v} + \frac{1}{4\pi}\,\mathbf{H} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{H}) - \frac{\nu_m}{4\pi}\,\mathbf{H} \times \text{rot}\,\mathbf{H}.$$

Dans ces formules $\nu_m = c^2/4\pi\gamma$ est le *coefficient de «viscosité magnétique»*, η et ζ les coefficients de la première et de la seconde viscosité du milieu (p. 334), ρ la densité du milieu, p la pression, u l'énergie interne spécifique du milieu (p. 325), K le coefficient de conductibilité thermique du milieu (p. 219), T la température absolue, $\mathbf{v}$ la vitesse de mouvement du milieu.

L'obtention de solutions exactes des équations d'hydrodynamique magnétique n'est possible que pour quelques cas de mouvements simples du milieu.

5° Si L et V sont respectivement la dimension linéaire et la vitesse caractéristiques du problème de magnéto-hydrodynamique considéré, la grandeur

$$\mathsf{R}_m = \frac{VL}{\nu_m}$$

est le *nombre magnétique de Reynolds* (p. 346). Dans beaucoup de cas, $\mathsf{R}_m \gg 1$ et l'on peut négliger la résistance électrique du milieu et les pertes par effet Joule (p. 399) liées à celle-ci, ainsi que la dissipation d'énergie magnétique.

6° Pour un milieu parfait ($\eta = \zeta = K = 0$, $\gamma \to \infty$) le système d'équations d'hydrodynamique magnétique prend la forme:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \operatorname{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{H}), \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p - \frac{1}{4\pi\rho} \mathbf{H} \times \operatorname{rot} \mathbf{H},$$

$$\frac{d\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad p = p(\rho, T), \quad \frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) s = 0,$$

si l'on suppose que l'échange de chaleur avec le milieu ambiant n'est pas important, autrement dit, que le mouvement du milieu est adiabatique. Dans la dernière équation s est l'entropie d'une unité de masse de milieu (p. 183), et elle exprime la conservation de l'entropie lors du mouvement adiabatique du milieu (p. 341).

7° La première des équations 6° (quand $\gamma = \infty$) exprime la *loi de la conservation du flux magnétique* à travers une surface quelconque se mouvant avec le milieu. Ceci permet d'introduire la notion de lignes de forces magnétiques, «fixées» au milieu, «congelées» dans le milieu. Dans ce sens la ligne de forces magnétiques est une ligne liée aux particules du milieu et se mouvant avec celles-ci.

8° Pour le liquide incompressible (p. 323) les équations d'hydrodynamique magnétique à l'aide des variables

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + \frac{\mathbf{H}}{\sqrt{4\pi\rho}}, \quad \mathbf{w} = \mathbf{v} - \frac{\mathbf{H}}{\sqrt{4\pi\rho}}$$

s'écrivent sous la forme symétrique:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{w} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\operatorname{grad} \Phi + \Delta(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{w}),$$

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{w} = -\operatorname{grad} \Phi + \Delta(\alpha \mathbf{w} + \beta \mathbf{u}),$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{w} = 0,$$

loù

$$\Phi = \frac{p}{\rho} + \frac{(\mathbf{u}-\mathbf{w})^2}{8}, \qquad \alpha = \frac{\nu+\nu_m}{2}, \qquad \beta = \frac{\nu-\nu_m}{2},$$

$\nu = \eta/\rho$ est la viscosité cinématique (p. 334), ν_m la «viscosité magnétique» (p. 536, 4°). Sous cette écriture la densité d'énergie totale prend la forme:

$$\frac{\rho v^2}{2} + \frac{H^2}{8\pi} = \frac{\rho}{4}(u^2+w^2);$$

a différence entre les énergies cinétique et magnétique est égale à

$$\frac{\rho v^2}{2} - \frac{H^2}{8\pi} = \frac{\rho}{2}\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}.$$

9° En hydrodynamique magnétique, le théorème de Thomson sur la conservation de la circulation de la vitesse dans le liquide parfait (p. 339) n'a pas lieu. En présence d'un champ magnétique, la circulation de la vitesse le long d'un contour matériel ne se conserve que dans le cas particulier où la force $\mathbf{f}_{él}$ par unité de masse possède le potentiel:

$$\operatorname{rot}\left(\frac{1}{\rho}\operatorname{rot}\mathbf{H}\times\mathbf{H}\right) = 0.$$

2. Ondes magnéto-hydrodynamiques

1° Au cours de l'interaction des phénomènes électromagnétiques et hydrodynamiques, les faibles fluctuations de mouvement stationnaire du milieu se propagent dans celui-ci sous forme d'*ondes magnéto-hydrodynamiques*. Dans le cas général, il est impossible de subdiviser ces ondes en ondes longitudinales et transversales (p. 559).

2° Dans le cas d'un milieu parfait et de faibles amplitudes des ondes magnéto-hydrodynamiques, il est possible de trouver leurs fréquences ω_0 de l'équation

$$\omega_0^2\left[\omega_0^2-(\mathbf{k}\cdot\mathbf{u})^2\right]\left[\omega_0^4-k^2\left(c_{son}^2+u^2\right)\omega_0^2+k^2c_{son}^2\,(\mathbf{k}\cdot\mathbf{u})^2\right]=0,$$

où $\mathbf{k}$ est le vecteur d'onde (p. 566), $\mathbf{u} = \mathbf{H}/\sqrt{4\pi\rho}$, c_{son} la vitesse du son dans le milieu en l'absence de champ magnétique (p. 560). Cette équation a quatre différentes solutions pour ω_0 et détermine quatre types d'ondes magnéto-hydrodynamiques se propageant dans le milieu, chacune avec sa vitesse de phase $V = \omega_0/k$ (p. 565).

3° La solution

$$\omega_0 = 0$$

correspond à la perturbation qui est immobile par rapport au milieu, autrement dit, se déplaçant simultanément avec le milieu lors de son mouvement. Une telle onde est dite *entropique*; dans cette onde varient seulement la densité et l'entropie du milieu. La notion d'onde dans ce cas est conventionnelle, étant donné que sa vitesse de propagation $V = 0$.

4° La solution

$$\omega_0 = \pm \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}, \quad V = \pm \frac{H}{\sqrt{4\pi\rho}} \cos \vartheta,$$

où ϑ est l'angle entre les directions de propagation de l'onde et du champ magnétique, correspond aux fluctuations de la vitesse de mouvement du milieu et de l'intensité de champ magnétique dans ce milieu; les caractéristiques thermodynamiques du milieu restent dans ce cas invariables. Une telle onde est dite *magnéto-hydrodynamique* dans le sens restreint. Ces ondes sont purement transversales; les oscillations dans celles-ci ont lieu dans des directions perpendiculaires à la direction initiale du champ magnétique. La propagation de ces ondes n'est pas accompagnée de variations de densité et est possible aussi bien dans un milieu compressible que dans un milieu incompressible. La vitesse de groupe (p. 595) de telles ondes ne dépend pas de la direction du vecteur d'onde $\mathbf{k}$ et est toujours égale à $\mathbf{u} = \mathbf{H}/\sqrt{4\pi\rho}$. Par conséquent, le sens de propagation d'une onde magnéto-hydrodynamique (sous lequel on comprend le sens de transfert de son énergie) coïncide avec la direction du champ magnétique initial $\mathbf{H}$.

5° Les solutions de l'équation biquadratique de 2° décrivent également les *ondes magnétosonores* se propageant avec deux différentes vitesses:

$$V_{\pm}^2 = \frac{1}{2} \left\{ c_{\text{son}}^2 + u^2 \pm \sqrt{(c_{\text{son}}^2 + u^2)^2 - 4c_{\text{son}}^2 u^2 \cos^2 \vartheta} \right\}$$

en prenant en considération que

$$\max(u^2, c_{\text{son}}^2) \leqslant V_{+}^2 \leqslant c_{\text{son}}^2 + u^2,$$

$$0 \leqslant V_{-}^2 \leqslant \min(u^2 \cos^2 \vartheta, c_{\text{son}}^2).$$

La première de ces solutions correspond à une onde magnétosonore *accélérée*, la seconde à une onde magnétosonore *ralentie* par rapport à l'onde sonore ordinaire ou magnéto-hydrodynamique. La seule

grandeur invariable dans les ondes magnétosonores est l'entropie. Ces ondes ne sont ni purement longitudinales, ni purement transversales.

Lorsque $\vartheta = 0$, l'onde magnétosonore accélérée se transforme en onde sonore ordinaire si $c_{son} > u$, ou en onde magnéto-hydrodynamique si $c_{son} < u$; dans les mêmes conditions l'onde magnétosonore ralentie se transforme respectivement en onde magnéto-hydrodynamique ou en onde sonore. Lorsque $\vartheta = \pi/2$ les vitesses de propagation des ondes magnéto-hydrodynamique et magnétosonore ralentie deviennent nulles, et ces deux ondes se réduisent à une faible discontinuité tangentielle (p. 541).

6° Dans le cas général d'ondes d'amplitude notable ou de champs magnétiques considérables, la division des ondes en ondes magnéto-hydrodynamiques et ondes sonores habituelles n'est pas possible. Dans le liquide incompressible ($c_{son} \to \infty$) reste un seul type d'ondes planes avec deux directions indépendantes de polarisation (p. 593). Le vecteur vitesse de mouvement $\mathbf{v}$ du milieu et le vecteur déviation $\mathbf{h}$ du champ magnétique dans le milieu par rapport au champ uniforme initial sont perpendiculaires au vecteur d'onde $\mathbf{k}$ et liés par la relation

$$\mathbf{v} = -\frac{\mathbf{h}}{\sqrt{4\pi\rho}}$$

(ondes d'Alfvén).

8. Discontinuités et ondes de choc

1° En hydrodynamique magnétique, on appelle *surface de discontinuité* la surface matérielle dans un milieu électroconducteur sur laquelle subissent un saut les valeurs des grandeurs, caractérisant le milieu, soit thermodynamiques, soit électromagnétiques, soit les unes et les autres en ensemble.

2° Sur la surface de discontinuité d'un milieu conducteur sont réalisées les relations suivantes:

$$\{v_n \mathbf{H}_\tau - \mathbf{v}_\tau H_n\} = 0, \quad \{H_n\} = 0,$$

$$\left[\rho v_n \left(\frac{v^2}{c} + w\right) + \frac{1}{4\pi}(H^2 v_n - \mathbf{v} \cdot \mathbf{H}\ H_n)\right] = 0,$$

$$\{\rho v_n\} = 0, \quad \left\{p + \rho v_n^2 + \frac{H^2}{8\pi}\right\} = 0,$$

$$\left\{\rho v_n \mathbf{v}_\tau - \frac{1}{4\pi} H_n \mathbf{H}_\tau\right\} = 0,$$

où les accolades désignent la différence des grandeurs correspondantes de deux côtés de la surface de discontinuité, désignés par les indices 1 et 2 (par exemple la condition $\{H_n\} = 0$ est équivalente à la condition $H_{1n} - H_{2n} = 0$ ou bien $H_{1n} = H_{2n}$); les indices n et τ correspondent aux composantes normale et tangentielle des vecteurs (ou de leurs projections sur ces directions) à la surface de discontinuité; voir les autres notations p. 536.

3° Lorsque la surface de discontinuité est immobile par rapport au milieu, autrement dit, lorsque $v_n = 0$ et $H_n \neq 0$, on a:

$$j = \rho v_n = 0, \quad \{\mathbf{v}_\tau\} = 0, \quad \{\rho\} \neq 0, \quad \{p\} = 0, \quad \{\mathbf{H}_\tau\} = 0.$$

En même temps que ρ, subissent des sauts s, T et autres grandeurs thermodynamiques. Une telle discontinuité est dite ***discontinuité de contact***. La surface de discontinuité représente la surface de séparation entre deux milieux immobiles de différentes valeurs de ρ et T.

4° Lorsque $v_n = 0$ et $H_n = 0$, ont lieu les relations suivantes:

$$j = 0, \quad \{\mathbf{v}_\tau\} \neq 0, \quad \{\rho\} \neq 0, \quad \left\{p + \frac{\mathbf{H}_\tau^2}{8\pi}\right\} = 0, \quad \{\mathbf{H}_\tau\} \neq 0.$$

La vitesse et l'intensité de champ magnétique sont parallèles à la surface de discontinuité et peuvent subir sur celle-ci des sauts arbitraires en valeur et en direction. Une telle discontinuité est dite *tangentielle*. Elle est possible aussi bien dans un milieu compressible que dans un milieu incompressible. Le saut de pression est lié à un saut d'intensité de champ magnétique par la relation

$$p_2 - p_1 = -\frac{1}{8\pi}(\mathbf{H}_{2\tau}^2 - \mathbf{H}_{1\tau}^2).$$

Les sauts des autres grandeurs thermodynamiques sont déterminés par les sauts de p et de ρ à l'aide des équations d'état (p. 536).

5° Si $\{\rho\} = 0$, ont lieu les relations:

$$j \neq 0, \quad \{\mathbf{v}_\tau\} \neq 0, \quad \{p\} = 0, \quad H_n \neq 0;$$

toutes les grandeurs thermodynamiques, ainsi que $\mathbf{H}_\tau^2$, sont continues sur la surface de discontinuité. Une telle discontinuité est dite *rotatoire*. Le champ magnétique tourne autour de la normale à la surface de discontinuité sans varier en valeur absolue ($|\mathbf{H}_\tau| = \text{const}$).

Sont possibles également des discontinuités possédant à la fois les propriétés des discontinuités tangentielles et rotatoires. Dans ces discontinuités $\mathbf{v}$ et $\mathbf{H}$ restent tangents à la surface de discontinuité et ne font que tourner dans leur plan sans varier en valeur absolue.

6° La discontinuité où $v_n \neq 0$ est dite *onde de choc perpendiculaire*. Elle obéit à la condition $\{\mathbf{v}_\tau\} = 0$. Lorsque $H_n = 0$, on peut écrire les relations sur la surface de discontinuité dans un système de coordonnées où $\mathbf{v}_{1\tau} = \mathbf{v}_{2\tau} = 0$, posant $v = v_n$, $H = H_\tau$:

$$\left\{\frac{H}{\rho}\right\} = 0, \quad \{\rho v\} = 0,$$

$$\left\{\frac{v^2}{2} + w + \frac{H^2}{4\pi\rho}\right\} = 0, \quad \left\{p + \rho v^2 + \frac{H^2}{8\pi}\right\} = 0.$$

La discontinuité représente une onde de choc plane de compression, dont la direction de propagation est perpendiculaire au champ magnétique.

Lorsque $H = 0$, l'onde de choc perpendiculaire se transforme en onde de choc hydrodynamique ordinaire (p. 583). L'onde de choc perpendiculaire de petite amplitude coïncide avec l'onde magnétosonore accélérée (p. 539) se propageant transversalement au champ magnétique ($\vartheta = \pi/2$) avec la vitesse $V_+^2 = c_{son}^2 + u^2$.

Lorsque $H_n \neq 0$ dans le système de coordonnées où $\mathbf{v} \parallel \mathbf{H}$ et qui se déplace parallèlement à la surface de discontinuité avec la vitesse

$$\mathbf{U} = \mathbf{v} - \frac{v_n}{H_n}\mathbf{H},$$

sur la surface de discontinuité sont réalisées les relations:

$$\{H_n\} = 0, \quad \left\{\frac{v^2}{2} + w\right\} = 0, \quad \{\rho v_n\} = 0,$$

$$\left\{p + \rho v_n^2 + \frac{H^2}{8\pi}\right\} = 0, \quad \left\{\rho v_n \mathbf{v}_\tau - \frac{1}{4\pi} H_n \mathbf{H}_\tau\right\} = 0.$$

7° La discontinuité en laquelle la densité du milieu subit un saut

$$\{\rho\} \neq 0, \quad j \neq 0$$

est appelée *onde de choc oblique*. Dans les discontinuités de ce genre l'onde de choc de compression interagit de façon complexe avec le champ magnétique. Lorsque $\mathbf{H}_\tau = 0$, $H_n \neq 0$, l'onde de choc oblique se transforme en *onde de choc parallèle* se propageant dans la direction du champ magnétique, sans interagir avec lui. Dans le cas de petites amplitudes, les ondes de choc obliques se transforment en ondes magnétosonores: accélérées ou ralenties (p. 539).

8° L'équation de l'*adiabatique de choc* (l'*adiabatique d'Hugoniot*, p. 584) en hydrodynamique magnétique est:

$$u_2 - u_1 + \frac{1}{2}(p_2 + p_1)\left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}\right) + \frac{1}{16\pi}\left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}\right)(H_{2\tau} - H_{1\tau})^2 = 0,$$

où u est l'énergie interne spécifique du gaz.

Le saut d'entropie dans une onde de choc de faible amplitude constitue:

$$s_2 - s_1 = \frac{1}{12\,T}\left(\frac{\partial^2 \frac{1}{\rho}}{\partial p^2}\right)_s (p_2 - p_1)^3 -$$

$$-\frac{1}{16\pi T}\left(\frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial p}\right)_s (p_2 - p_1)(H_{2\tau} - H_{1\tau})^2.$$

CHAPITRE 13

Eléments de la théorie de la relativité restreinte

1. Principe de relativité d'Einstein

1° La théorie de la relativité restreinte est fondée sur deux postulats.

Le premier postulat: dans les mêmes conditions tous les phénomènes physiques (mécaniques, électromagnétiques, etc.) évoluent de la même manière dans tous les référentiels galiléens, autrement dit, il est impossible, par les expériences effectuées avec un système de corps fermé, de déterminer si ce système se trouve à l'état de repos ou se meut de façon uniforme et rectiligne par rapport à un référentiel galiléen quelconque.

Le *deuxième postulat*: la vitesse de la lumière dans le vide n'est pas fonction du mouvement d'une source de lumière et est la même dans toutes les directions. Selon le premier postulat, cette vitesse est la même dans tous référentiels galiléens, autrement dit, elle est une constante universelle.

2° En mécanique classique de Newton, la description de l'interaction des corps au moyen de l'énergie potentielle est fondée sur le concept de propagation instantanée des interactions. Dans la nature, l'interaction se propage avec une vitesse maximale finie c et sa propagation avec une vitesse supérieure à c n'est pas possible. La vitesse maximale de propagation des interactions est une constante universelle, identique dans tous les référentiels galiléens; elle est égale à la vitesse de propagation de la lumière dans le vide *(invariance de la vitesse de la lumière)*. Le principe de relativité pris avec l'affirmation que la vitesse maximale de propagation des interactions est finie est appelé ***principe de relativité restreinte d'Einstein***.

3° En mécanique classique, le temps (à la différence des coordonnées) est supposé indépendant du référentiel. Deux événements

simultanés dans un référentiel galiléen sont admis simultanés dans tout autre référentiel galiléen. Ceci contredit le principe de relativité spécial duquel suit la *relativité de la simultanéité des événements*. En effet, de la règle de la composition des vitesses en mécanique classique (p. 33), appliquée à la propagation de la lumière, il découle que la vitesse de la lumière doit être différente selon le référentiel galiléen choisi. Elle doit être différente, par exemple, dans la direction de rotation de la Terre et dans la direction contraire. Ce fait contredit l'expérience qui montre que la vitesse de la lumière ne dépend pas de la direction de sa propagation.

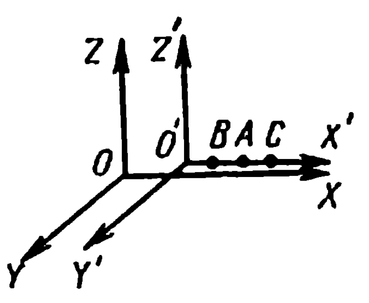


FIG. IV.13.1.

4° En vertu du principe de relativité restreinte, le temps s'écoule de façon différente selon les référentiels et le concept d'intervalle de temps entre deux événements n'a de sens que lorsque le référentiel est indiqué.

Supposons, par exemple, que le système de coordonnées $X'Y'Z'$ se déplace avec la vitesse constante **V** par rapport au système XYZ le long de l'axe des X (fig. IV.13.1). Le signal lumineux atteignant au même instant (dans le système $X'Y'Z'$) les points B et C équidistants de A arrive dans le système XYZ en B, qui se meut à sa rencontre, plus tôt qu'en C, qui «fuit» de lui (la vitesse du signal C dans les deux systèmes de coordonnées est la même dans toutes les directions).

2. Intervalles

1° On appelle *espace à quatre dimensions* l'espace représentatif sur les axes duquel sont portées trois coordonnées spatiales x, y, z et le temps t. Dans cet espace chaque événement est représenté par un point *(point d'univers)*. Au mouvement d'une particule quelconque dans l'espace et dans le temps correspond une ligne *(ligne d'univers)*.

2° Si x_1, y_1, z_1, t_1 et x_2, y_2, z_2, t_2 sont les coordonnées de deux événements dans l'espace quadridimensionnel la grandeur

$$s_{12} = \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2}$$

est appelée *intervalle* entre ces deux événements.

L'intervalle entre deux événements infiniment proches est:

$$ds = \sqrt{c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} = \sqrt{c^2dt^2 - dl^2},$$

où

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

En reportant sur l'axe du temps la variable $\tau = ict$ au lieu de t, on peut considérer la grandeur $-ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + d\tau^2$ comme le carré d'un élément de longueur dans l'espace quadridimensionnel.

3° L'intervalle entre deux événements est le même dans tous les référentiels galiléens *(invariance de l'intervalle)*. L'invariance de l'intervalle est l'expression mathématique de la constance de la vitesse de la lumière. La notion d'intervalle permet d'étudier les relations spatio-temporelles entre les événements et permet d'établir les liaisons de cause à effet entre ceux-ci.

4° Si x_1, y_1, z_1, t_1 et x_2, y_2, z_2, t_2 sont les points d'univers de deux événements dans un système de référence K, il existe, à condition que $s_{12}^2 > 0$ (réalité de l'intervalle), un tel système de référence K', où ces deux événements ont lieu en un même endroit de l'espace $(x_1' = x_2',\ y_1' = y_2',\ z_1' = z_2')$. Les intervalles réels sont appelés du *genre temps*. Le temps $t_{12}' = t_2' - t_1'$, écoulé entre deux événements dans le système K', est égal à $t_{12}' = s_{12}/c$.

La condition

$$s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = \text{const} > 0,$$

où $t_{12} = t_2 - t_1$, $l_{12}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$ peut être représenté graphiquement sous la forme d'une hyperbole en portant sur les axes de coordonnées (fig. IV.13.2) $l = l_{12}$, et $ct = ct_{12}$, où l_{12} et t_{12} correspondent à deux événements donnés dans un référentiel galiléen arbitraire. Les points A et A_1 répondent aux événements 2 se produisant au même point de l'espace que l'événement 1 (point O), mais «après» (point A) ou «avant» (point A_1) qu'a lieu cet événement. Par exemple, si l'événement 2 est la conséquence de l'événement 1 (point A), il doit avoir lieu après l'événement 1, autrement dit, il y a *liaison causale* des événements. Si deux événements ayant lieu dans un système

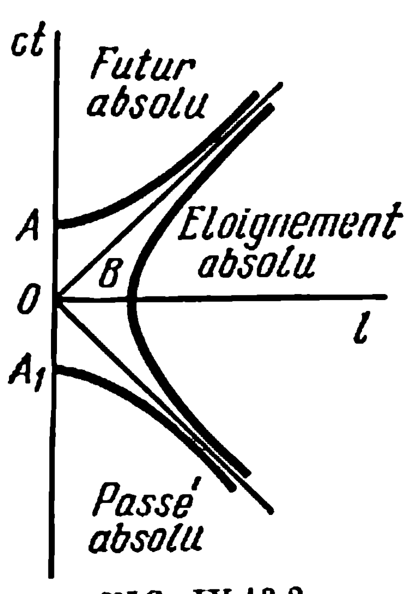


FIG. IV.13.2.

de coordonnées quelconques en un même point de l'espace sont liés par causalité, ces deux événements sont liés de la même manière dans tout autre système galiléen (par exemple, la mise en circuit d'un galvanomètre et la déviation de son aiguille). Les événements liés par causalité peuvent même ne pas avoir lieu en un point de l'espace, mais se produire de telle façon que la conséquence est liée à la cause par un certain processus de propagation (par exemple, le branchement d'une lampe électrique et son incandescence). A deux événements liés par causalité correspond une branche de l'hyperbole. La région située plus haut que l'asymptote supérieure de l'hyperbole est appelée «futur absolu» par rapport à l'événement initial O. La succession des causes et des effets est déterminée par le sens du temps. Elle a un caractère objectif et, par conséquent, la théorie de relativité ne contredit pas le caractère objectif de la causalité.

5° Il existe des événements pour lesquels l'intervalle qui les sépare est imaginaire:

$$s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 < 0.$$

Les intervalles imaginaires sont dits du *genre espace*. Ils relient des événements pour lesquels $c^2 t_{12}^2 < l_{12}^2$ (par exemple, deux événements ayant lieu non simultanément sur deux planètes à condition que $ct_{12} < l_{12}$). Dans aucun système de coordonnées de tels événements n'ont lieu en un même point de l'espace. Ils se produisent dans une région d'éloignement absolu par rapport à l'origine O (fig. IV.13.2). La succession temporelle de tels événements n'est pas univoque: il existe des systèmes de coordonnées dans lesquels l'un des événements est postérieur à un autre et des systèmes de coordonnées dans lesquels le premier événement a lieu «après» le second. Dans un certain référentiel les deux événements sont simultanés (points O et B sur la figure IV.13.2). La notion de simultanéité de deux événements se produisant en deux points différents de l'espace et séparés par un intervalle imaginaire a un caractère relatif. Par exemple, l'événement B (fig. IV.13.2) est situé sur l'hyperbole qui, par rapport à O, se trouve dans le passé ainsi que dans l'avenir. Les événements O et B ne sont pas liés par causalité.

6° Pour les asymptotes aux hyperboles $l = \pm ct$ et $s^2 = 0$. Les asymptotes décrivent les événements liés à la propagation des signaux électromagnétiques. Pour de tels événements, en vertu de l'invariance de la vitesse de la lumière, dans tous les référentiels $s = 0$. Le lieu géométrique des intervalles nuls dans l'espace quadridimensionnel (x, y, z, ict) est appelé *cône de lumière* pour le point d'univers O donné.

3. Transformation de Lorentz et ses conséquences

1° Les formules relativistes de transformation des coordonnées qui satisfont à l'exigence de l'invariance de l'intervalle (p. 546) sont appelées *transformations de Lorentz*. Elles expriment le passage du système de référence galiléen K au système K' se mouvant par rapport à K avec la vitesse V dans le sens positif de l'axe des X. Les transformations sont de la forme:

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Les formules de transformation de Lorentz sont symétriques et conservent leur forme lors du passage de K' à K, seule V change de signe:

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Les formules de transformation de Lorentz sont linéaires et se réduisent aux formules de transformation de Galilée (p. 50) lors de faibles vitesses ($V/c \ll 1$).

2° L'invariance de la théorie physique par rapport aux transformations de Lorentz, autrement dit, l'*invariance relativiste (invariance de Lorentz)* est la condition nécessaire de la validité de cette théorie. L'absence d'invariance de Lorentz d'une loi physique quelconque signifie que celle-ci doit être formulée de différentes façons selon les référentiels galiléens, ce qui rend ces référentiels non équivalents tout en violant le principe de relativité. La violation de l'invariance de Lorentz d'une théorie physique quelconque montre que cette théorie est, dans le meilleur des cas, une théorie approchée, vraie avec une précision déterminée dans certaines conditions seulement. Par exemple, l'équation de Schrödinger (p. 745), qui est l'équation fondamentale de la mécanique quantique non relativiste (p. 742), est non invariante du point de vue relativiste et possède un domaine précis d'application. Les équations de la dynamique relativiste (p. 551) sont invariantes du point de vue relativiste et, lorsque $v \ll c$, se transforment en l'équation de la mécanique de Newton, non invariante du point de vue relativiste et vraie seulement lorsque $v \ll c$.

3° Le temps mesuré à l'aide d'horloge se mouvant avec le système est appelé *temps propre* de ce système, où $ds = c\,dt'$. De la formule de Lorentz vient la relation entre l'intervalle de temps propre dt' et l'intervalle de temps dt dans un système de référence par rapport auquel est considéré le mouvement à la vitesse V:

$$dt' = \frac{ds}{c} = dt\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}.$$

Le temps propre noté par un observateur en mouvement est toujours inférieur à l'intervalle de temps dans un système fixe. Pour un observateur immobile, les horloges en mouvement marchent plus lentement que les horloges immobiles.

EXEMPLE. La durée de vie moyenne d'un méson μ positif (p. 898) est de $2{,}20 \cdot 10^{-6}$ s. Le parcours moyen d'une telle particule animée d'une vitesse proche de c constitue 660 m dans l'air. En réalité, le parcours moyen des mésons μ dans l'air est notablement plus long, étant donné que la durée de vie moyenne mesurée dans un système immobile lié à la Terre (à l'air) est notablement plus grande que $2{,}20 \cdot 10^{-6}$ s.

4° De la transformation de Lorentz suit la contraction d'une mesure de longueur mobile dans le sens de son mouvement *(contraction de Lorentz)*:

$$\Delta x = \frac{\Delta x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$

où Δx est la mesure de longueur au repos dans le système K; $\Delta x'$ la même mesure dans le système K', animée de la vitesse V par rapport au système K.

On appelle *longueur propre* la dimension linéaire l_0 d'un corps dans le système de coordonnées où ce corps est au repos ($l_0 = \Delta x$). La longueur l du même corps mesurée dans le système de référence K', se mouvant par rapport à lui, diminue dans le rapport de $\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$:

$$l = l_0\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}.$$

Les dimensions transversales du corps mobile ne varient pas, étant donné que

$$\Delta y = \Delta y' \quad \text{et} \quad \Delta z = \Delta z'.$$

4. Transformation de la vitesse

1° Les projections de la vitesse $\mathbf{v}$ d'un corps sur les axes de coordonnées d'un système immobile K sont liées aux projections de sa vitesse $\mathbf{v}'$ dans le système K', qui se déplace à la vitesse $\mathbf{V}$ suivant la direction positive de l'axe X, de la façon suivante:

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}, \quad v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}, \quad v_z = \frac{v'_z \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}.$$

Ces formules expriment la *loi de composition des vitesses en théorie de la relativité.* Quand $c \to \infty$, elles traduisent la règle de la composition des vitesses de la mécanique classique (p. 33):

$$v_x = v'_x + V, \quad v_y = v'_y, \quad v_z = v'_z.$$

Si le corps se déplace le long de l'axe des X $\left(v_x = v, \quad v_y = v_z = 0,\right.$ $\left.v'_x = v', \quad v'_y = v'_z = 0\right)$

$$v = \frac{v' + V}{1 + \frac{v'V}{c^2}}.$$

Les formules de passage de $\mathbf{v}$ à $\mathbf{v}'$ diffèrent des formules amenées ci-dessus par le signe de V. Si, en particulier, $v = c$, on a également $v' = c$. La somme de deux vitesses inférieures ou égales à c ne dépasse pas la vitesse de la lumière. Il suit des transformations de Lorentz que toujours $v < c$. Seule fait exception la vitesse des photons, qui est égale à c.

2° Pour $V/c \ll 1$ et une vitesse arbitraire $\mathbf{v}$, la formule approchée

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V} - \frac{1}{c^2}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{v}')\mathbf{v}'$$

est valable aux termes de l'ordre de V/c près.

5. Vitesse et accélération quadridimensionnelles

1° On appelle *quadrivecteur vitesse (quadrivitesse)* le vecteur avec les composantes:

$$u_j = \frac{dx_j}{ds} \quad (j = 1, 2, 3, 4),$$

où $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = ict$, $ds = c\,dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$, v la vitesse du corps.

Par exemple: $u_j = \frac{v_j}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ $(j = 1, 2, 3)$, $u_4 = \frac{i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$.

La relation entre les composantes de la quadrivitesse est: $\sum_{j=1}^{4} u_j^2 = -1$. La quadrivitesse est une grandeur sans dimension.

2° Le *quadrivecteur accélération (quadriaccélération)* est le vecteur avec les composantes

$$a_j = \frac{du_j}{ds} = \frac{d^2x_j}{ds^2} \qquad (j = 1, 2, 3, 4).$$

6. Dynamique relativiste

1° La mécanique fondée sur le principe de relativité restreinte et invariante aux transformations de Lorentz est appelée *mécanique relativiste*. La mécanique relativiste se transforme en mécanique classique lorsque $v/c \ll 1$, où v est la vitesse du corps (de la particule) en mouvement, c la vitesse de la lumière dans le vide.

2° La fonction de Lagrange (p. 97) d'une particule libre est:

$$L = -m_0c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},$$

où m_0 est la masse de la particule, mesurée dans le système de coordonnées où la particule est au repos *(masse au repos)*.

3° Le vecteur quantité de mouvement **p** (p. 43) est:

$$\mathbf{p} = \frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

L'expression relativiste de la masse est:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

où m_0 est la masse au repos.

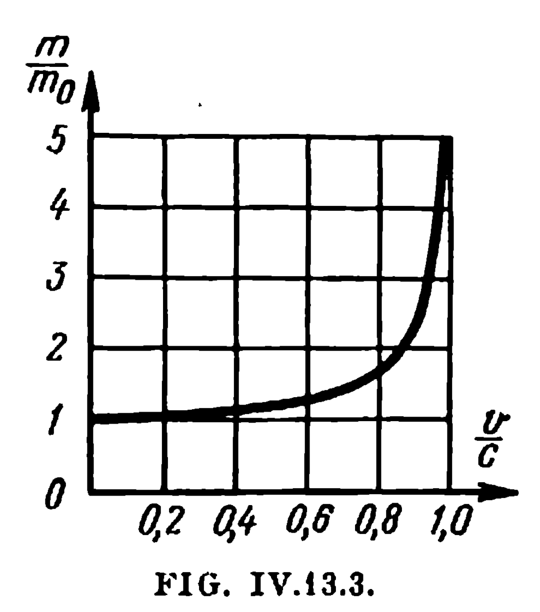


FIG. IV.13.3.

Quand $v \to c$, $m \to \infty$ et $p \to \infty$ si seulement $m_0 \neq 0$. La dépendance de la masse de la vitesse est représentée fig. IV.13.3. Pour le photon (p. 725) $v=c$ et $m_0 = 0$. L'impulsion du photon est déterminée en fonction de son énergie. La vitesse supérieure à c conduit à une impulsion imaginaire (ou à une masse imaginaire), ce qui est absurde du point de vue physique.

Lorsque $v/c \ll 1$, l'expression de la quantité de mouvement prend sa forme classique:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

(la différence entre m et m_0, quand $v/c \ll 1$, est insignifiante).

En mécanique classique, le rapport de la force $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$ à l'accélération $\mathbf{w}$ du corps est constant (p. 44). En mécanique relativiste,

$$\mathbf{F} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\mathbf{w} \text{ quand } \mathbf{F} \perp \mathbf{v},$$

$$\mathbf{F} = \frac{m_0}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\mathbf{w} \text{ quand } \mathbf{F} \parallel \mathbf{v}.$$

4° L'énergie totale d'un corps (ou d'une particule) en théorie de la relativité est:

$$E = \mathbf{p}\cdot\mathbf{v} - L = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = mc^2.$$

Cette expression porte le nom de *loi de l'équivalence entre masse et énergie* et joue un rôle fondamental en physique nucléaire. En particulier, quand $v = 0$, l'énergie du corps au repos *(énergie au repos)* est:

$$E_0 = m_0c^2.$$

L'énergie du corps au repos, outre $\sum_{i=1}^{N} m_{0i}\, c^2$ (m_{0i} est la masse au repos des particules d'un corps), comprend l'énergie ciné-

tique des particules et leur énergie potentielle d'interaction. C'est pourquoi

$$m_0c^2 \neq \sum_{i=1}^{N} m_{0i}c^2 \quad \text{et} \quad m_0 \neq \sum_i m_{0i}.$$

En mécanique relativiste, la loi de la conservation de la masse au repos n'est pas valable. Par exemple, la masse m_0 d'une particule susceptible de désintégration spontanée est supérieure à la somme des masses au repos des produits de désintégration m_{01} et m_{02}:

$$m_0 > m_{01} + m_{02}.$$

5° L'énergie cinétique d'un corps (d'une particule):

$$T = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0c^2.$$

Lorsque $v/c \ll 1$, cette expression prend sa forme classique $T = mv^2/2$ (la différence entre m et m_0 est insignifiante quand $v/c \ll 1$).

6° La fonction hamiltonienne (p. 101) pour une particule libre (l'énergie totale exprimée par son impulsion) est:

$$E = H = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4};$$

pour les petites vitesses ($p \ll m_0c$)

$$E = H \approx m_0c^2 + \frac{p^2}{2m_0}.$$

Ceci est l'expression classique de la fonction hamiltonienne d'une particule libre à la masse au repos près. Pour le photon, qui n'a pas de masse au repos ($m_0 = 0$),

$$E = cp.$$

7° La relation entre l'énergie totale E, la quantité de mouvement $\mathbf{p}$ et la vitesse $\mathbf{v}$ d'une particule libre est:

$$\mathbf{p} = \frac{E\mathbf{v}}{c^2}.$$

8° En mécanique relativiste, la quantité de mouvement $\mathbf{p}$ et l'énergie totale E peuvent être représentées comme les composantes du quadrivecteur p_i:

$$p_i = m_0cu_i,$$

où m_0 est la masse au repos, c la vitesse de la lumière dans le vide, u_i la quadrivitesse (p. 550). Trois composantes du quadri-

vecteur p_i coïncident avec les composantes de la quantité de mouvement **p**, autrement dit, $p_1 = p_x$; $p_2 = p_y$ et $p_3 = p_z$. La quatrième (temporelle) composante est liée à l'énergie totale de la particule de la manière suivante:

$$p_4 = \frac{iE}{c}.$$

9° Lors du passage au système de coordonnées immobile K du système K', animé par rapport au système K d'un mouvement uniforme rectiligne le long de l'axe des X avec la vitesse V, les transformations de Lorentz sont valables pour les composantes de la quantité de mouvement **p** et de l'énergie E:

$$p_x = \frac{p'_x + E'\frac{V}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad p_y = p'_y, \quad p_z = p'_z, \quad E = \frac{E' + p'_x V}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},$$

où p_x, p_y, p_z sont les composantes de la quantité de mouvement dans le système K, p'_x, p'_y, p'_z les composantes de la quantité de mouvement dans le système K', E et E' les énergies dans les systèmes K et K' respectivement.

7. Concept sur les transformations de Lorentz pour un champ électromagnétique

1° Les propriétés d'un champ électromagnétique sont différentes selon les référentiels galiléens. En particulier, l'un de ces champs: électrique ou magnétique, peut faire défaut dans un système de coordonnées et être présent dans un autre système.

2° Les formules de transformation de Lorentz pour les composantes des vecteurs **E**, **H**, **D** et **B** des champs électrique et magnétique lors du passage au système immobile K du système K', animé par rapport au système K d'un mouvement uniforme rectiligne le long de l'axe des X avec la vitesse V, prennent dans le système de Gauss la forme:

$$E_x = E'_x, \quad E_y = \frac{E'_y + \frac{V}{c}H'_z}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad E_z = \frac{E'_z - \frac{V}{c}H'_y}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},$$

$$H_x = H'_x, \quad H_y = \frac{H'_y - \frac{V}{c}E'_z}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad H_z = \frac{H'_z + \frac{V}{c}E'_y}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

En SI:

$$E_x = E'_x,\quad E_y = \frac{E'_y + VB'_z}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\quad E_z = \frac{E'_z - VB'_y}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},$$

$$H_x = H'_x,\quad H_y = \frac{H'_y - VD'_z}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\quad H_z = \frac{H'_z + VD'_y}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},$$

$$D_x = D'_x,\quad D_y = \frac{D'_y + \frac{V}{c^2}H'_z}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\quad D_z = \frac{D'_z - \frac{V}{c^2}H'_y}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},$$

$$B_x = B'_x,\quad B_y = \frac{B'_y - \frac{V}{c^2}E'_z}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\quad B_z = \frac{B'_z + \frac{V}{c^2}E'_y}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

Pour les composantes des vecteurs, parallèles (||) et perpendiculaires (⊥) à **V**, les formules de transformation sous forme vectorielle prennent en SI la forme:

$$\mathbf{D}_{\parallel} = \mathbf{D}'_{\parallel},\quad \mathbf{D}_{\perp} = \left(\frac{\mathbf{D}' - \frac{1}{c^2}\mathbf{V}\times\mathbf{H}'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\right)_{\perp},$$

$$\mathbf{H}_{\parallel} = \mathbf{H}'_{\parallel},\quad \mathbf{H}_{\perp} = \left(\frac{\mathbf{H}' + \mathbf{V}\times\mathbf{D}'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\right)_{\perp},$$

$$\mathbf{E}_{\parallel} = \mathbf{E}'_{\parallel},\quad \mathbf{E}_{\perp} = \left(\frac{\mathbf{E}' - \mathbf{V}\times\mathbf{B}'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\right)_{\perp},$$

$$\mathbf{B}_{\parallel} = \mathbf{B}'_{\parallel},\quad \mathbf{B}_{\perp} = \left(\frac{\mathbf{B}' + \frac{1}{c^2}\mathbf{V}\times\mathbf{E}'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\right)_{\perp}.$$

Les composantes non primées se rapportent au système K, les composantes primées au système K'.

3° Quand $V/c \ll 1$, les formules se simplifient aux termes de l'ordre V/c près. En SI sous forme vectorielle et en négligeant le terme $\left(\frac{V}{c^2}\right)^2$,

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}' - \frac{1}{c^2}\mathbf{V} \times \mathbf{H}', \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}' + \mathbf{V} \times \mathbf{D}',$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' - \mathbf{V} \times \mathbf{B}', \qquad \mathbf{B} = \mathbf{B}' + \frac{1}{c^2}\mathbf{V} \times \mathbf{E}'.$$

Les formules montrent que le vecteur champ magnétique **H** joue un rôle analogue à celui du vecteur champ électrique **D**, et le vecteur **B** est analogue au vecteur **E**.

Dans le système de Gauss sous forme vectorielle:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' + \frac{1}{c}\mathbf{H}' \times \mathbf{V}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}' - \frac{1}{c}\mathbf{E}' \times \mathbf{V}.$$

S'il n'y a pas de champ magnétique ($\mathbf{H}' = 0$) dans le système K', dans le système K on a alors:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c}\mathbf{V} \times \mathbf{E}.$$

Si, au contraire, il n'y a pas de champ électrique ($\mathbf{E}' = 0$) dans le système K', alors dans le système K:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\mathbf{V} \times \mathbf{H}.$$

Dans le système de référence K les intensités des champs électrique et magnétique sont réciproquement perpendiculaires. Inversement, si les intensités des champs électrique et magnétique sont réciproquement perpendiculaires dans un certain système de référence K, il existe un système de référence K' dans lequel le champ électromagnétique n'a qu'une composante purement électrique ou bien purement magnétique. La vitesse V de ce système est déterminée par des formules précédentes.

8. Effet Čerenkov (effet Čerenkov-Vavilov)

1° Selon la théorie de la relativité restreinte, la vitesse v de mouvement de l'électron ne peut dépasser la vitesse de la lumière dans le vide c: $\beta = v/c < 1$. Lors du mouvement d'un électron (ou d'une autre particule chargée: proton, méson, etc.) dans un

milieu avec l'indice de réfraction n (p. 611) sa vitesse v peut se trouver être supérieure à la vitesse de phase de la lumière c/n dans un milieu donné (p. 611), autrement dit, $c/n < v < c$. On observe dans ce cas un rayonnement électromagnétique appelé *lumière Cerenkov*.

Le rayonnement Cerenkov présente quelque analogie avec les ondes de choc de Mach, produites lors d'un mouvement des corps à des vitesses dépassant les vitesses de phase des ondes élastiques dans un milieu donné (p. 587).

2° Le rayonnement Cerenkov est compris à l'intérieur d'un cône, dont les génératrices forment avec la direction de l'électron un angle ϑ:

$$\cos\vartheta = \frac{1}{n\beta} + \frac{\Lambda}{2\lambda}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right),$$

où $\beta = v/c$, n est l'indice de réfraction du milieu, $\Lambda = h/mv$ est la longueur d'onde broglienne de l'électron mobile (p. 742), λ la longueur d'onde de la lumière émise.

Le rayonnement est possible à condition que $\beta n > 1$ $(v > c/n)$ et est limité du côté des petites ondes par la valeur λ_{min} pour laquelle $\cos\vartheta = 1$. L'énergie émise par l'électron par unité de temps est égale à

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{e^2 v}{c^2}\int_0^{\omega_{max}} \omega\left[1 - \frac{1}{n^2\beta^2} - \frac{\Lambda}{n\beta\lambda}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) - \frac{\Lambda^2}{4\lambda^2}\left(1 - \frac{1}{n^4}\right)\right] d\omega,$$

où $\omega = 2\pi c/n\lambda$ est la pulsation de rayonnement $(\omega_{max} = 2\pi c/n\lambda_{min})$.

Dans le cas non relativiste $(v/c \ll 1)$ la condition $\beta n > 1$ signifie que $n \gg 1$. Si l'on néglige les corrections quantiques (le recul de l'électron lors du rayonnement), $\Lambda/\lambda \to 0$ et les formules précédentes se simplifient:

$$\cos\vartheta = \frac{1}{n\beta} = \frac{c}{v},$$

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{e^2 v}{c^2}\int_0^{\omega_{max}} \omega\left[1 - \frac{c^2}{n^2 v^2}\right] d\omega.$$

ω_{max} est déterminée de la condition $\beta n(\omega_{max}) = 1$, où $n(\omega_{max})$ tient compte de la dépendance de l'indice de réfraction n vis-à-vis de ω.

9. Effet Doppler en optique

1° On appelle *effet Doppler en optique* le changement de fréquence des ondes lumineuses perçues par l'observateur au cours d'un déplacement simultané de l'observateur et de la source (en ce qui concerne l'effet Doppler en acoustique, cf. p. 576).

2° Si la source et le récepteur des ondes lumineuses sont animés d'un mouvement uniforme par rapport au référentiel galiléen (p. 37), la fréquence de la lumière ν observée est liée à la fréquence ν_0 notée dans ce référentiel pour une source et un observateur immobiles par la relation

$$\nu = \nu_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c} \cos \vartheta},$$

où ϑ est l'angle entre la ligne d'observation et la direction de mouvement de la source par rapport à l'observateur, mesuré dans le système de coordonnées lié à l'observateur, v la valeur absolue de la vitesse du mouvement relatif de la source, c la vitesse de la lumière dans le vide.

3° Lorsque $\vartheta = \pi/2$ ou $3\pi/2$ et $v/c \ll 1$, on obtient $\nu = \nu_0$ et l'effet Doppler n'est pas observé. Si $\vartheta = 0$ (éloignement réciproque de la source et de l'observateur), on a alors $\nu < \nu_0$, $\lambda > \lambda_0$: il se produit un «décalage vers le rouge» du spectre de la lumière visible.

Si $\vartheta = \pi$ (rapprochement réciproque de la source et de l'observateur), on a alors $\nu > \nu_0$, $\lambda < \lambda_0$: il se produit un *«décalage vers le violet»* du spectre de la lumière visible.

4° L'effet Doppler est observé quand $v/c \approx 1$ et que $\vartheta = \pi/2$ ou $3\pi/2$:

$$\nu = \nu_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

(effet Doppler transversal). Sa détection par expérience a été l'une des confirmations de la théorie de la relativité.

5° Lorsque $v/c \approx 1$, l'effet Doppler n'est pas observé dans les directions pour lesquelles $\cos \vartheta = -\frac{1}{\beta}\left(1 - \sqrt{1-\beta^2}\right)$, où $\beta = v/c$.

CINQUIÈME PARTIE

Mouvements ondulatoires

CHAPITRE PREMIER

Eléments d'acoustique

1. Introduction

1° On appelle *ondes* les perturbations d'état d'une substance ou d'un champ qui se propagent dans cette substance ou ce champ.

Les *ondes élastiques* sont les perturbations mécaniques (les déformations) se propageant dans un milieu élastique. Les corps extérieurs provoquant ces perturbations sont appelés *sources d'ondes*. La propagation des ondes élastiques consiste en l'excitation d'oscillations de particules du milieu de plus en plus éloignées de la source d'ondes. La principale différence entre les ondes élastiques d'un milieu et tout autre mouvement ordonné de ses particules est que la propagation des ondes n'est pas liée à un transport de substance[1]) lors de faibles perturbations (approximation linéaire).

2° L'onde élastique est dite *longitudinale* si les oscillations des particules ont lieu dans le sens de propagation de l'onde, et *transversale* si les particules du milieu oscillent dans des plans perpendiculaires au sens de propagation de l'onde.

Les ondes transversales ne sont possibles que dans un milieu doué d'une élasticité de forme, autrement dit, dans un milieu susceptible de résister au cisaillement (p. 296). Seuls les corps solides possèdent cette propriété. Les ondes longitudinales sont liées à une déformation volumique du milieu. Aussi peuvent-elles se propager dans les corps solides et les fluides. Seules font exception à la règle les *ondes superficielles* apparaissant à la surface libre d'un liquide ou sur les surfaces de séparation de liquides non miscibles. Dans ce cas, les particules du liquide effectuent simultanément des oscillations longitudinales et transversales dé-

[1]) Dans le cas de fortes perturbations a lieu un faible transport de substance dû au caractère non linéaire des oscillations des particules du milieu.

crivant des trajectoires elliptiques ou plus complexes. Les propriétés particulières des ondes superficielles s'expliquent par le rôle que jouent, lors de leur formation et de leur propagation, les forces de pesanteur et de tension superficielle.

3° On appelle *ondes sonores* ou *acoustiques* les perturbations faibles (oscillations mécaniques de petites amplitudes) se propageant dans un milieu élastique. La partie de la physique qui étudie les propriétés des ondes sonores, les lois de leur excitation, de leur propagation et de leurs effets est appelée *acoustique*.

2. Vitesse de propagation des ondes sonores (vitesse du son)

1° La vitesse des ondes dans les liquides et les gaz est égale à

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}},$$

où K est le module d'élasticité volumique (p. 296), ρ la densité du milieu non perturbé. Le processus de déformation d'un liquide ou d'un gaz lors de la propagation d'ondes sonores dans ceux-ci peut être supposé adiabatique (p. 155). Le module d'élasticité volumique d'un gaz parfait dans un processus adiabatique est $K = \varkappa p$, où p est la pression du gaz non perturbé, $\varkappa$ l'indice d'adiabatique (p. 168). La vitesse des ondes sonores dans un gaz parfait est:

$$c = \sqrt{\varkappa \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\varkappa BT},$$

où T est la température absolue du gaz, B la constante spécifique des gaz (p. 158).

2° Dans un milieu isotrope solide la vitesse des ondes transversales est:

$$c_1 = \sqrt{\frac{G}{\rho}},$$

où G est le module de rigidité, ρ la densité; la vitesse des ondes longitudinales est:

$$c_2 = \sqrt{\frac{E\mu}{\rho(1+\mu)(1-2\mu)} + \frac{2G}{\rho}} = \sqrt{\frac{E}{\rho} \cdot \frac{1-\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}},$$

où E est le module de Young (p. 294), μ le coefficient de Poisson (p. 295). Dans les milieux solides la vitesse des ondes longitudinales est toujours supérieure à la vitesse des ondes transversales.

La vitesse de propagation des ondes longitudinales dans une barre mince, dont les dimensions transversales sont très inférieures à la longueur d'onde (p. 566), est:

$$c_2 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

La vitesse de propagation des ondes transversales dans une *corde* (mince fil flexible, dans lequel on a créé une tension intense à l'aide de forces extérieures) est:

$$c_1 = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} = \sqrt{\frac{F}{\rho S}},$$

où $\sigma = \frac{F}{S}$ est la contrainte normale, F la force de tension, S l'aire de la section transversale de la corde, ρ la densité du matériau dont est faite la corde.

3° Les propriétés élastiques des corps solides anisotropes sont différentes dans différentes directions. C'est pourquoi les vitesses des ondes longitudinales et transversales dépendent du sens de leur propagation et celle des ondes transversales de leur *polarisation* également, autrement dit, de l'orientation du plan mené par le vecteur vitesse de l'onde et le vecteur déplacement des particules du milieu au point considéré (ce plan est dit *plan d'oscillation*).

8. Equation de l'onde

1° *Théorème de Helmholtz:* tout champ vectoriel univoque et continu **F** tendant vers zéro à l'infini peut être représenté d'une seule façon sous forme de la somme du gradient d'une certaine fonction scalaire φ et du rotationnel d'une certaine fonction vectorielle **A** dont la divergence est nulle:

$$\mathbf{F} = \text{grad}\ \varphi + \text{rot}\ \mathbf{A},\quad \text{div}\ \mathbf{A} = 0.$$

La fonction φ est appelée *potentiel scalaire du champ* **F** et la fonction **A** *potentiel vecteur* de ce champ.

2° Dans le cas d'ondes acoustiques dans des milieux solides, le potentiel scalaire φ du champ vectoriel des déplacements **S** des particules du milieu de leurs positions d'équilibre caractérise les ondes élastiques longitudinales et vérifie l'équation différentielle suivante appelée *équation de l'onde:*

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2},\ \text{autrement dit,}\ \Delta\varphi = \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2},$$

ou encore

$$\Box \varphi = 0,$$

où c_2 est la vitesse des ondes longitudinales (p. 559), Δ l'opérateur de Laplace, $\Box = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ l'opérateur de d'Alembert.

Le potentiel vecteur **A** caractérise les ondes élastiques transversales et vérifie l'équation différentielle:

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = -\frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}, \quad \text{ou} \quad \Delta \mathbf{A} = \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2},$$

où c_1 est la vitesse des ondes transversales (p. 559).

3° Dans les fluides les ondes acoustiques sont caractérisées par le potentiel scalaire φ des vitesses $\mathbf{v}'$ du mouvement oscillatoire des particules du milieu (p. 328): $\mathbf{v}' = \text{grad } \varphi$.

Il suit des équations de continuité (p. 332) et des équations du mouvement (p. 333) que pour les ondes acoustiques se propageant dans un fluide parfait (p. 324) illimité, homogène et immobile sur lequel n'agissent pas les forces de masse (p. 324), le potentiel φ vérifie l'équation de l'onde

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}, \quad \text{ou} \quad \Delta\varphi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2},$$

où c est la vitesse de propagation des ondes (p. 560). Chacune des composantes du vecteur $\mathbf{v}'$ vérifie cette même équation.

4° La différence de pression p' entre la pression totale et la pression d'équilibre est liée à φ par la relation

$$p' = -\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t},$$

où ρ est la densité d'équilibre du liquide. La différence de pression p' vérifie l'équation de l'onde

$$\Delta p' = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2}.$$

5° L'écart ρ' de la densité du liquide de sa valeur à l'équilibre se définit par

$$\rho' = \frac{p'}{c^2} = -\frac{\rho}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t},$$

notons que pour ρ' est vraie également l'équation de l'onde

$$\Delta\rho' = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\rho'}{\partial t^2}.$$

6° L'onde longitudinale est dite *plane* si le potentiel φ et autres grandeurs caractérisant le mouvement ondulatoire du milieu ne sont fonction que du temps et de l'une des coordonnées cartésiennes spatiales, par exemple de x.

L'équation d'une onde plane longitudinale est alors:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}.$$

Sa solution générale s'exprime de la manière suivante:

$$\varphi = f_1(ct - x) + f_2(ct + x),$$

où f_1 et f_2 sont des fonctions arbitraires, $f_1(ct - x)$ est le potentiel d'une onde plane se propageant dans le sens positif de l'axe Ox et $f_2(ct + x)$ le potentiel d'une onde plane se propageant dans le sens contraire. Ces deux ondes, à la différence des ondes stationnaires (p. 573), sont dites *ondes progressives*.

7° Dans une onde plane progressive longitudinale $\varphi = f(ct - x)$ le vecteur déplacement des particules du milieu $\mathbf{S} = S\mathbf{i}$, où $\mathbf{i}$ est le vecteur unité de l'axe Ox et S la valeur algébrique du déplacement vérifiant l'équation de l'onde

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}.$$

Dans le fluide la vitesse v' du mouvement oscillatoire des particules du milieu est liée à la différence de pression p' et à la variation de la densité ρ' par les relations

$$p' = \rho c v' \quad \text{et} \quad \rho' = \frac{\rho v'}{c}.$$

Le produit ρc de la densité du milieu par la vitesse de propagation des ondes longitudinales dans celui-ci est appelé *impédance d'onde du milieu*.

8° L'onde longitudinale est *sphérique* si le potentiel φ et les autres grandeurs caractérisant le mouvement ondulatoire du milieu ne sont fonction que du temps et de la distance r à un certain point dans l'espace, appelé *centre d'onde*. Les ondes sphériques sont excitées dans un milieu homogène et isotrope par une source d'ondes ponctuelle, le corps vibrant dont les dimensions sont petites devant la distance aux points considérés du milieu.

L'équation d'une onde sphérique longitudinale est alors:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}.$$

Sa solution générale est de la forme:

$$\varphi = \frac{1}{r} f_1 (ct - r) + \frac{1}{r} f_2 (ct + r),$$

où f_1 et f_2 sont des fonctions arbitraires, $\frac{1}{r} f_1 (ct - r)$ est le potentiel d'une onde sphérique divergente, et $\frac{1}{r} f_2 (ct + r)$ le potentiel d'une onde sphérique convergente.

9° *Principe de superposition des ondes:* si dans un milieu se propage simultanément un système de n ondes différentes, décrites par les potentiels scalaires $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ et par les potentiels vecteurs $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$, les potentiels φ et $\mathbf{A}$ de l'onde résultante sont égaux aux sommes des potentiels correspondants de toutes les ondes du système:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \quad \text{et} \quad \mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{A}_i.$$

Autrement dit, chacune des ondes se propage dans le milieu indépendamment des autres, c'est-à-dire comme si elles n'existaient pas. La vitesse résultante, le déplacement et l'accélération de chaque particule du milieu sont égaux aux sommes vectorielles des grandeurs correspondantes conditionnées par chacune des ondes séparément.

Le principe de superposition des ondes élastiques n'est vrai que pour les *milieux linéaires* obéissant à la loi de Hooke, autrement dit, pour les cas où la vitesse de propagation des ondes dans le milieu ne dépend pas de leur intensité (p. 569).

4. Ondes longitudinales sinusoïdales

1° On appelle *équation de l'onde longitudinale* l'équation liant le potentiel φ de la vitesse du mouvement perturbé du milieu ou quelque autre grandeur qui caractérise de façon univoque ce mouvement aux coordonnées et au temps.

2° L'onde longitudinale est dite *sinusoïdale (harmonique)* si les oscillations des particules du milieu sont harmoniques avec la même pulsation ω (p. 116), de sorte que

$$\varphi = a(x, y, z) \sin [\omega t - \alpha (x, y, z)],$$

et les fonctions des coordonnées a et α vérifient les équations différentielles suivantes:

$$\Delta a_1 + k^2 a_1 = 0, \text{ et } \Delta a_2 + k^2 a_2 = 0,$$

où $a_1 = a \cos \alpha$, $a_2 = a \sin \alpha$, $k = \omega/c$ est le *nombre d'onde*, c la vitesse de l'onde, ω la pulsation de l'onde.

La fonction $a(x, y, z)$ est dite *amplitude de l'onde*, la fonction $\Phi(x, y, z, t) = \omega t - \alpha(x, y, z)$ *phase de l'onde* et $\alpha(x, y, z)$ *phase initiale de l'onde*.

L'équation de Helmholtz

$$\Delta \varphi + k^2 \varphi = 0$$

est vraie pour l'onde sinusoïdale.

3° On appelle *surface* ou *front d'onde* le lieu géométrique de points du milieu en lesquels, à l'instant considéré, la phase de l'onde tient la même valeur. Aux différentes valeurs de la phase correspond toute une famille de surfaces d'onde. Dans le cas où dans le milieu se propage une perturbation de courte durée, le front d'onde est la limite entre les régions perturbées et non perturbées du milieu.

L'équation de la famille de surfaces d'onde est de la forme:

$$\omega t - \alpha = C,$$

où C est une constante paramétrique.

Les surfaces d'onde se déplacent sans arrêt dans le milieu tout en se déformant. Dans un milieu homogène et isotrope la vitesse de chaque point de la surface d'onde est dirigée suivant la normale à la surface et est numériquement égale à la vitesse de l'onde c (p. 560) dite *vitesse de phase* de l'onde.

4° Les surfaces d'onde d'une onde plane (p. 563) représentent un système de plans parallèles. Dans un milieu isotrope et homogène les surfaces d'onde d'une onde plane sont perpendiculaires à sa direction de propagation (à la direction du transport d'énergie) que l'on appelle *rayon*. Dans des milieux anisotropes l'angle entre le rayon et la surface d'onde est égal à 90° seulement pour certaines directions déterminées de propagation de l'onde plane.

L'équation d'une onde sinusoïdale plane se propageant dans le sens positif de l'axe Ox est de la forme:

$$\varphi = a \sin (\omega t - kx + \alpha_0),$$

et celle d'une onde se propageant dans le sens contraire

$$\varphi = a \sin (\omega t + kt + \alpha_0),$$

où α_0 est la phase initiale d'oscillation des points du milieu appartenant au plan de coordonnées yOz. Si l'onde se propage dans

un milieu parfait, dépourvu de frottement interne et de conductibilité thermique, l'amplitude de l'onde a ne dépend pas de x.

5° L'onde sinusoïdale est caractérisée par sa longueur λ, égale à la distance entre deux points les plus proches du milieu pour lesquels la différence de phase initiale est égale à 2π:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = cT = \frac{c}{\nu},$$

où $T = 2\pi/\omega$ est la *période de l'onde*, $\nu = 1/T$ la *fréquence de l'onde*.

6° La forme exponentielle d'écriture de l'équation d'une onde sinusoïdale plane est alors:

$$\varphi = Ae^{i[(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) - \omega t]},$$

où $A = ae^{i\alpha}$ est l'*amplitude complexe*, $\alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha_0$, $\mathbf{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\mathbf{n}$ le *vecteur d'onde*, **n** le vecteur unité, montrant la direction de propagation de l'onde, **r** le rayon vecteur mené au point considéré du milieu, $i = \sqrt{-1}$. $i^2 = -1$

La forme exponentielle d'écriture des équations linéaires de l'onde est commode pour la différentiation. Cependant seule la partie réelle de l'expression exponentielle a un sens physique quelconque:

$$\varphi = \mathrm{Re}\left\{Ae^{i[(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) - \omega t]}\right\}$$

(le symbole Re représente la partie réelle de l'expression complexe) à laquelle on passe pour déterminer les grandeurs physiques.

7° Chaque onde peut être représentée sous forme d'un ensemble d'ondes sinusoïdales planes avec différents vecteurs, fréquences, amplitudes et phases initiales dé l'onde. Une telle représentation est basée sur la possibilité de développer une fonction périodique en série de Fourier ou d'exprimer une fonction apériodique à l'aide de l'intégrale de Fourier (p. 705), ainsi que sur le principe de superposition des ondes (p. 564). L'ensemble d'ondes sinusoïdales dont la superposition donne l'onde considérée est dit *spectre* de cette dernière. Les ensembles des valeurs des amplitudes et des fréquences de ces ondes sinusoïdales sont appelés respectivement *spectre d'amplitudes* et *spectre de fréquences*.

8° Les surfaces d'onde d'une onde sphérique (p. 563) représentent un système de sphères concentriques. L'équation d'une onde sphérique sinusoïdale divergente est alors:

$$\varphi = \frac{a_0}{r}\sin\,(\omega t - kr + \alpha_0),$$

où α_0 est la phase initiale des oscillations de la source d'ondes, r la distance de la source, a_0 l'amplitude des oscillations aux points du milieu se trouvant à la distance $r_0 = 1$.

Sous forme exponentielle l'équation d'une onde sphérique est de la forme:

$$\varphi = A\,\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r},$$

où $\frac{A}{r} = \frac{a_0}{r}\,e^{i\alpha}$ est l'amplitude complexe, $\alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha_0$, $i = \sqrt{-1}$. Partout, excepté le point singulier $r = 0$, la fonction φ vérifie l'équation de l'onde $\Delta\varphi + k^2\varphi = 0$.

9° L'onde est dite *cylindrique* si ses surfaces d'onde ont la forme de surfaces cylindriques circulaires ayant un axe de symétrie commun. Loin de cet axe, l'équation d'une onde cylindrique divergente est de la forme:

$$\varphi = \frac{a_0}{\sqrt{R}}\sin\,(\omega t - kR + \alpha_0),$$

où R est la distance de cet axe, a_0 et α_0 des grandeurs constantes, $k = 2\pi/\lambda$ le nombre d'onde. Sous forme exponentielle:

$$\varphi = A\,\frac{e^{i(kR-\omega t)}}{\sqrt{R}},$$

où $\frac{A}{\sqrt{R}} = \frac{a_0}{\sqrt{R}}\,e^{i\alpha}$ est l'amplitude complexe, $\alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha_0$.

5. Energie des ondes acoustiques

1° On appelle densité volumique d'énergie w du milieu la limite du rapport de l'énergie ΔW du milieu comprise dans le volume ΔV à ce volume quand ΔV tend vers zéro:

$$w = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta V}.$$

2° La densité volumique d'énergie des ondes acoustiques dans un liquide est égale à la différence entre les densités volumiques d'énergie du fluide aux états perturbé et non perturbé. Elle s'exprime par la formule suivante:

$$w = \frac{\rho v'^2}{2} + \frac{c^2\rho'^2}{2\rho} = \frac{\rho}{2}\left[(\text{grad }\varphi)^2 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2\right],$$

où ρ est la densité du fluide non perturbé, c la vitesse de l'onde, v' la vitesse du mouvement oscillatoire des particules du fluide.

Le premier terme représente la densité volumique d'énergie cinétique des particules du fluide, le second terme, la densité volumique d'énergie potentielle de la déformation du fluide.

3° Dans le cas d'une onde plane longitudinale (p. 563)

$$\rho v'^2 = \frac{c^2 \rho'^2}{\rho} \quad \text{et} \quad w = \rho v'^2.$$

Si l'onde plane est sinusoïdale, autrement dit, $\varphi = a \sin(\omega t - kx + \alpha_0)$, on a:

$$w = \rho k^2 a^2 \cos^2(\omega t - kx + \alpha_0) = \rho \omega^2 a_s^2 \cos^2(\omega t - kx + \alpha_0),$$

où $a_s = a/c$ est l'amplitude d'oscillation des particules du milieu.

Pour une onde longitudinale arbitraire

$$\overline{\rho v'^2} = \frac{c^2}{\rho} \overline{\rho'^2} \quad \text{et} \quad \overline{w} = \overline{\rho v'^2},$$

où

$$\overline{v'^2} = \frac{1}{T} \int_0^T v'^2 dt, \quad \overline{\rho'^2} = \frac{1}{T} \int_0^T \rho'^2 dt \quad \text{et} \quad \overline{w} = \frac{1}{T} \int_0^T w \, dt$$

sont les valeurs moyennes pour un intervalle de temps égal à la période T de l'onde.

4° La propagation des ondes dans un milieu élastique illimité est la perturbation sous forme de mouvement oscillatoire de régions du milieu de plus en plus éloignées de la source d'ondes. L'énergie dépensée à cet effet est fournie par la source d'ondes et transmise de certaines régions du milieu à d'autres.

La loi de la conservation de l'énergie porte:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{U} = 0,$$

où $\mathbf{U} = p'\mathbf{v}'$ est le vecteur densité du flux d'énergie des ondes acoustiques *(vecteur radiant* ou *vecteur d'Oumov)*; p' est la différence de pression entre la pression totale du fluide et sa pression d'équilibre. Pour une onde plane $\mathbf{U} = w\mathbf{c} = \rho v'^2 \mathbf{c}$, où $\mathbf{c}$ est le vecteur vitesse de propagation de l'onde.

5° On appelle *intensité acoustique I (intensité sonore)* la quantité d'énergie transportée par l'onde par unité de temps à travers l'unité d'aire d'une surface normale au sens de propagation de l'onde:

$$I = |\overline{\mathbf{U}}| = |\overline{p'\mathbf{v}'}| = \frac{1}{T} \left| \int_0^T p'\mathbf{v}' dt \right|.$$

L'intensité d'une onde sinusoïdale (p. 564) est proportionnelle au carré de son amplitude:

$$I = \frac{1}{2}\rho\omega \mid \text{grad } \alpha \mid a^2 = \frac{1}{2}\rho ck \mid \text{grad } \alpha \mid a^2,$$

où $k = \omega/c$ est le nombre d'onde. Pour les ondes sinusoïdales plane et sphérique $\mid \text{grad } \alpha \mid = k$, et

$$I = \frac{1}{2}\rho ck^2a^2 = \frac{1}{2}\frac{\rho}{c}\omega^2a^2, \quad I = \frac{p_{\text{eff}}^2}{\rho c},$$

où $p_{\text{eff}} = \sqrt{\overline{p'^2}} = \sqrt{p'^2_{\max}/2}$ est la *valeur quadratique moyenne (efficace) de la pression acoustique (sonore)* d'une onde sinusoïdale, $p'_{\max}$ l'amplitude de la pression excédentaire du milieu engendrée par le mouvement ondulatoire de ce dernier.

6° On appelle *flux d'énergie* d'une onde à travers une certaine surface S la quantité d'énergie Φ transmise à travers cette surface par unité de temps:

$$\Phi = \int_S I\, dS \cos\beta = \int_S I\, dS_n,$$

où β est l'angle entre la normale à la surface dS et la direction de l'onde, $dS_n = dS \cos\beta$ l'aire de la projection de la surface dS sur le plan perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde ($dS_n < 0$ si $\pi/2 < \beta < 3\pi/2$).

6. Réflexion et réfraction des ondes acoustiques longitudinales (en l'absence de diffraction)

1° Des ondes réfléchie et réfractée apparaissent lorsqu'une onde acoustique se propageant dans un certain milieu 1 atteint sa surface de séparation avec un autre milieu 2. On appelle *onde réfléchie* l'onde se propageant à partir de la surface de séparation dans le même milieu 1 que l'onde incidente. On appelle *onde réfractée* l'onde se propageant dans le second milieu.

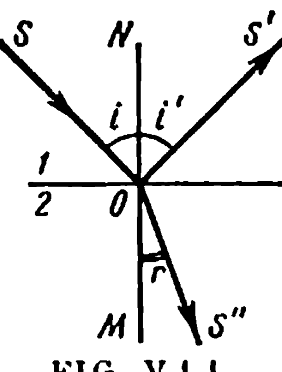


FIG. V.1.1.

L'*angle d'incidence* i (fig. V.1.1) est formé par la direction de propagation de l'onde incidente (le rayon incident SO) et la perpendiculaire ON à la surface de séparation de deux milieux au point d'incidence O. L'*angle de ré-*

flexion i' est fait par la direction de propagation de l'onde réfléchie (le rayon réfléchi OS') et la perpendiculaire ON. L'*angle de réfraction* r est formé par la direction de propagation de l'onde réfractée (le rayon réfracté OS'') et la perpendiculaire OM.

2° *Lois de la réflexion:*

a) le rayon réfléchi est situé dans le même plan (plan d'incidence) que le rayon incident et la normale à la surface de séparation des milieux menée au point d'incidence;

b) l'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence: $i' = i$.

3° *Lois de la réfraction:*

a) le rayon réfracté est situé dans le même plan (plan d'incidence) que le rayon incident et la normale à la surface de séparation des milieux menée au point d'incidence;

b) le rapport du sinus de l'angle d'incidence au sinus de l'angle de réfraction est égal au rapport des vitesses des ondes dans le premier et le second milieu:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{c_1}{c_2} = n_{21},$$

où n_{21} est l'indice de réfraction du second milieu par rapport au premier *(indice de réfraction relatif)*.

4° Les relations entre les amplitudes et les phases des ondes incidente, réfléchie et réfractée sont déterminées par les conditions aux limites: les valeurs des différences de pression acoustique dans les deux milieux, ainsi que les valeurs des composantes normales des vitesses du mouvement oscillatoire des particules doivent être les mêmes sur la surface de séparation des milieux liquides.

Pour les ondes planes et une surface de séparation plane ont lieu les relations suivantes (en l'absence d'absorption):

$$\rho_1 (A_1 + A_1') = \rho_2 A_2, \quad \frac{\cos i}{c_1} (A_1 - A_1') = \frac{\cos r}{c_2} A_2,$$

où A_1, A_1' et A_2 sont les amplitudes complexes des potentiels de vitesse pour les ondes incidente, réfléchie et réfractée, i et r les angles d'incidence et de réfraction, ρ_1 et ρ_2 les densités des milieux, c_1 et c_2 les vitesses des ondes dans ces milieux;

$$A_1' = \frac{\rho_2 c_2 \cos i - \rho_1 c_1 \cos r}{\rho_2 c_2 \cos i + \rho_1 c_1 \cos r} A_1, \quad A_2 = \frac{2 \rho_1 c_2 \cos i}{\rho_2 c_2 \cos i + \rho_1 c_1 \cos r} A_1,$$

ou bien

$$A_1' = \frac{\frac{\rho_2}{\rho_1} - \frac{\operatorname{cotg} r}{\operatorname{cotg} i}}{\frac{\rho_2}{\rho_1} + \frac{\operatorname{cotg} r}{\operatorname{cotg} i}} A_1, \quad A_2 = \frac{2}{\frac{\rho_2}{\rho_1} + \frac{\operatorname{cotg} r}{\operatorname{cotg} i}} A_1.$$

Si $\rho_1 = \rho_2$, on a $\dfrac{A_1'}{A_1} = \dfrac{\sin\ (r - i)}{\sin\ (r + i)}$. Si $\rho_1 c_1^2 = \rho_2 c_2^2$ (les milieux ont les mêmes élasticités), on a $\dfrac{A_1'}{A_1} = \dfrac{\operatorname{tg}\ (i - r)}{\operatorname{tg}\ (i + r)}$.

5° L'onde plane réfléchie fait défaut si

$$\operatorname{cotg}^2 i = \frac{\left(\dfrac{c_1}{c_2}\right)^2 - 1}{\left(\dfrac{\rho_2}{\rho_1}\right)^2 - \left(\dfrac{c_1}{c_2}\right)^2} = \frac{\left(c_1^2 - c_2^2\right)\rho_1^2}{(\rho_2 c_2)^2 - (\rho_1 c_1)^2},$$

ce qui est réalisable à condition que $c_1 > c_2$ et $\rho_2 c_2 > \rho_1 c_1$ ou inversement $c_1 < c_2$ et $\rho_2 c_2 < \rho_1 c_1$. Dans le cas d'incidence normale $(i = r = 0)$ $A_1' = 0$ si $\rho_2 c_2 = \rho_1 c_1$.

6° L'onde plane réfractée fait défaut si $c_2 > c_1$ et $i > i_{\text{lim}}$, où i_{lim} est l'*angle limite (critique)* déterminé à partir de la relation

$$\sin\ i_{\text{lim}} = \frac{c_1}{c_2} = n_{21}.$$

Ce phénomène est appelé *réflexion totale.*

7° Considérons les relations de phase pour le cas d'incidence normale de l'onde plane sur une surface de séparation plane des milieux. Si $\rho_2 c_2 > \rho_1 c_1$, la différence de phase entre les ondes réfléchie et incidente sur la surface de séparation est nulle pour les potentiels de vitesse (leurs amplitudes A_1' et A_1 sont de même signe) et pour les différences de pression et est égale à π pour les vitesses du mouvement oscillatoire des particules du milieu.

Lorsque $\rho_2 c_2 < \rho_1 c_1$, la différence de phase entre les ondes réfléchie et incidente est égale à π pour les potentiels de vitesse (leurs amplitudes A_1' et A_1 sont de signe contraire) et pour les différences de pression et est nulle pour les vitesses du mouvement oscillatoire des particules du milieu.

La différence de phase pour n'importe quelles grandeurs homogènes caractérisant les ondes réfractée et incidente est nulle sur la surface de séparation des milieux, indépendamment des propriétés de ces milieux et de la valeur de l'angle d'incidence.

8° On appelle *facteur de réflexion R* le rapport des intensités des ondes réfléchie et incidente. Pour une onde plane

$$R = \frac{|A_1'|^2}{|A_1|^2} = \left(\frac{\rho_2 \operatorname{tg} r - \rho_1 \operatorname{tg} i}{\rho_2 \operatorname{tg} r + \rho_1 \operatorname{tg} i}\right)^2 = \left(\frac{\rho_2 c_2 \cos i - \rho_1 \sqrt{c_1^2 - c_2^2 \sin^2 i}}{\rho_2 c_2 \cos i + \rho_1 \sqrt{c_1^2 - c_2^2 \sin^2 i}}\right)^2.$$

Dans le cas d'incidence normale

$$R = \left(\frac{\rho_2 c_2 - \rho_1 c_1}{\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1} \right)^2 .$$

Lorsque $\rho_2 c_2 \gg \rho_1 c_1$ ou bien $\rho_1 c_1 \gg \rho_2 c_2$, on a: $R \approx 1$.

On appelle *facteur de transmission* D le rapport des intensités des ondes réfractée et incidente. Pour l'onde plane

$$D = \frac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1} \frac{|A_2|^2}{|A_1|^2} = \frac{4 \rho_1 \rho_2 c_1 c_2}{\left(\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1 \frac{\cos r}{\cos i} \right)^2} =$$

$$= \frac{4 \rho_1 c_1}{\rho_2 c_2 \left[1 + \frac{\rho_1}{\rho_2 \cos i} \sqrt{\left(\frac{c_1}{c_2} \right)^2 - \sin^2 i} \right]^2} .$$

De la loi de la conservation de l'énergie il découle qu'en l'absence d'absorption

$$D \frac{\cos r}{\cos i} + R = 1.$$

Dans le cas d'incidence normale $D + R = 1$.

Le facteur R ne varie pas en valeur lors de l'inversion de propagation de l'onde, autrement dit, il est le même pour l'onde plane incidente sous l'angle i du premier milieu sur la surface de séparation et pour l'onde plane incidente sous l'angle r du second milieu sur la même surface.

9° La pression acoustique p exercée par l'onde plane sur la surface de séparation de deux milieux est:

a) pour l'incidence oblique ($i \neq 0$)

$$p = \frac{I_1}{2c_1} [(1 + R) \operatorname{cotg} i - (1 - R) \operatorname{cotg} r] \sin 2i;$$

b) pour l'incidence normale ($i = 0$)

$$p = \frac{2I_1}{c_1} \frac{(\rho_1 c_1)^2 + (\rho_2 c_2)^2 - 2 \rho_1 \rho_2 c_1}{(\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2)^2} ,$$

où $I_1 = \bar{w}_1 c_1$ est l'intensité de l'onde incidente, c_1 la vitesse de cette onde, $\bar{w}_1$ la densité volumique moyenne d'énergie de l'onde incidente.

10° Lorsqu'une onde sphérique est réfléchie par une surface de séparation plane de deux milieux, l'onde réfléchie représente également une onde sphérique ayant son centre au point O', symétrique au centre O de l'onde incidente (fig. V.1.2) par rapport

à la surface de séparation MN. L'amplitude de l'onde réfléchie est inversement proportionnelle à la distance du point O'.

Lorsque $c_2 > c_1$, on observe dans le premier milieu, en plus de la propagation de l'onde sphérique réfléchie, la propagation d'une *onde latérale*. Les fronts d'onde de l'onde latérale sont des surfaces coniques tronquées dont les axes coïncident avec la perpendiculaire OO', tandis que les génératrices AB sont tangentes aux fronts d'onde correspondants de l'onde réfléchie et forment avec le plan MN l'angle γ satisfaisant à la condition $\sin\gamma = c_1/c_2$. L'amplitude de l'onde latérale à un point arbitraire C dépend de $\angle OO'C$ et est inversement proportionnelle au carré de la distance $r' = O'C$

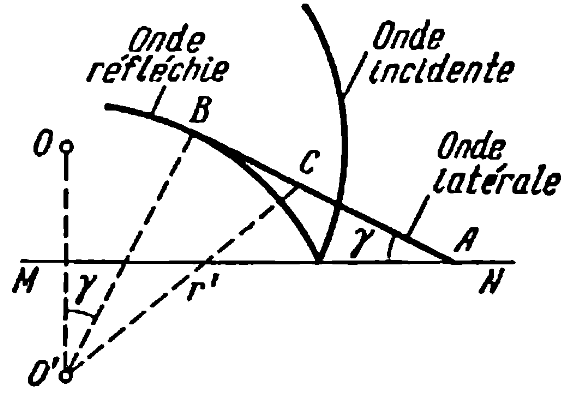


FIG. V.1.2.

7. Ondes stationnaires

1° L'*onde stationnaire* résulte de l'interférence de deux ondes qui se propagent dans les directions antiparallèles et satisfont aux conditions suivantes: les fréquences des ondes sont les mêmes, les amplitudes représentent des fonctions de coordonnées identiques. Dans le cas d'ondes transversales une même polarisation des deux ondes (p. 561) est nécessaire. Les ondes stationnaires sont un cas particulier de l'interférence des ondes (p. 623).

2° Une onde stationnaire longitudinale plane apparaît, par exemple, lors de l'interférence des ondes planes incidente et réfléchie si l'angle d'incidence est nul et le facteur de réflexion $R = 1$, autrement dit, lorsque la réflexion a lieu dans un milieu avec une impédance d'onde très grande ou très petite. L'équation d'une onde stationnaire sinusoïdale longitudinale plane qui résulte de la superposition d'une onde directe $\varphi_1 = a \sin(\omega t - kx + \alpha_1)$ et d'une onde réfléchie $\varphi_2 = a \sin(\omega t + kx + \alpha_2)$ est de la forme:

$$\varphi = 2a \cos\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} - kx\right) \sin\left(\omega t + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right).$$

3° L'amplitude d'une onde stationnaire plane a_{st} est une fonction périodique de la coordonnée x et ne dépend pas du temps:

$$a_{st} = 2a \left|\cos\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} - kx\right)\right|.$$

Les points de l'espace en lesquels $a_{st} = 0$ sont appelés *nœuds de l'onde stationnaire* et les points en lesquels a_{st} prend sa valeur maximale $(a_{st})_{max} = 2a$ *ventres de l'onde stationnaire.* Pour les nœuds $\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} - kx = (2m + 1)\frac{\pi}{2}$, pour les ventres $\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} - kx = 2m\frac{\pi}{2}$, où $m = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots$

4° On appelle *longueur d'onde stationnaire* λ_{st} la distance entre deux nœuds ou deux ventres voisins:

$$\lambda_{st} = \frac{\pi}{k} = \frac{\lambda}{2},$$

où λ est la longueur d'ondes progressives. La distance entre un nœud et un ventre voisins est égale à $\lambda_{st}/2 = \lambda/4$. Les nœuds de vitesse et de déplacement des particules du fluide coïncident avec les ventres du potentiel de vitesse et de pression.

5° Dans une onde stationnaire toutes les particules du milieu oscillant entre deux nœuds voisins ont la même phase et différentes amplitudes. Lors du passage à travers un nœud la phase d'oscillation varie brusquement de π, car $\cos\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} - kx\right)$ change de signe.

6° A la différence des ondes progressives, les ondes stationnaires ne s'accompagnent pas de transport d'énergie, ce phénomène se manifeste en particulier dans ce que les positions spatiales des nœuds et des ventres ne varient pas avec le temps. L'absence de transport d'énergie par une onde stationnaire s'explique par le fait que les ondes directe et réfléchie formant cette onde transportent une quantité égale d'énergie dans des directions opposées.

7° Une onde sphérique stationnaire apparaît lors de l'interférence des ondes sphériques harmoniques (divergente et convergente)

$$\varphi_1 = \frac{a_0}{r}\sin(\omega t - kr + \alpha_1) \text{ et } \varphi_2 = \frac{a_0}{r}\sin(\omega t + kr + \alpha_2).$$

L'équation de cette onde est de la forme:

$$\varphi = \frac{2a_0}{r}\cos\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} - kr\right)\sin\left(\omega t + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right).$$

Les conditions de formation des nœuds et des ventres sont:

$$\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} - kr = \begin{cases} (2m+1)\frac{\pi}{2}, & \text{nœuds} \\ 2m\frac{\pi}{2}, & \text{ventres} \end{cases} \qquad (m = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots)$$

8° Lorsque le fluide emplit un milieu limité, les fréquences de ses oscillations libres (p. 119) peuvent prendre un nombre innombrable de valeurs discrètes définies appelées ***fréquences propres***. Dans ce cas apparaît à l'intérieur du fluide un système complexe d'ondes stationnaires, qui essentiellement dépend de la forme et et des dimensions du récipient.

Plus bas sont indiquées les valeurs des fréquences propres des oscillations pour quelques cas particuliers.

a) Soit une colonne cylindrique de gaz enfermée dans un tuyau de longueur l. Si les deux extrémités du tuyau sont fermées ou ouvertes, on a $\nu = \frac{mc}{2l}$; si une extrémité est fermée et l'autre ouverte, on a $\nu = (2m - 1)\frac{c}{4l}$ ($m = 1, 2, 3, \ldots$, c est la vitesse de phase des ondes dans le gaz). Les nœuds de vitesse (et également de déplacement) des particules gazeuses et les ventres de pression sont disposés aux extrémités fermées du tuyau, les nœuds de pression et les ventres de vitesse aux extrémités ouvertes.

Les conditions écrites ci-dessus pour les tuyaux ouverts à une extrémité ou aux deux extrémités sont approchées, étant donné qu'elles sont obtenues en supposant l'absence de flux d'énergie à travers les extrémités ouvertes du tuyau. Ces conditions sont réalisées si le rayon du tuyau $R \ll \lambda$ (λ est la longueur d'onde). Dans le cas général d'un tuyau à deux extrémités ouvertes

$$\nu = \frac{mc}{2(l + 2bR)} \quad (m = 1, 2, \ldots)$$

et d'un tuyau à une extrémité ouverte

$$\nu = \frac{(2m - 1)c}{4(l + bR)} \quad (m = 1, 2, \ldots),$$

où $b = 0{,}63$ s'il n'y a pas de collerettes aux extrémités ouvertes du tuyau, et $b = 0{,}80$ s'il y en a.

b) Pour un fluide enfermé dans un récipient en forme de parallélépipède rectangulaire dont les côtés sont a, b et d:

$$\nu = \frac{c}{2}\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{p^2}{d^2}},$$

où m, n et p sont des nombres entiers arbitraires.

c) La fréquence propre d'un résonateur avec un long tube fin est la suivante:

$$\nu = \frac{c}{2\pi}\sqrt{\frac{S}{lV}},$$

où V est le volume de la cavité résonante, S l'aire de la section transversale du tube, l la longueur du tube ($l \gg a_s$, où a_s est l'amplitude des oscillations du gaz dans le tube). Les résonateurs sphériques creux de tel type sont appelés *résonateurs de Helmholtz.*

9° Les fréquences propres des oscillations transversales d'une corde de longueur l (p. 561) sont définies de la sorte

$$\nu = \frac{n}{2l}\sqrt{\frac{F}{\rho S}}, \quad \text{où } n = 1, 2, \ldots$$

Les nœuds de déplacement et les ventres de déformation et de contrainte sont aux extrémités de la corde.

10° Fréquences propres des oscillations longitudinales d'une barre mince de longueur l.

a) La barre est fixée en son milieu:

$$\nu = \frac{2n+1}{2l}\sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad \text{où } n = 0, 1, 2, \ldots,$$

ρ et E sont la densité et le module de Young du matériau de la barre. Les nœuds de déformation et les ventres de déplacement sont aux extrémités de la barre.

b) La barre est fixée à une extrémité:

$$\nu = \frac{2n+1}{4l}\sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad \text{où } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Il y a à l'extrémité fixée un nœud de déplacement (un ventre de déformation), à l'extrémité libre un nœud de déformation (un ventre de déplacement).

c) La barre est fixée par ses deux extrémités ou suspendue librement à des fils non élastiques:

$$\nu = \frac{n}{2l}\sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad \text{où } n = 1, 2, \ldots$$

Dans le premier cas on a aux extrémités de la barre des nœuds de déplacement (des ventres de déformation), dans le second, des nœuds de déformation (des ventres de déplacement).

8. Effet Doppler

1° On appelle *effet Doppler* la variation de la fréquence des ondes, perçue par le récepteur, en fonction des vitesses de mouve-

ment de la source d'ondes et du récepteur par rapport au milieu dans lequel se propage cette onde. Si la source d'ondes oscillant avec la fréquence ν_0 se déplace par rapport au milieu avec la vitesse $\mathbf{u}_1$ et l'observateur, avec la vitesse $\mathbf{u}_2$, la fréquence ν, perceptée par l'observateur, sera alors:

$$\nu = \nu_0 \frac{1 + \frac{u_2}{c}\cos\theta_2}{1 + \frac{u_1}{c}\cos\theta_1},$$

où c est la vitesse des ondes dans le milieu immobile, θ_1 et θ_2 les angles formés par les vecteurs $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ avec le vecteur $\mathbf{R}$ reliant le récepteur à la source d'ondes.

2° Dans le cas où $u_1/c \ll 1$ et $u_2/c \ll 1$, on peut appliquer la formule approchée

$$\nu = \nu_0 \left(1 - \frac{u}{c}\cos\theta\right),$$

où u est la vitesse relative de la source et du récepteur ($\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$), θ l'angle entre les vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{R}$.

Si la source et l'observateur se rapprochent, l'angle θ est obtus, $\cos\theta < 0$ et $\nu > \nu_0$; si la source et l'observateur s'éloignent l'un de l'autre, l'angle θ est aigu, $\cos\theta > 0$ et $\nu < \nu_0$.

En ce qui concerne l'effet Doppler en optique, voir p. 558.

9. Absorption et diffusion des ondes acoustiques

1° La propagation des ondes acoustiques dans un milieu homogène s'accompagne de dissipation d'énergie (p. 72) conditionnée par frottement interne et conductibilité thermique. Ce phénomène est appelé ***absorption des ondes acoustiques***.

L'amplitude a et l'intensité I d'une onde plane qui se propage le long du sens positif de l'axe Ox dépendent de x suivant une loi exponentielle:

$$a(x) = a_0 e^{-\gamma x} \quad \text{et} \quad I(x) = I_0 e^{-2\gamma x},$$

où a_0 et I_0 sont l'amplitude et l'intensité au point $x = 0$, γ le ***coefficient d'absorption du son***.

Pour les ondes longitudinales dans les fluides

$$\gamma = \frac{\omega^2}{2\rho c^3}\left[\frac{4}{3}\eta + \zeta + K\frac{c_p - c_V}{c_p c_V}\right],$$

où ω et c sont respectivement la pulsation et la vitesse de l'onde; ρ, η, ζ et K la densité, la viscosité dynamique, la deuxième viscosité (p. 335) et le coefficient de conductibilité thermique du milieu, c_p et c_V les chaleurs spécifiques du milieu dans les transformations isobare et isochore. Les relations indiquées sont vraies à condition que $\gamma c/\omega \ll 1$, autrement dit, lors d'une décroissance relative faible de l'amplitude de l'onde à une distance égale à la longueur d'onde.

2° Une absorption intense se produit lors de la réflexion d'une onde acoustique à partir d'une paroi rigide. Elle est due à ce qu'au voisinage de la paroi le gradient de température et la composante de la vitesse des particules du fluide tangente à la paroi (lors de l'incidence oblique d'une onde acoustique) sont considérables.

La fraction d'énergie absorbée lors de la réflexion d'une onde acoustique à partir d'une paroi rigide est:

$$\frac{\Delta W}{W} = \frac{2\sqrt{2\omega}}{c \cos i}\left[\sqrt{\nu}\,\sin^2 i + \left(\frac{c_p}{c_V} - 1\right)\sqrt{a}\right],$$

où ω et c sont respectivement la pulsation et la vitesse de l'onde acoustique incidente, i l'angle d'incidence, c_p et c_V les chaleurs spécifiques du fluide dans les transformations isobare et isochore, ν et a la viscosité cinématique (p. 334) et le coefficient de diffusivité thermique (p. 233) du fluide. Cette formule est vraie pour $i \ll \pi/2$, si la résistance acoustique de la paroi est très supérieure à l'impédance d'onde du fluide et que la température de la paroi soit constante.

3° L'amortissement du son dans des locaux fermés après que la source cesse à vibrer est caractérisé par le *temps de réverbération* égal à l'intervalle de temps durant lequel la densité volumique d'énergie des ondes acoustiques diminue de 10^6 fois par comparaison avec sa valeur initiale.

4° On appelle *dispersion du son* le processus de transformation de l'onde acoustique en une multitude d'ondes se propageant dans toutes les directions possibles. La dispersion du son résulte de l'interaction de l'onde acoustique avec les innombrables obstacles se rencontrant sur son chemin.

La relation σ de la puissance des ondes dispersées à l'intensité de l'onde initiale (incidente sur un obstacle) est appelée *section efficace totale* de la dispersion du son. Lorsque les dimensions de l'obstacle sont petites devant la longueur d'onde acoustique, on a $\sigma \sim \omega^4$, où ω est la pulsation de l'onde incidente.

10. Eléments d'acoustique physiologique

1° Les ondes sonores dont les fréquences sont comprises dans les limites de 16 à 20 000 Hz sont appelées *sons audibles*, étant donné qu'en agissant sur les organes de l'ouïe de l'homme, elles sont susceptibles d'exciter des sensations sonores (cf. également 3°). Les ondes sonores avec les fréquences $\nu < 16$ Hz, sont dites *infrasonores* et avec les fréquences $\nu > 2 \cdot 10^4$ Hz, *ultrasonores*.

2° Le caractère de perception du son par les organes de l'ouïe dépend de son spectre de fréquences (p. 566). Les *bruits* possèdent un spectre continu, autrement dit, les fréquences des ondes sinusoïdales simples formant ceux-ci constituent une série continue de valeurs, comprises complètement dans un certain intervalle. Les *sons musicaux* possèdent un spectre linéaire de fréquences: les fréquences ν_i des ondes sinusoïdales formant ceux-ci constituent une série de valeurs discrètes. Des oscillations périodiques ou quasi périodiques correspondent aux sons musicaux.

Chaque onde sonore sinusoïdale est appelée *son simple*. La *hauteur* du son dépend de la fréquence: le son est d'autant plus aigu que la fréquence est plus élevée. On appelle *son fondamental* d'un son musical complexe le son correspondant à la plus petite fréquence du spectre. Les sons correspondant aux autres fréquences du spectre sont des sons accessoires. Si les fréquences de ces derniers sont des multiples de la fréquence ν_0 du son fondamental, on les appelle *harmoniques*. Le son fondamental avec la fréquence ν_0 est dit *premier harmonique*, l'harmonique avec la fréquence $2\nu_0$ *deuxième harmonique*, etc.

Les sons musicaux avec le même son fondamental peuvent différer en *timbre*. Le timbre dépend de la composition des harmoniques, autrement dit, de leurs fréquences et de leurs amplitudes, ainsi que du caractère de croissance des amplitudes au début du son et de leur décroissance à la fin du son.

3° Comme mesure d'intensité d'une sensation sonore sert l'*intensité acoustique*. L'intensité du son dépend de sa pression efficace p_{eff} (p. 568) et de sa fréquence. On appelle *seuil d'audibilité* la valeur minimale de la pression efficace p_0 à laquelle le son est encore perçu par les organes de l'ouïe. Le seuil d'audibilité dépend de la fréquence du son, atteignant sa valeur minimale de l'ordre de $2 \cdot 10^{-5}$ N/m² pour des fréquences $\nu = 700 \div 6\,000$ Hz. Le *seuil standard d'audibilité* p_0^* est admis égal à $2 \cdot 10^{-5}$ N/m² lorsque $\nu = 1\,000$ Hz.

On appelle *seuil de sensation douloureuse (seuil de perception)* la pression efficace maximale du son à laquelle la perception du

son ne provoque pas de sensation douloureuse. Lorsque la pression acoustique efficace dépasse cette valeur, la perception normale du son n'est pas possible. Le seuil de douleur dépend de la fréquence du son.

4° On appelle *niveau de pression acoustique* d'une onde sonore sinusoïdale la grandeur L proportionnelle au logarithme décimal du rapport de la pression efficace p_{eff} de cette onde au seuil d'audibilité p_0 pour une fréquence donnée de l'onde:

$$L = 2k \lg \frac{p_{eff}}{p_0},$$

où k est le facteur dépendant du choix des unités de mesure de L.

Le choix de la dépendance logarithmique de L de p_{eff} est fondé sur la *loi de Weber-Fechner* qui porte: l'accroissement de l'intensité de sensation est proportionnel au logarithme du rapport des intensités de deux excitations comparées.

5° La loi de Weber-Fechner est une pseudo-loi. Dans le domaine des énergies d'excitation proches des énergies de seuil elle donne des divergences notables avec les données des expériences. Etant appliquée à l'acoustique physiologique, cette loi ne tient pas compte de façon suffisamment juste de l'influence de la fréquence du son sur son intensité. Aussi utilise-t-on, pour comparer l'intensité des ondes sonores de toutes les fréquences possibles, une grandeur appelée *niveau d'intensité acoustique*, qui s'exprime de la manière suivante:

$$L^* = 2k \lg \frac{p^*_{eff}}{p^*_0},$$

où p^*_0 est le seuil standard d'audibilité et p^*_{eff} la pression efficace du son de fréquence $\nu = 1\,000$ Hz et de même intensité que le son considéré. Le niveau d'intensité acoustique des ondes sonores de fréquence 1 000 Hz coïncide avec le niveau de pression acoustique.

11. Ultrason

1° On appelle *ultrason* les ondes élastiques dont la fréquence varie de $2 \cdot 10^4$ à 10^{13} Hz. Les ondes ultrasonores avec des fréquences de l'ordre de 10^9 Hz et plus sont dites parfois *hypersonores*. La limite supérieure des fréquences de l'ultrason ($10^{12} \div 10^{13}$ Hz dans

les cristaux et liquides et 10^9 Hz dans les gaz dans les conditions normales) correspond aux fréquences auxquelles la longueur d'onde de l'ultrason devient commensurable aux distances intermoléculaires (dans le cas des gaz au parcours libre moyen des molécules). Pour produire des ultrasons, on utilise des générateurs mécaniques et électromécaniques. La *sirène* est un exemple de générateur mécanique d'ultrasons de basse fréquence ($\nu = 20 \div 200$ kHz) et de grande intensité. La «sonorité» de la sirène résulte de l'interruption périodique d'un flux puissant d'air comprimé ou de vapeur passant à travers des orifices faits dans deux disques coaxiaux, dont l'un est fixe (stator) et l'autre soumis à une rotation (rotor). La fréquence du son de la sirène est $\nu = N\omega/2\pi$, où ω est la vitesse angulaire du rotor, N le nombre d'orifices disposés régulièrement sur les circonférences du stator et du rotor.

Les générateurs ultrasonores électromécaniques se divisent en deux types principaux: générateurs magnétostrictifs et générateurs piézoélectriques.

Les *générateurs magnétostrictifs* sont réservés pour produire des ultrasons de basse fréquence (jusqu'à 200 kHz). Leur principe d'action est basé sur le phénomène de magnétostriction (p. 500) ayant lieu dans un champ magnétique variable. Le générateur le plus simple de tel genre est un barreau ferromagnétique, le noyau d'un solénoïde, par lequel on fait passer un courant alternatif de haute fréquence.

Les *générateurs piézoélectriques* sont réservés pour produire des ultrasons avec des fréquences voisines de 50 MHz. L'élément de base d'un générateur piézoélectrique est une lame en matériau piézoélectrique, qui effectue par suite de l'effet piézoélectrique inverse (p. 387) des oscillations mécaniques forcées dans un champ électrique variable.

2° Pour enregistrer et analyser les ultrasons, on utilise des capteurs piézoélectriques et magnétostrictifs. Dans les premiers est utilisé l'effet piézoélectrique direct (p. 386), qui surgit dans la lame en matériau piézoélectrique soumise à des oscillations forcées sous l'action des ondes ultrasonores enregistrées. Les capteurs magnétostrictifs sont basés sur le phénomène de variation de l'induction du champ magnétique d'une substance ferromagnétique lors de sa déformation. La déformation variable d'un barreau ferromagnétique sur l'extrémité duquel agit l'onde ultrasonore provoque l'apparition d'une f.é.m. variable d'induction électromagnétique dans la bobine enroulée sur le barreau.

3° En raison de leur faible longueur d'onde les ultrasons, de même que la lumière, peuvent être émis sous forme de minces faisceaux dirigés. La réflexion et la réfraction des fais-

ceaux ultrasonores sur la surface de séparation de deux milieux obéit aux lois de l'optique géométrique (p. 651).

Pour changer la direction et focaliser les rayons ultrasonores, on utilise des miroirs de différentes formes, des lentilles acoustiques, des émetteurs de forme spéciale, etc. Les miroirs doivent aussi bien que possible réfléchir les ondes ultrasonores, c'est pourquoi on les fabrique en matériaux dont les résistances acoustiques sont de beaucoup supérieures à la résistance acoustique du milieu. Les lentilles acoustiques sont fabriquées en matériaux dont les résistances acoustiques sont proches de la résistance acoustique du milieu. Les propriétés convergentes (divergentes) des lentilles acoustiques et des miroirs obéissent aux mêmes lois que celles des dispositifs optiques correspondants.

4° Les amplitudes de la vitesse et de l'accélération du mouvement oscillatoire des particules du milieu, ainsi que l'amplitude de la pression acoustique des ondes ultrasonores sont de beaucoup supérieures aux grandeurs correspondantes des sons audibles. L'amplitude considérable de la pression acoustique créée par les émetteurs ultrasonores puissants est cause de l'apparition dans les liquides de la *cavitation:* formation et disparition au sein du liquide des discontinuités internes. La disparition de ces discontinuités, qui tiennent la forme de bulles minuscules, s'accompagne d'une augmentation momentanée de la pression jusqu'à des centaines et même des milliers d'atmosphères. Ce fait explique l'action destructive des ultrasons: ils détruisent les corps solides, les organismes vivants, les grosses molécules, etc., qui se trouvent au sein du liquide.

5° Les ultrasons sont absorbés de façon très intense par les gaz et beaucoup plus faiblement par les liquides. Par exemple, le coefficient d'absorption de l'ultrason dans l'air est environ 1 000 fois plus grand que dans l'eau. L'une des causes de cette différence consiste en ce que la viscosité cinématique de l'eau est très inférieure à la viscosité de l'air.

6° En technique, les ultrasons sont utilisés aux fins de contrôle et de mesure (sondage sous-marin ultrasonore, sondage ultrasonoscopique, mesure de l'épaisseur des parois des conduites et de la couche d'incrustation), ainsi que pour la réalisation et l'accélération de différents processus technologiques.

7° Le *principe de sondage sous-marin ultrasonore* est analogue au principe de radar (p. 608). Il consiste à déterminer la distance au corps plongé dans l'eau suivant l'intervalle de temps qui sépare l'émission d'un signal ultrasonore court et la réception de l'*écho* (signal réfléchi) dû à la dispersion de l'ultrason par le corps. Suivant la variation de la fréquence de l'écho due à l'effet Doppler

(p. 576) on peut également déterminer la vitesse radiale du corps, autrement dit, la projection de la vitesse de mouvement du corps par rapport à l'observateur sur la ligne qui les réunit.

8° On appelle *sondage ultrasonoscopique* la détection des défauts internes (failles, cavités, hétérogénéités de structure) dans les solides à l'aide de l'ultrason. Elle est basée sur le phénomène de dispersion des ondes ultrasonores à partir des surfaces des régions défectueuses du corps.

9° L'action destructive des ultrasons est utilisée dans différents processus technologiques: pour former les émulsions et les suspensions, lever les pellicules d'oxydes et dégraisser les surfaces des détails, stériliser les liquides, triturer les grains d'émulsion photographique, etc. L'action destructive des ondes ultrasonores au sein du liquide augmente notablement à la surface du corps solide, lorsqu'on introduit dans le liquide de petites particules d'abrasifs. Ce phénomène est utilisé pour le polissage ultrasonore, ainsi que pour le «perçage» d'orifices de différentes formes dans le verre, la céramique, les alliages extradurs et les cristaux.

10° Les ultrasons accélèrent les processus de diffusion et de dissolution et les réactions chimiques. L'influence de l'ultrason sur le cours des réactions chimiques est due principalement à la formation des ions libres lors de la cavitation au sein du liquide. L'ultrason est utilisé pour purifier le gaz, étant donné qu'il provoque la coagulation des menues particules solides et des gouttelettes de liquide contenues dans le gaz.

11° Les ondes ultrasonores sont largement utilisées en *acoustique moléculaire* pour étudier la structure et les propriétés de la substance.

12. Ondes de choc dans les gaz

1° On appelle *onde de choc* la propagation dans un milieu gazeux, liquide ou solide d'une surface sur laquelle a lieu l'augmentation brusque de la pression accompagnée de la variation de densité, de température et de vitesse de mouvement du milieu. Cette surface est appelée *surface de discontinuité*. Les ondes de choc surgissent, par exemple, lors d'une explosion, d'une détonation ou lors d'un mouvement des corps dans l'air à des vitesses supersoniques, etc. La vitesse de propagation d'une onde de choc par rapport au milieu non perturbé est supérieure à la vitesse du son dans ce dernier.

2° Sur la surface de discontinuité dans les gaz sont réalisées les conditions suivantes:

$$\rho_1 v_{1n} = \rho_2 v_{2n}, \quad \frac{v_{1n}^2}{2} + h_1 = \frac{v_{2n}^2}{2} + h_2,$$

$$p_1 + \rho_1 v_{1n}^2 = p_2 + \rho_2 v_{2n}^2, \quad v_{1\tau} = v_{2\tau},$$

où ρ et p sont la densité et la pression du gaz, v_n et v_τ les projections de la vitesse du gaz (dans le système de coordonnées rigidement lié à l'élément de surface de discontinuité considéré) sur la normale à l'élément de surface de discontinuité et le plan tangent à celle-ci, h l'enthalpie (p. 163) par unité de masse de gaz, les indices 1 et 2 se rapportent aux états du gaz de part et d'autre de la surface de discontinuité, autrement dit, avant et après le choc de compression.

3° Le choc de compression est dit *normal* si sa surface est normale à la vitesse du flux de gaz $v_{1\tau} = 0$ et $v_{1n} = v_1$, $v_{2n} = v_2$. Dans le cas contraire le choc de compression est dit *oblique*.

4° Quelques relations se rapportent aux chocs de compression:

$$\frac{p_2 - p_1}{\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}} = (\rho_1 v_{1n})^2, \quad v_{1n} - v_{2n} = \sqrt{(p_2 - p_1)\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)}.$$

L'équation de l'*adiabatique de choc (adiabatique de Hugoniot)* est la suivante:

$$h_1 - h_2 + \frac{1}{2}(p_2 - p_1)\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right) = 0,$$

ou bien

$$u_1 - u_2 + \frac{1}{2}(p_1 + p_2)\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right) = 0,$$

où u est l'énergie interne (p. 161) d'une unité de masse de gaz.

Pour un gaz parfait avec les chaleurs spécifiques c_p et c_V (p. 168)

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{(\varkappa + 1)\frac{\rho_2}{\rho_1} - (\varkappa - 1)}{(\varkappa + 1) - (\varkappa - 1)\frac{\rho_2}{\rho_1}}, \quad \text{ou} \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\varkappa + 1)\frac{p_2}{p_1} + (\varkappa - 1)}{(\varkappa - 1)\frac{p_2}{p_1} + (\varkappa + 1)},$$

où $\varkappa = c_p/c_V$ est l'indice d'adiabatique. Lors d'un accroissement illimité du saut de pression ($p_2/p_1 \to \infty$) le rapport des densités du gaz avant et après le saut tend vers une limite finie égale à $\frac{\varkappa + 1}{\varkappa - 1}$. Ce résultat découle de l'irréversibilité du processus de

compression adiabatique du gaz par une onde de choc, accompagné de dissipation d'énergie et de croissance d'entropie. Si l'écoulement du gaz est potentiel (p. 330) avant l'onde de choc, il devient tourbillonnaire après celle-ci.

Le saut d'entropie d'une onde de choc de faible intensité est proportionnel au cube du saut de pression:

$$s_2 - s_1 = \frac{1}{12T_1}\left(\frac{\partial^2 \frac{1}{\rho}}{\partial p^2}\right)_s (p_2 - p_1)^3,$$

où T_1 est la température absolue du gaz avant l'onde de choc, s et ρ l'entropie spécifique et la densité du gaz $\left(\frac{\partial^2 \frac{1}{\rho}}{\partial p^2}\right)_s > 0$.

5° Choc de compression normal. Après le choc normal la vitesse du gaz devient subsonique. Les vitesses du gaz avant (v_1) et après (v_2) le choc de compression satisfont aux relations:

$$v_1 v_2 = c_*^2, \quad v_1 > c_1 \quad \text{et} \quad v_2 < c_2,$$

où c_1 et c_2 sont les vitesses du son avant et après le choc de compression, c_* la vitesse critique (p. 354).

Pour un gaz parfait

$$v_1 = c_1 \sqrt{\frac{1}{2\varkappa}\left[(\varkappa+1)\frac{p_2}{p_1} + (\varkappa-1)\right]},$$

$$v_2 = c_1 \frac{(\varkappa-1)\frac{p_2}{p_1} + (\varkappa+1)}{\sqrt{2\varkappa\left[(\varkappa+1)\frac{p_2}{p_1} + (\varkappa-1)\right]}},$$

$$c_* = \sqrt{\frac{2}{\varkappa+1}c_1^2 + \frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}v_1^2} = \sqrt{\frac{c_1^2}{2\varkappa}\left[(\varkappa-1)\frac{p_2}{p_1} + (\varkappa+1)\right]}.$$

La relation entre les paramètres d'état est de la forme:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\varkappa}{\varkappa+1}M_1^2 - \frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}, \qquad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\varkappa+1)M_1^2}{(\varkappa-1)M_1^2+2},$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{[2\varkappa M_1^2 - (\varkappa-1)]\,[(\varkappa-1)M_1^2+2]}{(\varkappa+1)^2 M_1^2},$$

$$M_2 = \frac{v_2}{c_2} = \sqrt{\frac{(\varkappa-1)M_1^2+2}{2\varkappa M_1^2 - (\varkappa-1)}}, \quad \text{où} \quad M_1 = v_1/c_1.$$

Les variations des paramètres d'état du gaz parfait et de la vitesse sont alors:

$$p_2 - p_1 = \frac{2\varkappa}{\varkappa+1} p_1(M_1^2 - 1) = \frac{2}{\varkappa+1} \rho_1 v_1^2 \left(1 - \frac{1}{M_1^2}\right) = \rho_1 c_*^2 (M_{1*}^2 - 1),$$

$$\rho_2 - \rho_1 = \rho_1 \frac{M_1^2 - 1}{\frac{\varkappa-1}{2} M_1^2 + 1} = \rho_1(M_{1*}^2 - 1),$$

$$T_2 - T_1 = \frac{\varkappa-1}{2} T_1 M_1^2 \left[1 - \left(\frac{2}{\varkappa+1}\frac{1}{M_1^2} + \frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\right)^2\right] = \frac{(M_{1*}^4 - 1)T_1}{M_{1*}^2\left(\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1} - M_{1*}^2\right)},$$

$$v_2 - v_1 = c_* \frac{1 - M_{1*}^2}{M_{1*}},$$

où $M_{1*} = \frac{v_1}{c_*}$ est le coefficient de vitesse du flux avant le choc de compression lié à M_1 par la relation

$$M_{1*} = \sqrt{\frac{(\varkappa+1) M_1^2}{(\varkappa-1) M_1^2 + 2}}.$$

6° Choc de compression oblique (fig. V.1.3) dans un gaz parfait. L'angle α formé par le vecteur vitesse $\mathbf{v}_1$ du gaz avant le choc de compression et la surface du choc peut être n'importe lequel dans les limites de α_0 à $\pi - \alpha_0$, où $\sin \alpha_0 = c_1/v_1$. Par suite de leur passage à travers la surface du choc de compression, les lignes du flux se «réfractent» ($\beta \leqslant \alpha$):

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{2(\varkappa-1) M_1^2 \sin^2 \alpha + 4}{(\varkappa+1) M_1^2 \sin 2\alpha};$$

$$\operatorname{tg} (\alpha - \beta) = \frac{M_1^2 \sin^2 \alpha - 1}{1 + M_1^2\left(\frac{\varkappa+1}{2} - \sin^2 \alpha\right)} \operatorname{cotg} \alpha;$$

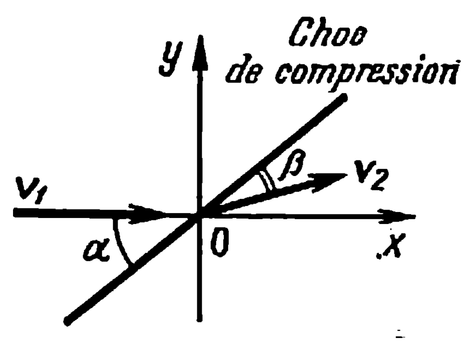


FIG. V.1.3.

$\beta = \alpha$ si $\alpha = \pi/2$ (choc normal) ou $\alpha = \arcsin \frac{c_1}{v_1}$.

La relation entre les composantes des vitesses normales à la surface de discontinuité est:

$$v_{1n} v_{2n} = c_*^2 - \frac{\varkappa-1}{\varkappa+1} v_{1n} \cos \alpha,$$

$$v_{1n} > c_1, \quad v_{2n} < c_2.$$

Dans ce cas, suivant la composante tangentielle $v_\tau = v_1 \cos\alpha$, la vitesse v_2 après le choc de compression oblique peut être aussi bien subsonique que supersonique:

$$M_2 = \sqrt{\frac{2 + (\varkappa - 1) M_1^2}{2\varkappa M_1^2 \sin^2\alpha - (\varkappa - 1)} + \frac{2M_1^2 \cos^2\alpha}{2 + (\varkappa - 1) M_1^2 \sin^2\alpha}}.$$

Le rapport des pressions du gaz est alors:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\varkappa}{\varkappa + 1} M_1^2 \sin^2\alpha - \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1}.$$

7° On appelle *polaire de choc* la courbe montrant la dépendance de la projection v_{2y} vis-à-vis de la vitesse $\mathbf{v}_2$ après le choc de compression sur l'axe Oy, perpendiculaire à la vitesse $\mathbf{v}_1$ avant le choc de compression, la projection v_{2x} de la vitesse $\mathbf{v}_2$ sur l'axe Ox, parallèle à $\mathbf{v}_1$. L'équation de la polaire de choc est de la forme:

$$v_{2y}^2 = (v_1 - v_{2x})^2 \frac{v_1 v_{2x} - c_*^2}{\frac{2}{\varkappa + 1} v_1^2 - v_1 v_{2x} + c_*^2}.$$

La polaire de choc est représentée fig. V.1.4. Elle coupe l'axe Ox aux points Q ($v_{2x} = c_*^2/v_1$) et P ($v_{2x} = v_1$), dont le premier correspond au choc de compression normal, le second à l'onde de choc d'intensité nulle: $v_2 = v_1$. Le point arbitraire A de la polaire de choc correspond au choc de compression oblique, pour lequel le procédé de détermination des angles α et β est clair de la figure V.1.4; le segment $OA = v_2$.

8° Si le corps se meut dans le gaz à une vitesse subsonique ($v < c$), les ondes faibles (sonores) créées par ce corps se propagent dans le gaz dans toutes les directions. Devançant le corps, elles se propagent également dans la région du gaz qui est en avant du corps mobile.

Dans le cas d'un mouvement du corps à une vitesse supersonique ($v > c$) les ondes sonores se propagent seulement dans la région du gaz située en arrière du corps mobile et limitée par

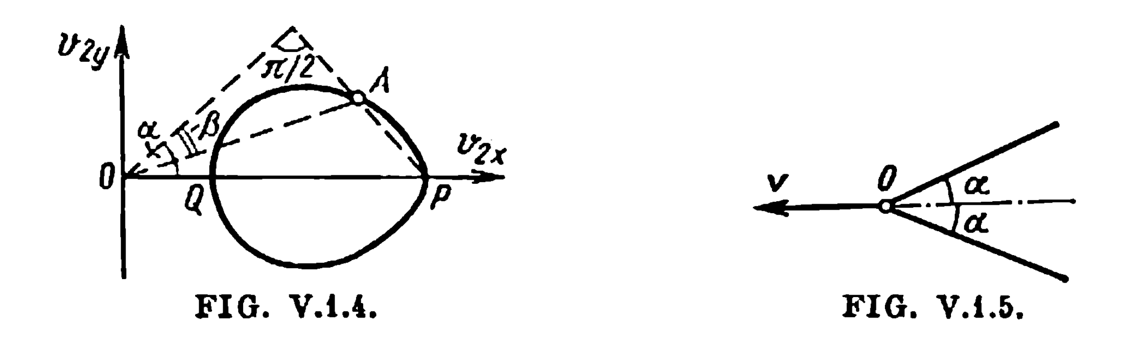


FIG. V.1.4. FIG. V.1.5.

une certaine surface dite *surface caractéristique* ou *surface de faible discontinuité.* Lors d'un mouvement rectiligne supersonique d'un corps de dimensions infiniment petites, la surface caractéristique a la forme d'une surface conique circulaire (fig. V.1.5) dont le sommet coïncide avec le corps en mouvement O, et l'angle α formé par les génératrices et la trajectoire du corps satisfait à la condition: $\sin \alpha = c/v$. Cet angle est dit *angle de faibles perturbations* ou *angle de Mach.* La surface de faible discontinuité est le cas limite du choc de compression oblique. Sur la polaire de choc elle correspond au point $v_{2x} = v_1 = v$.

CHAPITRE 2

Ondes électromagnétiques

1. Caractéristique générale

1° On appelle *ondes électromagnétiques* le champ électromagnétique variable se propageant dans l'espace. Les ondes électromagnétiques sont transversales: le vecteur champ électrique **E** et le vecteur champ magnétique **H** sont réciproquement perpendiculaires et situés dans un plan perpendiculaire au vecteur vitesse **v** de propagation de l'onde. Les vecteurs **v**, **E** et **H** forment un système dextrogyre: de l'extrémité du vecteur **v** la rotation de **E** à **H** suivant la distance la plus courte apparaît contraire au sens des aiguilles d'une montre, autrement dit,

$$\mathbf{v} = \frac{v\mathbf{E} \times \mathbf{H}}{EH}.$$

On appelle *rayon* la ligne en chaque point de laquelle la tangente coïncide avec la direction de propagation de l'onde en ce point, c'est-à-dire avec la direction du transport d'énergie.

2° La relation entre **E** et **H** d'une onde électromagnétique se propageant dans un milieu non conducteur est déterminée des équations de Maxwell (p. 524) en admettant que ρ et **j** sont nulles:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \operatorname{div} \mathbf{D} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \operatorname{div} \mathbf{D} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{(en u. du système de Gauss)},$$

où $c \approx 3 \cdot 10^{10}$ cm/s est la constante électrodynamique (p. 442). Dans le cas d'un milieu homogène et isotrope, non conducteur, considéré ci-dessous, qui n'est pas doué de propriétés ferromagnétiques (p. 496) ou ferroélectriques (p. 385),

$$\left.\begin{array}{ll} \mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \mathbf{E}, & \mathbf{B} = \mu\mu_0 \mathbf{H}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu\mu_0 \dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, & \operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} = \varepsilon\varepsilon_0 \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, & \operatorname{div} \mathbf{H} = 0 \end{array}\right\} \text{(en u. SI)},$$

$$\left.\begin{array}{ll} \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, & \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\dfrac{\mu}{c} \dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, & \operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} = \dfrac{\varepsilon}{c} \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, & \operatorname{div} \mathbf{H} = 0 \end{array}\right\} \text{(en u. du système de Gauss)},$$

où ε_0 et μ_0 sont la constante diélectrique et la perméabilité magnétique du vide, ε et μ la constante diélectrique relative et la perméabilité magnétique relative du milieu.

Il est possible d'exprimer les vecteurs champs **E** et **H** d'une onde électromagnétique par les potentiels scalaire φ et vecteur **A** (p. 525):

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu\mu_0} \operatorname{rot} \mathbf{A} \text{ (en u. SI)},$$

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi, \ \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A} \text{ (en u. du système de Gauss)},$$

en tenant compte que dans les deux systèmes d'unités

$$\Delta\varphi = \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad \Delta \mathbf{A} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2},$$

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \quad \Delta \mathbf{H} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2},$$

où Δ est le laplacien (p. 334) et la grandeur c, en u. SI, est $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8$ m/s.

De la sorte φ et chacune des projections des vecteurs **A**, **E** et **H** sur les axes du système rectangulaire de coordonnées cartésiennes satisfont à l'équation des ondes

$$\Delta s_i = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 s_i}{\partial t^2} \quad (i = 1, \ldots, 10),$$

où $v = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$ est la vitesse de phase de l'onde électromagnétique, $s_1 = \varphi$, $s_2 = A_x$, $s_3 = A_y$, ..., $s_{10} = H_z$. Dans le vide ($\varepsilon = \mu = 1$) $v = c$. Pour tous les milieux, excepté les milieux ferromagnétiques (p. 496), $\mu \approx 1$ et $v = c/\sqrt{\varepsilon}$.

3° L'onde électromagnétique est dite *plane* si les vecteurs **E** et **H** ne sont fonction que du temps et d'une coordonnée cartésienne, de x par exemple. Dans une onde plane tous les rayons sont parallèles entre eux.

Pour une onde plane, se propageant dans le sens positif de l'axe Ox du système de coordonnées dextrogyre, ont lieu les relations suivantes:

$$\left.\begin{array}{l} E_x = H_x = 0, \\ \dfrac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu\mu_0 \dfrac{\partial H_z}{\partial t}, \quad \dfrac{\partial E_z}{\partial x} = \mu\mu_0 \dfrac{\partial H_y}{\partial t}, \\ \dfrac{\partial H_y}{\partial x} = \varepsilon\varepsilon_0 \dfrac{\partial E_z}{\partial t}, \quad \dfrac{\partial H_z}{\partial x} = -\varepsilon\varepsilon_0 \dfrac{\partial E_y}{\partial t}, \\ H_z = \sqrt{\dfrac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}} E_y, \quad H_y = -\sqrt{\dfrac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}} E_z, \\ \mathbf{E} = \sqrt{\dfrac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}} \mathbf{H} \times \mathbf{n} = \dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} (\mathrm{rot}\ \mathbf{A} \times \mathbf{n}) \end{array}\right\} \text{(en u. SI)},$$

$$\left.\begin{array}{l} E_x = H_x = 0, \\ \dfrac{\partial E_y}{\partial x} = -\dfrac{\mu}{c} \dfrac{\partial H_z}{\partial t}, \quad \dfrac{\partial E_z}{\partial x} = \dfrac{\mu}{c} \dfrac{\partial H_y}{\partial t}, \\ \dfrac{\partial H_y}{\partial x} = \dfrac{\varepsilon}{c} \dfrac{\partial E_z}{\partial t}, \quad \dfrac{\partial H_z}{\partial x} = -\dfrac{\varepsilon}{c} \dfrac{\partial E_y}{\partial t}, \\ H_z = \sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\mu}} E_y, \quad H_y = -\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\mu}} E_z, \\ \mathbf{E} = \sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}} \mathbf{H} \times \mathbf{n} = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} (\mathrm{rot}\ \mathbf{A} \times \mathbf{n}) \end{array}\right\} \text{(en u. du système de Gauss)},$$

où **n** est le vecteur unité mené dans la direction de propagation de l'onde. Par conséquent, l'onde plane peut être entièrement déterminée seulement à l'aide du potentiel vecteur **A**. Dans le vide

$$H_y = -\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_z, \; H_z = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_y, \; \sqrt{\mu_0}\, H = \sqrt{\varepsilon_0}\, E \quad \text{(en u. SI)},$$

$$H_y = -E_z, \; H_z = E_y, \; H = E \quad \text{(en u. du système de Gauss)}.$$

4° L'onde électromagnétique est dite *monochromatique* si les composantes des vecteurs **E** et **H** du champ électromagnétique de l'onde accomplissent des oscillations harmoniques (p. 116) de même

fréquence appelée fréquence d'onde. L'onde monochromatique n'est pas limitée dans l'espace et le temps.

Toute onde non monochromatique arbitraire peut être représentée sous forme d'un ensemble d'ondes monochromatiques (pp. 566-567).

5° Le potentiel vecteur d'une onde monochromatique plane est

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})},$$

où $\mathbf{A}_0$ est un vecteur complexe constant, ω la pulsation, $\mathbf{r}$ le rayon vecteur mené au point considéré du champ, $\mathbf{k}$ le vecteur d'onde (p. 566):

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{v}\mathbf{n} = \frac{2\pi}{\lambda}\mathbf{n} = \text{const},$$

$\mathbf{n}$ est le vecteur unité mené dans la direction de propagation de l'onde, v la vitesse de phase de l'onde, $\lambda = vT$ la longueur d'onde, T la période des oscillations.

6° Les intensités des champs électrique et magnétique d'une onde monochromatique plane sont:

$$\mathbf{E} = \text{Re}\,[\mathbf{E}_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}],$$

$$\mathbf{H} = \text{Re}\,[\mathbf{H}_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}].$$

Ici $\mathbf{E}_0$ et $\mathbf{H}_0$ sont les vecteurs complexes constants:

$$\mathbf{E}_0 = i\omega\mathbf{A}_0 = \frac{ikc}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\mathbf{A}_0,\ \mathbf{H}_0 = \frac{i}{\mu\mu_0}\mathbf{k}\times\mathbf{A}_0 \quad \text{(en u. SI)}$$

$$\mathbf{E}_0 = \frac{\omega}{c}i\mathbf{A}_0 = \frac{ik}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\mathbf{A}_0,\ \mathbf{H}_0 = \frac{i}{\mu}\mathbf{k}\times\mathbf{A}_0 \quad \text{(en u. du système de Gauss).}$$

Le sens du symbole Re voir p. 566.

7° Le vecteur $\mathbf{E}_0$ peut être également écrit sous la forme:

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{a}_1 e^{-i\alpha_1} + \mathbf{a}_2 e^{-i\alpha_2},$$

où $\mathbf{a}_1$ et $\mathbf{a}_2$ sont deux vecteurs réels, réciproquement perpendiculaires, situés dans le plan perpendiculaire au vecteur d'onde $\mathbf{k}$, α_1 et α_2 des scalaires réels. Lorsque l'axe Oy est mené suivant le vecteur $\mathbf{a}_1$ et l'axe Ox, suivant le sens de propagation de l'onde, on a:

$$E_y = a_1 \cos(\omega t - kx + \alpha_1),\ E_z = \pm a_2 \cos(\omega t - kx + \alpha_2),$$

où le signe plus (moins) se rapporte au cas où le vecteur $\mathbf{a}_2$ coïncide avec le sens positif (négatif) de l'axe Oz.

8° En chaque point du champ d'une onde monochromatique plane l'extrémité du vecteur **E** décrit une ellipse située dans le plan yOz, l'équation de cette ellipse est de la forme

$$\frac{E_y^2}{a_1^2} + \frac{E_z^2}{a_2^2} - 2\,\frac{E_y E_z}{a_1 a_2} \cos\,(\alpha_2 - \alpha_1) = \sin^2\,(\alpha_2 - \alpha_1).$$

Une telle onde plane est dite *polarisée elliptiquement*. Si $a_1 = a_2$ et $a_1 - a_2 = (2m + 1)\,\frac{\pi}{2}$, où $m = 0,\ \pm 1,\ \ldots$, l'ellipse se transforme en circonférence et l'onde est dite *polarisée circulairement*. Si indépendamment $a_1 = 0$ ou $a_2 = 0$ ou bien $\alpha_1 - \alpha_2 = m\pi$, où $m = 0, \pm 1, \ldots$, l'onde plane est dite *polarisée rectilignement*. Les vecteurs **E** d'une onde polarisée rectilignement oscillent en tous les points du champ le long de droites parallèles. Le plan mené par le vecteur **E** et un rayon (p. 589) est appelé *plan d'oscillation* d'une onde polarisée linéairement. On appelle *plan de polarisation* le plan mené par le vecteur **H** et un rayon. Dans la littérature récente, on appelle souvent plan de polarisation le plan mené par le vecteur **E** et un rayon. Les plans d'oscillation et de polarisation sont réciproquement perpendiculaires (fig. V.2.1).

Une onde plane arbitraire peut être représentée sous forme d'un ensemble de deux ondes planes, polarisées linéairement dans des plans réciproquement perpendiculaires.

9° On appelle *amplitude a* d'une onde électromagnétique polarisée rectilignement la valeur maximale du module du vecteur **E** : $a = |\mathbf{E}|_{max}$.

L'*intensité I d'une onde électromagnétique* est une grandeur numériquement égale à l'énergie transportée par l'onde par unité de temps

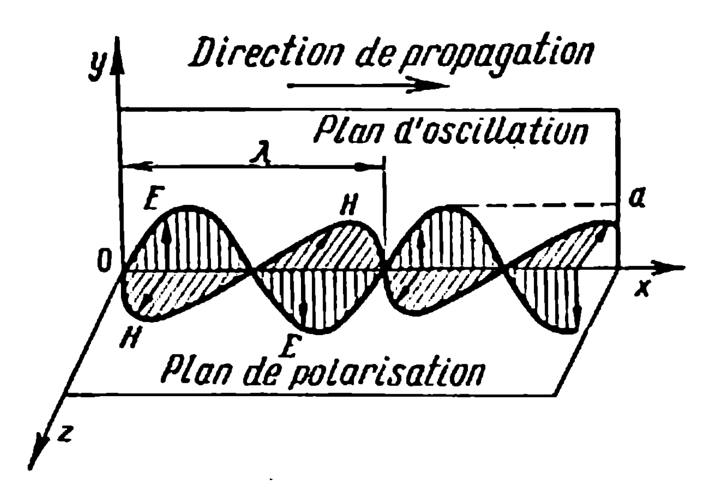


FIG. V.2.1.

à travers une unité d'aire de surface perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde. L'intensité I est liée au vecteur de Poynting **P** (p. 528) par la relation

$$I = |\overline{\mathbf{P}}| = \frac{1}{T} \left| \int_0^T \mathbf{P}\, dt \right|,$$

où T est la période de l'onde.

Pour une onde monochromatique plane polarisée linéairement $I \sim a^2$, où a est l'amplitude de l'onde. Pour une onde plane arbitraire dans un milieu homogène non absorbant $I = \text{const}$.

10° L'onde électromagnétique est *sphérique* si son intensité dépend uniquement de la distance r à un certain point appelé centre d'onde. Il découle de la loi de la conservation de l'énergie que pour une onde sphérique dans un milieu homogène non absorbant $I = \text{const}/r^2$.

11° La variation de la vitesse de phase d'une onde électromagnétique dans un milieu en fonction de la fréquence d'onde est appelée *dispersion*. Les milieux dans lesquels est observé ce phénomène sont dits *milieux dispersifs*. Dans le vide la dispersion des ondes électromagnétiques fait défaut.

12° Les ondes électromagnétiques réelles ne sont pas monochromatiques, ce qui découle déjà du fait qu'elles sont toujours limitées dans l'espace et le temps. Ces ondes peuvent être représentées sous forme d'un ensemble d'ondes monochromatiques qu'on appelle *train d'ondes* ou *groupe d'ondes*. La forme du train d'ondes subit une certaine déformation lors de sa propagation dans un milieu dispersif. Celle-ci est due à la différence des vitesses de phase des composantes monochromatiques du groupe. La notion de vitesse de phase n'est pas suffisante pour caractériser la propagation des trains d'ondes et la vitesse du transport d'énergie réalisé par ceux-ci, autrement dit, la vitesse de propagation du signal.

13° En première approximation, le train d'ondes plan polarisé linéairement, excité par une source modulée sinusoïdalement en amplitude et se propageant dans le sens positif de l'axe Ox, peut être représenté sous la forme des oscillations modulées en amplitude en chaque point de l'espace:

$$E = a[1 + m \cos(\Omega t - Kx)] \cos(\omega t - kx),$$

où $m = a'/a \ll 1$, $\Omega \ll \omega$, a' et Ω sont l'amplitude et la pulsation de modulation, a et ω l'amplitude et la pulsation de l'onde modulée (porteuse), $K = \frac{1}{2}(k_1 - k_2)$, k, k_1 et k_2 sont les nombres d'onde correspondant aux ondes monochromatiques de pulsations ω, $\omega_1 = \omega + \Omega$ et $\omega_2 = \omega - \Omega$.

L'étendue linéaire du train d'ondes le long de l'axe Ox est égale à

$$\Delta x = \frac{2\pi}{K}.$$

La vitesse du transport d'énergie réalisé par un train d'ondes est dite *vitesse de groupe u:*

$$u = \frac{\Omega}{K} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2}.$$

Pour les petites valeurs de Ω

$$u = \frac{d\omega}{dk} = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda} = \frac{v}{1 - \frac{\omega}{v}\frac{dv}{d\omega}},$$

où v est la vitesse de phase de l'onde modulée, $\lambda = 2\pi v/\omega$ sa longueur.

En l'absence de dispersion $\frac{dv}{d\omega} = \frac{dv}{d\lambda} = 0$ et $u = v$. A la *dispersion normale* (p. 699) correspond

$$\frac{dv}{d\omega} < 0, \quad \frac{dv}{d\lambda} > 0 \text{ et } u < v.$$

A la *dispersion anomale* (p. 699) correspond

$$\frac{dv}{d\omega} > 0, \quad \frac{dv}{d\lambda} < 0 \text{ et } u > v.$$

14° Les résultats cités 13° sont suffisamment exacts seulement dans la région de

$$x \ll \frac{4\pi}{\left|\Omega^2 \frac{d^2k}{d\omega^2}\right|} \quad \text{ou} \quad x \ll \Delta x \frac{u}{|\Delta u|},$$

où x est la distance de la source d'ondes, Δx la longueur du train d'ondes, Δu la différence des valeurs de la vitesse de groupe correspondant aux pulsations ω et $\omega \pm \Omega$. Au voisinage des fréquences

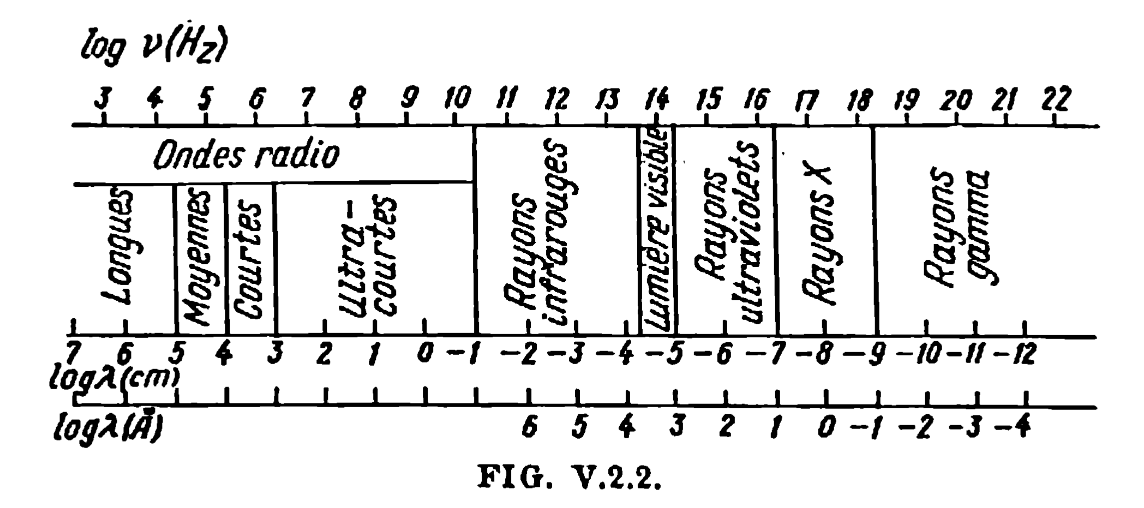


FIG. V.2.2.

d'absorption des ondes électromagnétiques par le milieu $\left|\frac{dv}{d\omega}\right|$ est très grand, et la notion de vitesse de groupe perd son sens.

15° Suivant la fréquence $\nu = \omega/2\pi$ (ou la longueur d'onde dans le vide $\lambda = c/\nu$), il est convenu de diviser les ondes électromagnétiques en plusieurs types. Le *spectre d'ondes électromagnétiques* est donné fig. V.2.2. Les limites entre les différents types d'ondes électromagnétiques sont conventionnelles.

2. Rayonnement d'ondes électromagnétiques

1° Selon l'électrodynamique classique, les ondes électromagnétiques sont excitées par des charges électriques animées d'un mouvement accéléré. Dans un milieu matériel les ondes électromagnétiques peuvent être également excitées par des charges dont les accélérations sont nulles, mais dont les vitesses dépassent la vitesse de phase de la lumière dans cette substance (effet Cerenkov, p. 556). Le processus d'émission d'ondes électromagnétiques par un système électrique est appelé *rayonnement* et le système lui-même *système rayonnant*. Le champ électromagnétique des ondes émises par le système est dit *champ de rayonnement*. Ci-dessous sont examinées certaines connaissances sur le champ rayonnant dans le vide.

2° On appelle *zone d'onde* la région de l'espace restant en arrière du système rayonnant à des distances dépassant notablement les dimensions du système rayonnant et la longueur des ondes émises par celui-ci. Dans les limites de petites portions de la zone d'onde, les ondes électromagnétiques peuvent être admises planes (p. 591). Dans la zone d'onde le champ électromagnétique rayonnant du

système peut être déterminé à l'aide du potentiel vecteur retardé **A** (p. 526).

Si l'origine des coordonnées est choisie dans les limites du système rayonnant dont les dimensions sont petites devant la longueur de son onde d'émission, le potentiel vecteur du champ du système dans la zone d'onde est alors de la forme:

$$\mathbf{A}(\mathbf{R},\ t) = \frac{\mu_0}{4\pi R}\int\limits_{V'} \mathbf{j}\left(t' + \frac{\mathbf{r}'\cdot\mathbf{n}}{c}\right) dV' \quad \text{(en u. SI)},$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{R},\ t) = \frac{1}{cR}\int\limits_{V'} \mathbf{j}\left(t' + \frac{\mathbf{r}'\cdot\mathbf{n}}{c}\right) dV' \quad \text{(en u. du système de Gauss)},$$

où **R** est le rayon vecteur du point considéré du champ, $R = |\mathbf{R}|$, $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$, $\mathbf{r}'$ est le rayon vecteur de l'élément de volume dV' du système et $t' = t - R/c$.

Etant donné que $\mathbf{r}'\cdot\mathbf{n} \ll R$, dans l'expression de **A** on se limite généralement à un (première approximation) ou à deux (seconde approximation) termes dans le développement en série de la fonction sous l'intégrale suivant les puissances de $\mathbf{r}'\cdot\mathbf{n}/c$:

$$\mathbf{A}(\mathbf{R},\ t) = \frac{\mu_0}{4\pi R}\int\limits_{V'} \mathbf{j}\,(t')\, dV' + \frac{\mu_0}{4\pi cR}\,\frac{\partial}{\partial t'}\int\limits_{V'} \mathbf{j}\,(t')\,\mathbf{r}'\cdot\mathbf{n}\, dV' \quad \text{(en u. SI)},$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{R},\ t) = \frac{1}{cR}\int\limits_{V'} \mathbf{j}(t')\, dV' + \frac{1}{c^2R}\,\frac{\partial}{\partial t'}\int\limits_{V'} \mathbf{j}(t')\,\mathbf{r}'\cdot\mathbf{n}\, dV' \quad \text{(en u. du système de Gauss)}.$$

Pour un système de charges ponctuelles $q_1, q_2, \ldots, q_n$

$$\int\limits_{V'} \mathbf{j}\, dV' = \sum_{i=1}^{n} q_i\, \mathbf{v}_i \quad \text{et} \quad \int\limits_{V'} \mathbf{j}\ \mathbf{r}'\cdot\mathbf{n}\ dV' = \sum_{i=1}^{n} q_i\ \mathbf{v}_i\, \mathbf{r}_i\cdot\mathbf{n},$$

où $\mathbf{r}_i$ et $\mathbf{v}_i$ sont le rayon vecteur et la vitesse de la charge.

3° En première approximation, le rayonnement du système électrique est dû à la variation dans le temps de son moment électrique dipolaire $\mathbf{p}_e = \sum_{i=1}^{n} q_i\mathbf{r}_i$, où $q_1, \ldots, q_n$ sont les charges entrant dans la composition du système et $\mathbf{r}_i$ le rayon vecteur de la charge q_i. Ce rayonnement est dit ***rayonnement dipolaire***. Dans la zone

d'onde le champ du rayonnement dipolaire du système de charges, dont les vitesses sont petites devant la vitesse de la lumière dans le vide ($v_i \ll c$)[1]), est de la forme:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{R},\ t) &= \frac{\mu_0}{4\pi R}\,\dot{\mathbf{p}}_e\left(t-\frac{R}{c}\right),\\ \mathbf{E}(\mathbf{R},\ t) &= \frac{\mu_0}{4\pi R^3}\left[\ddot{\mathbf{p}}_e\left(t-\frac{R}{c}\right)\times\mathbf{R}\right]\times\mathbf{R},\\ \mathbf{H}(\mathbf{R},\ t) &= \frac{1}{4\pi c R^2}\,\ddot{\mathbf{p}}_e\left(t-\frac{R}{c}\right)\times\mathbf{R}, \end{aligned}\right\}\ \text{(en u. SI)},$$

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{R},\ t) &= \frac{1}{cR}\,\dot{\mathbf{p}}_e\left(t-\frac{R}{c}\right),\\ \mathbf{E}(\mathbf{R},\ t) &= \frac{1}{c^2R^3}\left[\ddot{\mathbf{p}}_e\left(t-\frac{R}{c}\right)\times\mathbf{R}\right]\times\mathbf{R},\\ \mathbf{H}(\mathbf{R},\ t) &= \frac{1}{c^2R^2}\,\ddot{\mathbf{p}}_e\left(t-\frac{R}{c}\right)\times\mathbf{R} \end{aligned}\right\}\ \text{(en u. du système de Gauss)},$$

où $\mathbf{R}$ est le rayon vecteur mené du système rayonnant au point considéré du champ, $R = |\mathbf{R}|$, $\dot{\mathbf{p}}_e = \frac{\partial \mathbf{p}_e}{\partial t}$, $\ddot{\mathbf{p}}_e = \frac{\partial^2 \mathbf{p}_e}{\partial t^2}$ et μ_0 la perméabilité magnétique du vide.

En particulier, pour le rayonnement d'une charge ponctuelle q $\mathbf{p}_e = q\mathbf{r}$, $\ddot{\mathbf{p}}_e = q\mathbf{w}$ et

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{R},\ t) &= \frac{\mu_0 q}{4\pi R^3}\,(\mathbf{w}\times\mathbf{R})\times\mathbf{R},\\ \mathbf{H}(\mathbf{R},\ t) &= \frac{q}{4\pi c R^2}\,\mathbf{w}\times\mathbf{R} \end{aligned}\right\}\ \text{(en u. SI)},$$

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{R},\ t) &= \frac{q}{c^2R^3}\,(\mathbf{w}\times\mathbf{R})\times\mathbf{R},\\ \mathbf{H}(\mathbf{R},\ t) &= \frac{q}{c^2R^2}\,\mathbf{w}\times\mathbf{R} \end{aligned}\right\}\ \text{(en u. du système de Gauss)},$$

où $\mathbf{w}$ est l'accélération de la charge q à l'instant $t - \frac{R}{c}$.

---

[1]) Cette condition est équivalente à ce que les dimensions du système sont petites devant la longueur d'onde de son rayonnement.

4° Dans la zone d'onde le vecteur de Poynting pour le rayonnement dipolaire se définit par

$$\mathbf{P}(\mathbf{R},\ t) = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c}\left|\ddot{\mathbf{p}}_e\left(t - \frac{R}{C}\right)\right|^2 \sin^2\vartheta\ \frac{\mathbf{R}}{R^3} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{R},\ t) = \frac{1}{4\pi c^3}\left|\ddot{\mathbf{p}}_e\left(t - \frac{R}{c}\right)\right|^2 \sin^2\vartheta\ \frac{\mathbf{R}}{R^3} \quad \text{(en u. du système de Gauss)},$$

où ϑ est l'angle entre les vecteurs $\ddot{\mathbf{p}}_e\left(t - \frac{R}{c}\right)$ et $\mathbf{R}$.

La puissance instantanée de rayonnement dipolaire dans l'élément d'angle solide $d\,\Omega$ dans la direction déterminée par l'angle ϑ est:

$$dN = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c}\left|\ddot{\mathbf{p}}_e\left(t - \frac{R}{c}\right)\right|^2 \sin^2\vartheta\ d\Omega \quad \text{(en u. SI)},$$

$$dN = \frac{1}{4\pi c^3}\left|\ddot{\mathbf{p}}_e\left(t - \frac{R}{c}\right)\right|^2 \sin^2\vartheta\ d\Omega \quad \text{(en u. du système de Gauss)}.$$

La puissance instantanée de rayonnement dipolaire dans toutes les directions est alors:

$$N = \frac{\mu_0}{6\pi c}\left|\ddot{\mathbf{p}}_e\right|^2 \quad \text{(en u. SI)},$$

$$N = \frac{2}{3c^3}\left|\ddot{\mathbf{p}}_e\right|^2 \quad \text{(en u. du système de Gauss)}.$$

EXEMPLE 1. Le rayonnement de la charge q qui se déplace avec une accélération $\mathbf{w}$ est:

$$N = \frac{\mu_0 q^2 w^2}{6\pi c} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$N = \frac{2q^2 w^2}{3c^3} \quad \text{(en u. du système de Gauss)}.$$

Dans le cas d'oscillations harmoniques de la charge avec une pulsation ω et une amplitude a les puissances instantanée (N) et moyenne ($\overline{N}$) de rayonnement sont:

$$N = \frac{\mu_0 q^2 a^2 \omega^4}{6\pi c}\sin^2\omega t, \quad \overline{N} = \frac{\mu_0 q^2 a^2 \omega^4}{12\pi c} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$N = \frac{2q^2 a^2 \omega^4}{3c^3}\sin^2\omega t, \quad \overline{N} = \frac{q^2 a^2 \omega^4}{3c^3} \quad \text{(en u. du système de Gauss)}.$$

Le temps de relaxation τ, autrement dit, l'intervalle de temps durant lequel l'amplitude des oscillations libres de la charge diminue

de e fois par suite de la perte d'énergie par rayonnement, ainsi que le nombre n d'oscillations complètes réalisées au cours du temps τ, sont

$$\tau = \frac{12\pi c m}{\mu_0 \omega^2 q^2}, \qquad n = \frac{6cm}{\mu_0 \omega q^2} \qquad \text{(en u. SI)},$$

$$\tau = \frac{3c^3 m}{\omega^2 q^2}, \qquad n = \frac{3c^3 m}{2\pi \omega q^2} \qquad \text{(en u. du système de Gauss)},$$

où m est la masse de la particule chargée.

En théorie classique de l'émission de la lumière par l'atome: $q = e$; quant à la grandeur τ, elle caractérise la durée de l'émission d'un train d'ondes par l'atome et est appelée *durée de vie moyenne de l'atome rayonnant*. Pour les fréquences de la lumière visible ($\omega \sim \sim 4 \cdot 10^{15}$ s^{-1}) $\tau \sim 10^{-8}$ s et $n \sim 10^7$.

EXEMPLE 2. L'*oscillateur ou dipôle de Hertz* représente un fil court (en comparaison avec la longueur λ des ondes émises) de capacités égales concentrées à ses extrémités et avec une distance disruptive en son milieu à laquelle est appliquée une tension alternative. La longueur du dipôle étant $l \ll \lambda$, le courant $I = I_0 \sin \omega t$ dans le dipôle peut être admis *quasi stationnaire*, autrement dit, le même dans tout le circuit; $\ddot{p}_e = l \dfrac{dI}{dt}$, et la puissance moyenne de rayonnement est:

$$\overline{N} = \frac{\mu_0 l^2 \omega^2}{12\pi c} I_0^2 \qquad \text{(en u. SI)},$$

$$\overline{N} = \frac{l^2 \omega^2}{3c^3} I_0^2 \qquad \text{(en u. du système de Gauss)}.$$

Il est admis de caractériser la perte d'énergie par rayonnement au moyen de la grandeur $R_{\text{ray}} = 2N/I_0^2$, appelée *résistance de rayonnement:*

$$R_{\text{ray}} = \frac{\mu_0 l^2 \omega^2}{6\pi c} = 80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \qquad \text{(en u. SI)},$$

$$R_{\text{ray}} = \frac{2l^2 \omega^2}{3c^3} = \frac{8\pi^2}{3c} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \qquad \text{(en u. du système de Gauss)}.$$

5° En seconde approximation, on peut représenter le potentiel vecteur du champ dans la zone d'onde du système de charges ponctuelles $q_1, q_2, \ldots, q_n$, se déplaçant aux vitesses $v_i \ll c$ sous la forme:

$$\mathbf{A}(\mathbf{R}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi R} \dot{\mathbf{p}}_e(t') + \frac{\mu_0}{4\pi c R} \dot{\mathbf{p}}_m(t') \times \mathbf{n} + \frac{\mu_0}{24\pi c R} \ddot{\mathbf{D}}(t') \quad \text{(en u. SI)},$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{R}, t) = \frac{1}{cR} \dot{\mathbf{p}}_e(t') + \frac{1}{cR} \dot{\mathbf{p}}_m(t') \times \mathbf{n} + \frac{1}{6c^2 R} \ddot{\mathbf{D}}(t') \quad \text{(en u. du système de Gauss)},$$

où $t' = t - R/c$, $\mathbf{p}_e(t') = \sum_{i=1}^{n} q_i \mathbf{r}_i(t')$ est le moment électrique dipolaire du système, $\mathbf{p}_m(t')$ le moment magnétique du système:

$$\mathbf{p}_m(t') = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} q_i \mathbf{r}_i(t') \times \mathbf{v}_i(t') \quad \text{(en u. SI)},$$

$$\mathbf{p}_m(t') = \frac{1}{2c} \sum_{i=1}^{n} q_i \mathbf{r}_i(t') \times \mathbf{v}_i(t') \quad \text{(en u. du système de Gauss)}.$$

$\mathbf{D}(t')$ est le produit du vecteur unité $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$ par le tenseur du moment électrique quadripolaire du système de charges:

$$\mathbf{D}(t') = \sum_{i=1}^{n} q_i \,(3\mathbf{r}_i \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_i - r_i^2 \mathbf{n});$$

$$\dot{\mathbf{p}}_e = \frac{\partial \mathbf{p}_e}{\partial t}, \quad \dot{\mathbf{p}}_m = \frac{\partial \mathbf{p}_m}{\partial t} \quad \text{et} \quad \ddot{\mathbf{D}} = \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2}.$$

Les intensités $\mathbf{E}(\mathbf{R}, t)$ et $\mathbf{H}(\mathbf{R}, t)$ du champ électromagnétique de rayonnement sont respectivement de la forme:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{R}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi R} \left\{ [\ddot{\mathbf{p}}_e(t') \times \mathbf{n}] \times \mathbf{n} + \frac{1}{c} \mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{p}}_m(t') + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{6c} [\dddot{\mathbf{D}}(t') \times \mathbf{n}] \times \mathbf{n} \right\}, \\ \mathbf{H}(\mathbf{R}, t) &= \frac{1}{4\pi c R} \left\{ \ddot{\mathbf{p}}_e(t') \times \mathbf{n} + \frac{1}{c} [\ddot{\mathbf{p}}_m(t') \times \mathbf{n}] \times \mathbf{n} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{6c} \dddot{\mathbf{D}}(t') \times \mathbf{n} \right\} \end{aligned}\right\} \text{(en u. SI)},$$

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{R}, t) &= \frac{1}{c^2 R} \left\{ [\ddot{\mathbf{p}}_e(t') \times \mathbf{n}] \times \mathbf{n} + \mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{p}}_m(t') + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{6c} [\dddot{\mathbf{D}}(t') \times \mathbf{n}] \times \mathbf{n} \right\}, \\ \mathbf{H}(\mathbf{R}, t) &= \frac{1}{c^2 R} \left\{ \ddot{\mathbf{p}}_e(t') \times \mathbf{n} + [\ddot{\mathbf{p}}_m(t') \times \mathbf{n}] \times \mathbf{n} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{6c} \dddot{\mathbf{D}}(t') \times \mathbf{n} \right\} \end{aligned}\right\} \text{(en u. du système de Gauss)}.$$

Les second et troisième termes des expressions de $\mathbf{A}(\mathbf{R}, t)$, $\mathbf{E}(\mathbf{R}, t)$ et $\mathbf{H}(\mathbf{R}, t)$ caractérisent respectivement les *rayonnements magnétique dipolaire* et *électrique quadripolaire* du système de charges. L'intensité moyenne de ces types de rayonnement est approximativement c^2 fois inférieure à la puissance moyenne de rayonnement dipolaire du système. C'est pourquoi les rayonnements magnétique dipolaire et électrique quadripolaire ne jouent un rôle essentiel que dans les cas où le moment dipolaire électrique du système est nul ou constant, de sorte que l'émission électrique fait entièrement défaut.

6° Dans la zone d'onde le vecteur de Poynting pour le rayonnement dipolaire magnétique est:

$$\mathbf{P}(\mathbf{R}, t) = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c^3} \left| \ddot{\mathbf{p}}_m (t') \right|^2 \sin^2 \vartheta \frac{\mathbf{R}}{R^3} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{R}, t) = \frac{1}{4\pi c^3} \left| \ddot{\mathbf{p}}_m (t') \right|^2 \sin^2 \vartheta \frac{\mathbf{R}}{R^3} \quad \text{(en u. du système de Gauss)},$$

où ϑ est l'angle entre le vecteur $\ddot{\mathbf{p}}_m (t')$ et le rayon vecteur $\mathbf{R}$, mené du système rayonnant au point considéré du champ.

La puissance instantanée de rayonnement magnétique dipolaire dans l'élément d'angle solide $d\,\Omega$ dans la direction déterminée par l'angle ϑ est alors:

$$dN = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c^3} \left| \ddot{\mathbf{p}}_m (t') \right|^2 \sin^2 \vartheta \, d\Omega \quad \text{(en u. SI)},$$

$$dN = \frac{1}{4\pi c^3} \left| \ddot{\mathbf{p}}_m (t') \right|^2 \sin^2 \vartheta \, d\Omega \quad \text{(en u. du système de Gauss)}.$$

La puissance instantanée de rayonnement magnétique dipolaire suivant toutes les directions est:

$$N = \frac{\mu_0}{6\pi c^3} \left| \ddot{\mathbf{p}}_m (t') \right|^2 \quad \text{(en u. SI)},$$

$$N = \frac{2}{3c^3} \left| \ddot{\mathbf{p}}_m (t') \right|^2 \quad \text{(en u. du système de Gauss)}.$$

EXEMPLE 3. L'*antenne à cadre* est un circuit fermé de courant alternatif. Dans ce cas div $\mathbf{j} = 0$ ($\mathbf{j}$ est le vecteur densité de courant), et il découle de la loi de la conservation des charges (p. 527) que $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, autrement dit, la distribution des charges et les moments électriques di et quadripolaire du système sont invariables dans le temps. Le rayonnement est dû à la variation du moment magnétique dipolaire du système, en d'autres termes, représente un rayonnement magnétique dipolaire.

Dans le cas de courant sinusoïdal $I = I_0 \sin \omega t$, la puissance moyenne de rayonnement dipolaire magnétique de l'antenne à cadre est:

$$\overline{N} = \frac{\mu_0 S^2 \omega^4}{12\pi c^3} I_0^2 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{S^2}{12\pi} \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^4 I_0^2 \quad \text{(en u. SI)},$$

$$\overline{N} = \frac{S^2}{3c} \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^4 I_0^2 \quad \text{(en u. du système de Gauss)},$$

où S est l'aire limitée par le circuit et $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$ la longueur d'onde de rayonnement ($\lambda \gg \sqrt{S}$).

La résistance de rayonnement est:

$$R_{\text{ray}} = \frac{2\overline{N}}{I_0^2} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{S^2}{6\pi} \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^4 \quad \text{(en u. SI)},$$

$$R_{\text{ray}} = \frac{2S^2}{3c} \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^4 \quad \text{(en u. du système de Gauss)}.$$

Pour un système fermé constitué de particules de même charge spécifique q_i/m_i (m_i est la masse de la particule), $\ddot{\mathbf{p}}_e = \ddot{\mathbf{p}}_m = 0$, autrement dit, un tel système ne produit ni un rayonnement électrique dipolaire, ni un rayonnement magnétique dipolaire. Ce dernier fait également défaut dans le cas d'un système constitué uniquement de deux particules de charges et de masses arbitraires.

7° Rayonnement d'une charge q animée d'un mouvement rapide (dont la vitesse est commensurable à la vitesse de la lumière c).

Loin de la charge q, animée d'une vitesse $\mathbf{v}$ et d'une accélération $\mathbf{w}$, le champ de son rayonnement est de la forme:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{\mu_0 q}{4\pi R} \frac{\mathbf{n} \times \left[\left(\mathbf{n} - \frac{\mathbf{v}}{c}\right) \times \mathbf{w}\right]}{\left(1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c}\right)^3}, \\ \mathbf{H} &= \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\, \mathbf{n} \times \mathbf{E} \end{aligned}\right\} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{q}{c^2 R} \frac{\mathbf{n} \times \left[\left(\mathbf{n} - \frac{\mathbf{v}}{c}\right) \times \mathbf{w}\right]}{\left(1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c}\right)^3}, \\ \mathbf{H} &= \mathbf{n} \times \mathbf{E} \end{aligned}\right\} \quad \text{(en u. du système de Gauss)},$$

où $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$ est le vecteur unité mené dans la direction du rayonnement. Toutes les grandeurs entrant dans les deuxièmes membres de ces égalités sont prises aux instants $t' = t - R/c$.

La puissance instantanée de rayonnement dans l'angle solide $d\Omega$ est alors:

$$dN = \frac{\mu_0 q^2}{16\pi^2 c}\left\{\frac{w^2}{\left(1-\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}}{c}\right)^4} + \frac{2(\mathbf{n}\cdot\mathbf{w})(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})}{c\left(1-\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}}{c}\right)^5} - \frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)(\mathbf{n}\cdot\mathbf{w})^2}{\left(1-\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}}{c}\right)^6}\right\} d\Omega \quad \text{(en u. SI)},$$

$$dN = \frac{q^2}{4\pi c^3}\left\{\frac{w^2}{\left(1-\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}}{c}\right)^4} + \frac{2(\mathbf{n}\cdot\mathbf{w})(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})}{c\left(1-\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}}{c}\right)^5} - \frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)(\mathbf{n}\cdot\mathbf{w})^2}{\left(1-\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}}{c}\right)^6}\right\} d\Omega \quad \text{(en u. du système de Gauss)}.$$

Dans le cas où la vitesse $\mathbf{v}$ et l'accélération $\mathbf{w}$ de la charge sont parallèles:

$$dN = \frac{\mu_0 q^2}{16\pi^2 c}\,\frac{w^2 \sin^2\theta}{(1-\beta\cos\theta)^6}\,d\Omega \quad \text{(en u. SI)},$$

$$dN = \frac{q^2}{4\pi c^3}\,\frac{w^2 \sin^2\theta}{(1-\beta\cos\theta)^6}\,d\Omega \quad \text{(en u. du système de Gauss)},$$

où θ est l'angle entre la direction du rayonnement $\mathbf{n}$ et $\mathbf{v}$, $\beta = v/c$. La charge ne rayonne pas dans les directions $\theta = 0, \pi$.

Dans le cas où $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$,

$$dN = \frac{\mu_0 q^2 w^2}{16\pi^2 c}\left[\frac{1}{(1-\beta\cos\theta)^4} - \frac{(1-\beta^2)\sin^2\theta}{(1-\beta\cos\theta)^6}\cos^2\varphi\right] d\Omega \quad \text{(en u. SI)},$$

$$dN = \frac{q^2 w^2}{4\pi c^3}\left[\frac{1}{(1-\beta\cos\theta)^4} - \frac{(1-\beta^2)\sin^2\theta}{(1-\beta\cos\theta)^6}\cos^2\varphi\right] d\Omega \quad \text{(en u. du système de Gauss)},$$

où φ est l'angle entre le plan passant par les vecteurs $\mathbf{n}$ et $\mathbf{v}$, et le plan passant par les vecteurs $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$. La charge ne rayonne pas

dans les directions $\theta = \arccos \beta$ situées sur le plan des vecteurs **v** et **w** ($\varphi = 0$).

Dans le cas ultrarelativiste ($1 - \beta \ll 1$), la particule chargée rayonne principalement dans le sens de son mouvement (dans la limite des angles $\theta \sim \sqrt{1 - \beta^2}$).

8° Rayonnement d'une charge animée d'un mouvement uniforme avec une vitesse arbitraire suivant un cercle dans un champ magnétique constant uniforme $\mathbf{H}(\mathbf{H} \perp \mathbf{v})$. La puissance de rayonnement, après la médiation dans une période de révolution, dans l'angle solide $d\Omega$ en direction **n** formant l'angle α avec la normale au plan de l'orbite, est:

$$dN = \frac{q^4 H^2 v^2 (1-\beta^2)}{8\pi m_0^2 c^5} \left[\frac{2 + \beta^2 \sin^2 \alpha}{(1 - \beta^2 \sin^2 \alpha)^{5/2}} - \right.$$

$$\left. - \frac{(1 - \beta^2)(4 + \beta^2 \sin^2 \alpha) \sin^2 \alpha}{4(1 - \beta^2 \sin^2 \alpha)^{7/2}} \right] d\Omega \quad \text{(en u. du système de Gauss)},$$

où m_0 est la masse au repos (p. 551) de la particule chargée.

La puissance totale de rayonnement est:

$$N = \frac{2q^4 H^2 v^2}{3m_0^2 c^5 (1 - \beta^2)} \quad \text{(en u. du système de Gauss)}.$$

Lorsque $1 - \beta \ll 1$, le rayonnement est concentré principalement au voisinage du plan de l'orbite dans l'intervalle des angles $\alpha = \pi/2 \pm \Delta\alpha$, où $\Delta\alpha \sim \sqrt{1 - \beta^2}$. La plus grande partie du rayonnement incombe au domaine des pulsations:

$$\omega \sim \frac{qH}{m_0 c} \frac{1}{1 - \beta^2} \quad \text{(en u. du système de Gauss)},$$

et le spectre de rayonnement est composé d'une multitude de raies très proches l'une de l'autre. Un tel rayonnementest observé lors d'un mouvement des particules chargées dans les accélérateurs cycliques (p. 464) et est dit *rayonnement synchrotron*.

9° Le rayonnement apparaissant lors du passage de l'électron à travers le champ de l'atome ou du noyau est dit *rayonnement de freinage*. Le rayonnement de freinage a un spectre continu limité par la fréquence maximale ν_0, qui est:

$$\nu_0 = \frac{mv^2}{2h},$$

lorsque $v/c \ll 1$, où v est la vitesse initiale de l'électron, m sa masse, h la constante de Planck.

8. Radiocommunication, télévision, radiolocalisation (radar) et radioastronomie

1° On appelle *radiocommunication* la transmission d'une information quelconque à l'aide *d'ondes radio*, autrement dit, à l'aide d'ondes électromagnétiques de fréquence inférieure à $3 \cdot 10^5$ MHz. La *radiodiffusion* réalise la transmission de la parole, de la musique, des signaux télégraphiques, la *télévision*, celle des images optiques.

La radiocommunication est réalisée par émission d'ondes électromagnétiques modulées à l'aide d'un poste émetteur et par leur *démodulation* dans un poste récepteur.

2° On appelle *modulation d'une onde électromagnétique* la variation de ses paramètres avec des fréquences très inférieures à la fréquence d'onde électromagnétique initiale. L'onde modulée est dite *onde porteuse* et sa fréquence ω, *fréquence porteuse*. Suivant le paramètre de l'onde porteuse qui varie lors de modulation, on distingue:

a) la *modulation d'amplitude* (MA), lors de laquelle varie seulement l'amplitude de l'onde, $a = a_0(1 + m\cos\Omega t)$;

b) la *modulation de fréquence* (MF), lors de laquelle ne varie que la fréquence de l'onde, $\omega = \omega_0(1 + m_f\cos\Omega t)$;

c) la *modulation de phase* (MPh), lors de laquelle varie la phase initiale de l'onde, $\alpha = \alpha_0(1 + m_\alpha\cos\Omega t)$, où ω_0 et Ω sont les pulsations de l'onde porteuse et de la modulation ($\Omega \ll \omega_0$), m le *coefficient de modulation*, $\Delta\omega = m_f\omega_0$ l'amplitude d'oscillations de la fréquence lors de la MF et $\Delta\alpha = \alpha_0 m_\alpha$ l'amplitude d'oscillations de la phase initiale lors de la MPh.

3° En radiodiffusion, la fréquence de modulation est faible étant située dans les limites des sons audibles ($16 \div 20\,000$ Hz). C'est pourquoi il n'y a pas de restrictions sévères pour le choix de la fréquence porteuse, ce qui est fait en se basant sur les particularités de la propagation dans l'atmosphère des ondes radio de différentes longueurs et sur la possibilité d'assurer une radiocommunication sûre, proche ou éloignée, la puissance minimale du poste émetteur étant toujours souhaitable. Une radiocommunication intense est réalisée par *ondes radio longues* ($\lambda = 10^3 \div 10^4$ m, $\nu = 30 \div 300$ kHz), *moyennes* ($\lambda = 10^2 \div 10^3$ m, $\nu = 0{,}3 \div 3$ MHz) et *courtes* ($\lambda = 10 \div 100$ m, $\nu = 3 \div 30$ MHz).

4° Chaque *poste émetteur de radio* est constitué des principaux éléments suivants: *générateur* d'ondes électromagnétiques non amorties de fréquence porteuse, *modulateur* et *antenne émettrice* réalisant l'émission des ondes radio dans la direction voulue.

Le dispositif de réception est constitué d'une *antenne réceptrice* et d'un *poste récepteur*. L'antenne réceptrice transforme l'énergie des ondes radio en énergie des oscillations électromagnétiques de haute fréquence. Le poste récepteur choisit parmi ces oscillations celles qui sont excitées par le poste émetteur intéressé, les amplifie et démodule, autrement dit, sépare les oscillations modulatrices de basse fréquence des oscillations de haute fréquence (porteuses). Les oscillations modulatrices sont amenées après leur amplification à l'appareil de reproduction (téléphone, haut-parleur, kinescope, etc.).

5° La transmission d'images par télévision est réalisée par modulation de l'onde électromagnétique porteuse suivant la luminosité des différentes petites portions des objets transmis. A ces fins on utilise dans les tubes de caméra de télévision l'effet photoélectrique externe ou interne (p. 726). La transmission des *images* a lieu successivement par lignes et dans chaque ligne par ses petits *éléments*. La fréquence de modulation (la *fréquence de vidéosignaux*) est égale à 6,5 MHz environ. Pour éviter la déformation des images, la fréquence porteuse doit être environ 10 fois plus grande. Aussi utilise-t-on pour les transmissions de télévision des *ondes ultra-courtes* ($\lambda = 1 \div 10$ m, $\nu > 30$ MHz).

Le tube cathodique ou *kinescope*, basé sur l'utilisation du phénomène de luminescence cathodique (p. 737), est appliqué pour reproduire l'image dans le récepteur de télévision. A l'aide d'un dispositif spécial sont opérés les balayages horizontal et vertical du rayon cathodique sur l'écran du kinescope synchronisés avec la transmission des éléments correspondants de l'image par la station centrale de télévision. Une intensité inégale d'éclairement en différents points de l'écran est atteinte par modulation d'intensité du rayon électronique en accord avec la modulation d'ondes électromagnétiques captées.

6° Une influence considérable sur la propagation des ondes radio dans l'atmosphère est exercée par les phénomènes de *diffraction des ondes radio* (p. 650) sur la surface de la Terre, d'absorption par l'atmosphère et par la surface de la Terre, de réflexion par cette dernière et d'absorption, de réfraction et de réflexion dans l'*ionosphère*, c'est-à-dire les couches supérieures de l'atmosphère intensément ionisées par les radiations ultraviolette, de rayons X et corpusculaire du Soleil. L'ionosphère est constituée d'une série de couches situées à différentes altitudes. Les intensités d'ionisation et les altitudes auxquelles se trouvent ces couches au-dessus de la surface de la Terre dépendent de la latitude géographique, de l'heure et de la saison, ainsi que du niveau de l'activité solaire.

La liaison radioélectrique à grande distance la plus sûre est réalisée par ondes longues, qui contournent la surface terrestre par suite de diffraction et de *réfraction* dans la troposphère, pénétrant relativement peu dans l'ionosphère et étant faiblement absorbées par celle-ci.

La portée de réception radioélectrique par ondes moyennes est très différente le jour et la nuit. Ceci est lié au fait que les ondes moyennes sont fortement absorbées par la couche inférieure D de l'ionosphère et réfléchies dans la couche E plus éloignée. Comme il n'y a pas la nuit de radiation solaire, la couche D disparaît et la portée de réception croît intensément.

Les ondes radio courtes sont absorbées par la couche D et réfléchies dans la couche F qui est encore plus éloignée que la couche E. Grâce à ceci devient possible la liaison radioélectrique à grande distance par ondes courtes.

Les ondes radio ultracourtes avec $\lambda < 5$ m, dans les conditions normales, ne sont pas réfléchies dans l'ionosphère. Les ondes directes qui se propagent au voisinage de la surface de la Terre sont absorbées de façon intense par celle-ci. C'est pourquoi une réception sûre de ces ondes, en télévision par exemple, n'est possible que dans les limites d'horizon radioélectrique, autrement dit, à des distances commensurables à la portée de vision directe de l'antenne de l'émetteur. Pour réaliser la transmission de télévision à grande distance, on utilise la chaîne de relais de télévision, assurant la réception, l'amplification et la retransmission des signaux.

7° On appelle *radiolocalisation* ou *radar* la détection et le repérage de différents objets à l'aide des ondes radio. La radiolocalisation est basée sur le phénomène de réflexion ou de dispersion des ondes radio par les corps.

Le *poste radar* comprend un émetteur radio à ondes courtes et un récepteur radio, ayant une antenne émission-réception assurant un rayonnement très directionnel *(faisceau radar)*. Le rayonnement est réalisé sous forme d'impulsions courtes d'environ 10^{-6} s de durée. Dans les intervalles de temps entre deux impulsions successives, l'antenne est commutée automatiquement sur la réception du signal réfléchi (écho) à partir de la cible. La distance à la cible est donnée par l'intervalle de temps séparant le signal et son écho. En radiolocalisation on utilise les ondes radio ultracourtes dans les gammes déci, centi et millimétrique, la radiolocalisation étant la plus efficace lorsque des dimensions des corps à localiser sont très supérieures à la longueur d'onde λ.

Les méthodes de radiolocalisation sont utilisées en *radioastronomie* pour préciser le mouvement des planètes du système solaire et de leurs satellites, ainsi que pour l'étude des orbites et des

vitesses de mouvement des météores. La valeur de l'*unité astronomique*, c'est-à-dire la distance moyenne de la Terre au Soleil: 1 u. a. = (149 598 100 ± 750) km, fut précisée en se basant sur le radiorepérage de Vénus (U.R.S.S., 1962).

8° La *radioastronomie* fait l'étude des corps célestes suivant leur rayonnement radio ultracourt propre (principalement dans le domaine d'ondes centi et décimétriques, qui sont faiblement absorbées par l'ionosphère et les gaz contenus dans l'atmosphère terrestre). Les dispositifs servant à capter et à analyser ce rayonnement sont appelés *radiotélescopes*. Grâce aux aires effectives notables des antennes, la sensibilité des radiotélescopes dépasse considérablement la sensibilité des plus grands télescopes optiques modernes. Les méthodes de radioastronomie permettent de déterminer la température et les propriétés physiques de la couche superficielle des planètes du système solaire. L'observation systématique du rayonnement radioélectrique du Soleil permet de prévoir l'accroissement de l'activité solaire, qui est à l'origine des tempêtes magnétiques terrestres qui troublent la radiocommunication par ondes courtes.

Les méthodes radioastronomiques sont le seul procédé d'étude du noyau de la Galaxie ainsi que des *radiogalaxies*, qui sont des parties de la Métagalaxie très éloignées de la Terre, émettant le flux radioélectrique relativement important, celles-ci n'étant pas observables même avec les télescopes optiques les plus parfaits. Récemment on a découvert, à l'aide d'observations radioastronomiques, des objets extragalactiques de l'Univers appelés *quasars*. Les quasars ont des dimensions angulaires relativement petites et une luminosité variable. Il est probable que, tout comme les étoiles, ils représentent des corps autoluminescents. Toutefois les masses des quasars sont énormes (de l'ordre de $10^8 \div 10^9$ masses du Soleil) et leur luminosité est de plusieurs ordres plus élevée que la luminosité de notre Galaxie.

CHAPITRE 3

Passage de la lumière à travers la surface de séparation de deux milieux

1. Interaction des ondes électromagnétiques avec la substance

1° La théorie électronique classique considère la substance comme un système de particules chargées. Le champ électromagnétique variable d'une onde excite les oscillations forcées de ces particules. Dans le cas d'ondes de haute fréquence correspondant à la lumière visible et aux rayons ultraviolets, seuls les électrons peuvent être mis en oscillations forcées d'amplitudes tant soit peu notables. Les particules chargées de masse beaucoup plus grande (noyaux d'atomes, ions) effectuent des oscillations forcées sous l'action du rayonnement infrarouge de fréquence plus basse.

2° Dans un milieu isotrope la force agissant sur la charge q de la part du champ électromagnétique d'une onde est:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\frac{\mathbf{v}_1}{v} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}),$$

où $\mathbf{v}_1$ est la vitesse de la charge q, v la vitesse de phase de l'onde, $\mathbf{n}$ le vecteur unité mené dans la direction de propagation de l'onde. Etant donné que $v_1 \ll v$, le second terme qui représente la force de Lorentz (p. 461) est petit devant le premier. La force agissant sur les particules chargées d'une substance dépend principalement du champ électrique, autrement dit, du vecteur $\mathbf{E}$ champ électromagnétique de l'onde. Aussi l'appelle-t-on parfois $\mathbf{E}$ *vecteur lumineux.*

Si les molécules d'une substance sont électriquement isotropes, les oscillations forcées des électrons dans les molécules ont lieu dans la direction coïncidant avec la direction des oscillations du vecteur $\mathbf{E}$ du champ de l'onde. Si les molécules sont anisotropes, dans le cas général ces directions sont différentes.

Les ondes lumineuses, dont les fréquences sont proches des fréquences propres des oscillations des électrons dans les atomes ou les molécules, exercent la plus forte influence sur les électrons.

3° Lors des oscillations forcées des particules chargées dans les molécules d'une substance, les moments électriques dipolaires de ces molécules varient périodiquement (avec la fréquence ν de la lumière incidente). Les molécules émettent dans ce cas des *ondes électromagnétiques secondaires (ondelettes)* de même fréquence ν. Les distances intermoléculaires moyennes sont très inférieures à l'étendue d'un train d'ondes. C'est pourquoi dans un milieu optiquement homogène (p. 710) les ondelettes émises par un très grand nombre de molécules voisines, malgré l'agitation thermique chaotique de ces dernières, sont cohérentes aussi bien entre elles qu'avec l'onde primaire. Etant superposées, ces ondes interfèrent (p. 623).

4° Dans un milieu optiquement homogène et isotrope il se forme par interférence des ondes primaire et secondaire une *onde transmise* dont la vitesse de phase dépend de la fréquence.

Lors de l'incidence d'une onde électromagnétique sur la surface de séparation de deux milieux différents, optiquement homogènes et isotropes, il se forme une *onde réfléchie* se propageant dans le même milieu d'où est venue l'onde primaire, et une *onde réfractée* se propageant dans le second milieu.

5° En théorie macroscopique de Maxwell, le problème sur l'interaction d'une onde électromagnétique avec la substance est ramené à la résolution des équations de Maxwell pour des conditions déterminées sur la surface de séparation des milieux où se propage l'onde. Les propriétés électriques et magnétiques de la substance qui déterminent son comportement sous l'action d'une onde lumineuse sont caractérisées par la constante diélectrique relative ε, la conductivité γ et la perméabilité magnétique relative μ. On peut admettre pour toutes les substances dans le domaine des fréquences optiques des ondes électromagnétiques que $\mu = 1$ et que la vitesse de phase de ces ondes est:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

2. Réflexion et réfraction de la lumière par les diélectriques

1° Lors de l'incidence d'une onde lumineuse sur une surface plane séparant deux diélectriques de différente constante diélectrique relative ε, l'onde lumineuse en partie est réfléchie et en partie est réfractée.

2° Le quotient de la vitesse de la lumière dans le vide c par la vitesse de phase de la lumière dans le milieu v:

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\varepsilon\mu} \approx \sqrt{\varepsilon}$$

est appelé *indice de réfraction absolu* de ce milieu. Pour tout milieu, excepté le vide, la grandeur n dépend de la fréquence de la lumière (p. 699) et de l'état du milieu (de sa température, densité, etc.). Pour les milieux raréfiés (les gaz, par exemple, dans les conditions normales) $n \approx 1$. Dans les milieux anisotropes l'indice de réfraction absolu dépend également du sens de propagation de la lumière et du caractère de sa polarisation (p. 678). Pour caractériser les milieux absorbants, on introduit un indice de réfraction complexe (p. 619).

On appelle *indice de réfraction relatif* n_{21} du second milieu par rapport au premier le rapport des vitesses de phase de la lumière v_1 et v_2 dans le premier et le second milieu respectivement:

$$n_{21} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1},$$

où n_1 et n_2 sont les indices de réfraction absolus du premier et du second milieu. Si $n_{21} > 1$, le second milieu est *optiquement plus dense* que le premier.

3° Les formules amenées ci-après ne sont vraies que pour les ondes monochromatiques dont la longueur λ est très supérieure aux distances intermoléculaires dans le milieu. Pour les ondes de la gamme optique cette condition est remplie même dans le cas de gaz pas trop raréfiés. On suppose de plus que les milieux sont homogènes, isotropes et n'absorbent pas la lumière. En définitive, les milieux où se propagent les ondes réfléchie et réfractée sont admis semi-infinis, autrement dit, on accepte que sur la surface de séparation ne convergent que trois ondes: l'onde incidente, l'onde réfléchie et l'onde réfractée (la réflexion multiple est négligée).

4° Lors de l'incidence d'une onde lumineuse sur une surface de séparation parfaitement plane dont les dimensions sont très supérieures à la longueur d'onde, l'*angle de réflexion* i' formé par la direction de propagation de l'onde réfléchie et la normale à la surface de séparation est égal en valeur absolue à l'angle d'incidence i *(loi de la réflexion)*. Une telle réflexion est dite *réflexion spéculaire*. L'*angle de réfraction* r entre la direction de propagation de l'onde réfractée et la normale à la surface de sé-

paration est lié à l'angle d'incidence i par la ***loi de Snell (loi de la réfraction)***:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21},$$

où n_{21} est l'indice de réfraction relatif du milieu où se propage la lumière réfractée par rapport au milieu où se propage la lumière incidente.

5° Lors de l'incidence d'une onde lumineuse d'un milieu optiquement plus dense 1 sur la surface de séparation avec un milieu moins dense 2 ($n_{21} < 1$), l'onde réfractée fait défaut si les angles d'incidence sont $i \geqslant i_{\text{lim}}$, où $\sin i_{\text{lim}} = n_{21}$, et toute la lumière est réfléchie par le milieu optiquement moins dense. Ce phénomène est appelé *réflexion totale*. L'angle i_{lim} est dit *angle limite* (ou *critique)*. Dans le cas de réflexion totale, une partie du champ électromagnétique de l'onde lumineuse pénètre dans le second milieu. Néanmoins, les amplitudes des vecteurs **E** et **H** du champ dans le second milieu décroissent très rapidement (d'après la loi exponentielle) à mesure qu'on s'éloigne de la surface de séparation. La profondeur de pénétration d'un champ tant soit peu important dans le second milieu est de l'ordre de la longueur d'onde lumineuse. Le flux d'énergie qui passe du premier milieu dans le second est, en moyenne, nul, de sorte que l'énergie de l'onde électromagnétique incidente est totalement rendue au premier milieu.

6° La grandeur R, égale au quotient des intensités des ondes incidente et réfléchie, est appelée *facteur de réflexion*. La grandeur T, égale au quotient des intensités des ondes incidente et réfractée, est appelée *facteur de transmission*. Lors de la réflexion et de la réfraction de la lumière par la surface séparant deux milieux transparents (n'absorbant pas la lumière) $R + T = 1$. Dans le cas de réflexion totale $R = 1$ et $T = 0$.

7° Sous l'angle d'incidence i [1] sur la surface de séparation de deux milieux d'une onde lumineuse plane non polarisée (lumière naturelle, p. 678) le facteur de réflexion est:

$$R = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)} + \frac{\operatorname{tg}^2(i-r)}{\operatorname{tg}^2(i+r)}\right],$$

[1] Si $n_{21} < 1$, on suppose que $i < i_{\text{lim}}$ (p. 613).

où r est l'angle de réfraction. Lorsque $i = r = 0$ *(incidence normale de la lumière)*

$$R = \left(\frac{n_{21} - 1}{n_{21} + 1}\right)^2,$$

où n_{21} est l'indice de réfraction relatif.

8° Dans le cas d'incidence sur une surface de séparation plane d'une onde plane polarisée rectilignement (p. 593), dont le vecteur **E** oscille dans le plan d'incidence *(onde p)*, les amplitudes des vecteurs **E** dans les ondes réfléchie (a_p^r) et réfractée (a_p^d) sont liées à l'amplitude du vecteur **E** dans l'onde incidente (a_p^0) par les relations suivantes *(équations de Fresnel pour l'onde p)*[1]:

$$a_p^r = a_p^0 \frac{\operatorname{tg}(i - r)}{\operatorname{tg}(i + r)}, \quad a_p^d = a_p^0 \frac{2 \cos i \sin r}{\sin (i + r) \cos (i - r)}.$$

Dans ces équations a_p^r est une grandeur algébrique à la différence de a_p^0 et a_p^d, qui sont toujours positives. Si $a_p^r < 0$, la réflexion a lieu sans changement de phase des oscillations du vecteur **E** (la phase du vecteur **H** varie respectivement de π); si $a_p^r > 0$, la phase du vecteur **E** varie de π (la phase du vecteur **H** se conserve respectivement) lors de la réflexion.

Le facteur de réflexion pour une onde p est alors:

$$R_p = \frac{\operatorname{tg}^2 (i - r)}{\operatorname{tg}^2 (i + r)}.$$

9° Lors de l'incidence sur la surface de séparation d'une onde plane polarisée rectilignement dont le vecteur **E** oscille dans un plan perpendiculaire au plan d'incidence *(onde s)*, les amplitudes a_s^r, a_s^d et a_s^0 sont liées par les relations *(équations de Fresnel pour une onde s)*[1]:

$$a_s^r = -\, a_s^0 \frac{\sin (i - r)}{\sin (i + r)}, \quad a_s^d = a_s^0 \frac{2 \cos i \sin r}{\sin (i + r)}.$$

Dans ces équations a_s^r est une grandeur algébrique à la différence de a_s^0 et a_s^d, qui sont toujours positives. Si $a_s^r < 0$, il se produit, lors de la réflexion, un changement de phase des oscillations du vecteur **E** de π (la phase du vecteur **H** se conserve respec-

[1]) Si $n_{21} < 1$, on suppose que $i < i_{\text{lim}}$ (p. 613).

tivement); si $a_s^r > 0$, la phase du vecteur **E** lors de la réflexion se conserve (la phase du vecteur **H** varie respectivement de π).

Le facteur de réflexion pour une onde s est alors:

$$R_s = \frac{\sin^2 (i - r)}{\sin^2 (i + r)}.$$

La courbe montrant la dépendance de R_p, R_s et $R = \frac{1}{2}(R_p + R_s)$ vis-à-vis de i pour $n_{21} = 1,52$ (air-verre) est donnée fig. V.3.1.

FIG. V.3.1.

10° Sous l'incidence normale ($i = r = 0$) des ondes p et s sur la surface de séparation de deux milieux

$$a_p^r = a_p^0 \frac{n_{21} - 1}{n_{21} + 1}, \quad a_s^r = - a_s^0 \frac{n_{21} - 1}{n_{21} + 1},$$

$$a_p^d = a_p^0 \frac{2}{n_{21} + 1}, \quad a_s^d = a_s^0 \frac{2}{n_{21} + 1},$$

$$R_p = R_s = \left(\frac{n_{21} - 1}{n_{21} + 1}\right)^2.$$

11° La phase de l'onde lumineuse réfractée coïncide toujours avec la phase de l'onde incidente: sur la surface de séparation les vecteurs $\mathbf{E}^0$ et $\mathbf{E}^d$ oscillent dans une même phase. La phase de l'onde réfléchie peut différer de π de la phase de l'onde incidente. Dans ce cas se produit une *réflexion avec perte d'une demi-onde.* Le tableau ci-après montre la différence de phase entre les ondes réfléchie et incidente (pour les ondes p et s).

	$i + r > \pi/2$		$i + r < \pi/2$	
	$i > r$ ($n_{21} > 1$)	$i < r$ ($n_{21} < 1$)	$i > r$ ($n_{21} > 1$)	$i < r$ ($n_{21} < 1$)
Onde p	0	π	π	0
Onde s	π	0	π	0

Lorsque $i + r$ passe par la valeur $\pi/2$ (autrement dit, l'angle d'incidence i passe par la valeur i_0, pour laquelle $i_0 + r_0 = \pi/2$; l'angle i_0 est appelé angle de Brewster, p. 618), la phase de l'onde réfléchie varie de π par saut.

Habituellement $i < i_0$, autrement dit, $i + r < \pi/2$. Dans ces cas, comme il apparaît du tableau ci-dessus, indépendamment du caractère de polarisation de la lumière incidente la réflexion par un milieu optiquement moins dense ($n_{21} < 1$) s'opère sans changement de phase de l'onde, la réflexion par un milieu optiquement plus dense ($n_{21} > 1$) s'accompagne d'un changement de phase de π (avec perte d'une demi-onde).

12° Dans le cas de réflexion totale ($n_{21} < 1$ et $i \geqslant i_{\text{lim}}$) les ondes réfléchies p et s retardent en phase sur les ondes incidentes p et s de $\Delta\varphi_p$ et $\Delta\varphi_s$ respectivement et avec cela

$$\operatorname{tg}\frac{\Delta\varphi_p}{2} = \frac{\sqrt{\sin^2 i - n_{21}^2}}{n_{21}^2 \cos i} \quad \text{et} \quad \operatorname{tg}\frac{\Delta\varphi_s}{2} = \frac{\sqrt{\sin^2 i - n_{21}^2}}{\cos i} = n_{21}^2 \operatorname{tg}\frac{\Delta\varphi_p}{2}.$$

La différence $\Delta\varphi_s - \Delta\varphi_p$ n'est égale à zéro que dans deux cas limites: a) $i = i_{\text{lim}}$ ($\Delta\varphi_s = \Delta\varphi_p = 0$); b) $i = \frac{\pi}{2}$ ($\Delta\varphi_s = \Delta\varphi_p = \pi$).

13° Afin de réduire la valeur du facteur de réflexion dans les systèmes optiques où les réflexions multiples de la lumière font baisser notablement l'intensité de la lumière transmise et l'éclairement de l'image, on utilise l'interférence des rayons réfléchis sur les faces antérieure et postérieure d'une couche spéciale déposée sur les lentilles du système optique, appelée *couche antiréfléchissante*. L'épaisseur h et l'indice de réfraction absolu n de cette couche sont choisis de manière que les deux rayons réfléchis aient une différence de marche (p. 627) $\lambda/2$ (une différence de phase π) et s'éteignent mutuellement

$$2h\sqrt{n^2 - \sin^2 i} = \frac{\lambda}{2}.$$

Les intensités des deux rayons réfléchis étant égales, on trouve la grandeur n de la relation (lors de l'incidence normale de l'air)

$$n = \sqrt{n_0},$$

où n_0 est l'indice de réfraction absolu du matériau dont est faite la lentille.

14° On appelle *réflexion diffuse* de la lumière la réflexion de la lumière dans toutes les directions possibles. Elle est observée, par exemple, lors de la réflexion de la lumière par une surface ru-

gueuse séparant deux milieux. La surface est dite *parfaitement mate* si elle réfléchit la lumière uniformément dans toutes les directions.

15° On appelle *réfraction de la lumière* la déviation des rayons lumineux dans un milieu optiquement non homogène avec un indice de réfraction variant continuellement. Comme exemple de réfraction de la lumière peut servir la *réfraction astronomique*, déviation des rayons lumineux provenant des corps célestes traversant l'atmosphère terrestre. Cette réfraction est due à la baisse de la densité atmosphérique (et, par conséquent, de sa constante diélectrique relative ainsi que de l'indice de réfraction absolu) à mesure qu'on s'éloigne de la surface de la Terre. Par suite de la réfraction astronomique la direction apparente vers une étoile quelconque fait avec la normale à la surface de la Terre, au point d'observation, un angle un peu plus petit que celui fait par la direction réelle. La déviation des rayons lumineux par des sources terrestres éloignées, qui a lieu dans la couche atmosphérique attenante à la surface de la Terre, est appelée *réfraction terrestre*. Dans les conditions déterminées la réfraction terrestre produit les effets de *mirage*, apparition d'images fausses d'objets éloignés.

3. Polarisation de la lumière dans la réflexion et la réfraction

1° Pour un angle arbitraire d'incidence i (excepté $i = 0$ ou $\pi/2$) les facteurs de réflexion par la surface de séparation de deux diélectriques isotropes sont différents pour les ondes s et p: $R_s > R_p$ (p. 614). Aussi, si l'onde incidente n'est pas polarisée (lumière naturelle, p. 678), les ondes réfléchie et réfractée sont-elles partiellement polarisées rectilignement. Dans l'onde réfléchie prédominent les oscillations du vecteur **E** perpendiculaires au plan d'incidence (polarisation s), et dans l'onde réfractée les oscillations du vecteur **E** effectuées dans le plan d'incidence (polarisation p). S'il n'y a pas d'absorption, les degrés de polarisation des deux ondes sont respectivement égaux à

$$\Delta^r = \frac{I_s^r - I_p^r}{I_s^r + I_p^r} = \frac{R_s - R_p}{R_s + R_p}, \qquad \Delta^d = \frac{I_p^d - I_s^d}{I_p^d + I_s^d} = \frac{R_s - R_p}{2 - (R_s + R_p)},$$

où I_s^r et I_s^d sont les intensités des ondes s réfléchie et réfractée et I_p^r et I_p^d celles des ondes p.

2° Si l'angle d'incidence satisfait à la condition

$$\operatorname{tg} i_0 = n_{21},$$

on a $R_p = 0$, et la lumière réfléchie est entièrement polarisée dans le plan d'incidence *(loi de Brewster)*. L'angle i_0 est appelé *angle de Brewster*. Sous l'angle de Brewster, $i_0 + r_0 = \pi/2$, autrement dit, les rayons réfléchi et réfracté sont réciproquement perpendiculaires. Dans ce cas:

$$R_s = \sin^2 (i_0 - r_0) = \left(\frac{n_{21}^2 - 1}{n_{21}^2 + 1} \right)^2$$

et le degré de polarisation de la lumière réfractée atteint sa valeur maximale

$$\Delta_{\max}^{d} = \frac{(n_{21}^2 + 1)^2 - 4n_{21}^2}{(n_{21}^2 + 1)^2 + 4n_{21}^2} .$$

3° Le degré de polarisation Δ de la lumière transmise peut être considérablement augmenté par réflexion et réfraction multiple dans une *pile* de lames à faces planes parallèles, situées de manière que l'angle d'incidence de la lumière soit égal à i_0. S'il n'y a pas d'absorption dans une pile constituée de N lames,

$$\Delta = \frac{1 - (1 - R_s)^{2N}}{1 + (1 - R_s)^{2N}}, \quad \text{où} \quad R_s = \left(\frac{n_{21}^2 - 1}{n_{21}^2 + 1} \right)^2 .$$

Ainsi, pour une pile de $N = 15$ lames de verre $(n_{21} = 1{,}5)$, $\Delta = 0{,}985$.

4° L'onde p polarisée (p. 614) lors de son incidence sur la surface de séparation de diélectriques sous l'angle brewstérien ne se réfléchit pas du tout et donne seulement une onde réfractée.

5° Si la lumière à polarisation dans un plan subit une réflexion totale ($n_{21} < 1$ et $i \geq i_{\lim}$), il apparaît entre les composantes s et p de l'onde réfléchie une différence de phase $\Delta\varphi$, conditionnée par la différence de phase des composantes correspondantes des ondes réfléchie et incidente $\Delta\varphi_s$ et $\Delta\varphi_p$:

$$\operatorname{tg} \frac{\Delta\varphi}{2} = \operatorname{tg} \frac{\Delta\varphi_p - \Delta\varphi_s}{2} = \frac{\cos i \sqrt{\sin^2 i - n_{21}^2}}{\sin^2 i} .$$

L'onde réfléchie se trouve être polarisée elliptiquement. Lors de la réflexion totale correspondant à l'angle $i_{\lim}$, on a $\sin i = n_{21}$, $\Delta\varphi_p = \Delta\varphi_s$, autrement dit, la lumière polarisée dans un plan reste la même. Lorsque $\Delta\varphi_p - \Delta\varphi_s = \pi/2$ et $a_s^0 = a_p^0$, la lumière réfléchie est polarisée circulairement et la surface de séparation de diélectriques agit comme une «lame quart d'onde» (p. 691).

4. Eléments d'optique métallique

1° L'onde électromagnétique incidente sur une surface métallique en partie se réfléchit et en partie pénètre à l'intérieur du métal. Le facteur de réflexion dépend de la fréquence de l'onde, de la conductibilité électrique du métal et de l'état de sa surface.

Dans le cas d'ondes de fréquence pas trop élevée (ondes radioélectriques, rayons infrarouges et lumière visible) ce sont les électrons de conduction (p. 392) qui servent de sources d'ondes secondaires (p. 611). Le facteur de réflexion par des surfaces pures des métaux doués d'une bonne conductibilité électrique (sodium, argent, etc.) est proche de 1. L'intensité de l'onde qui pénètre à l'intérieur du métal n'est pas grande et décroît rapidement jusqu'à zéro dans une mince couche superficielle par suite des pertes d'énergie par effet Joule. Pour un conducteur parfait, ces pertes sont nulles et le facteur de réflexion est égal à 1.

Aux fréquences plus élevées correspondant au rayonnement ultraviolet, ce sont les oscillations forcées des électrons liés dans les ions du réseau cristallin qui jouent un rôle important. Ceci conduit à une réduction intense du facteur de réflexion de la lumière par les métaux (jusqu'à 0,04 pour l'argent quand $\nu = 10^{15}\ s^{-1}$) et à l'apparition d'une transparence notable des minces feuilles métalliques.

2° En électrodynamique macroscopique classique, le problème de réflexion et de réfraction de la lumière par une surface métallique se ramène à la résolution des équations de Maxwell satisfaisant aux conditions aux limites sur la surface conductrice (p. 524). Ce problème pour les métaux homogènes, isotropes et non magnétiques ($\mu = 1$) peut être formellement réduit au problème analogue pour la surface de séparation de deux diélectriques transparents par introduction d'une *constante diélectrique relative complexe du métal:*

$$\varepsilon' = \varepsilon - \frac{\gamma}{2\pi\varepsilon_0\nu}\, i \quad \text{(en u. SI)},$$

$$\varepsilon' = \varepsilon - \frac{2\gamma}{\nu}\, i \quad \text{(en u. du système de Gauss)},$$

où γ est la conductivité du métal, ε sa constante diélectrique relative réelle, ε_0 la constante diélectrique, ν la fréquence de la lumière et $i = \sqrt{-1}$.

3° Les propriétés optiques du métal se caractérisent par l'*indice de réfraction absolu complexe*

$$n' = \sqrt{\varepsilon'} = n(1 - i\varkappa),$$

où

$$n^2(1 - \varkappa^2) = \varepsilon$$

et

$$n^2\varkappa = \begin{cases} \gamma/4\pi\varepsilon_0\nu & \text{(en u. SI)}, \\ \gamma/\nu & \text{(en u. du système de Gauss)}. \end{cases}$$

Les valeurs réelles de n et $\varkappa$ représentent les *caractéristiques optiques* du métal. Elles dépendent de la nature du métal et de la fréquence de la lumière incidente. La partie imaginaire de l'indice de réfraction complexe caractérise l'absorption de la lumière dans le métal, qui a lieu suivant la loi de Lambert-Bouguer (p. 709). Elle est liée au coefficient linéaire d'absorption μ (p. 709) par la relation

$$n\varkappa = \frac{c}{4\pi\nu}\,\mu = \frac{\lambda_0}{4\pi}\,\mu,$$

où c et λ_0 sont la vitesse et la longueur d'onde de la lumière dans le vide. Cette relation, ainsi que les notions de constante diélectrique relative et d'indice de réfraction complexes sont applicables non seulement aux métaux, mais aussi à n'importe quel autre milieu conducteur ou non conducteur, absorbant intensément la lumière (par exemple au plasma, aux diélectriques au voisinage des bandes d'absorption, etc.). Pour les métaux typiques $n\varkappa \gg n$; c'est pourquoi l'absorption d'un milieu quelconque est dite «métallique» si pour ce milieu $\varkappa \gg 1$.

4° Le calcul des amplitudes complexes des ondes s et p réfléchies et réfractées peut être effectué à l'aide des équations de Fresnel (p. 614), où l'angle r est complexe (à l'exception du cas où $i = 0$) et lié à l'angle d'incidence i par la relation

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n'.$$

L'angle réel r_r de réfraction de la lumière dans le métal est:

$$r_r = \arc\sin\left(\frac{\sin i}{n_r}\right),$$

où

$$n_r = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{n^2(1 - \varkappa^2) + \sin^2 i + \sqrt{[n^2\,(1 - \varkappa^2) - \sin^2 i] + 4n^4\varkappa^2}}.$$

L'indice de réfraction n_r dépend de l'angle d'incidence, autrement dit, la vitesse de phase de la lumière dans le milieu absorbant dépend de la direction de sa propagation.

5° Sous un angle d'incidence arbitraire, les facteurs de réflexion des ondes s et p par la surface métallique sont égaux à

$$R_s = \frac{|a_s^r|^2}{(a_s^0)^2} = \frac{(a - \cos i)^2 + b^2}{(a + \cos i)^2 + b^2},$$

$$R_p = \frac{|a_p^r|^2}{(a_p^0)^2} = \frac{(a - \sin i \operatorname{tg} i)^2 + b^2}{(a + \sin i \operatorname{tg} i)^2 + b^2} R_s,$$

où $a = \sqrt{n_r^2 - \sin^2 i}$, $b = \sqrt{n_r^2 - n^2(1 - \varkappa^2)}$, $|a_s^r|$ et $|a_p^r|$ sont les modules des amplitudes complexes des ondes p et s réfléchies.

Dans tous les cas, excepté le cas où $i = 0$ et $\pi/2$, on a $R_s > R_p$. Notons que pour les métaux, à la différence des diélectriques transparents, R_p n'est égal à zéro pour aucun angle d'incidence. Par conséquent, lors de l'incidence de la lumière naturelle sur le métal, la lumière réfléchie ne peut jamais être entièrement polarisée rectilignement. Dans le cas de l'incidence normale de la lumière $R_s = R_p$, $a = n_r = n$, $b = n\varkappa$ et le facteur de réflexion est:

$$R = \frac{(n - 1)^2 + n^2\varkappa^2}{(n - 1)^2 + n^2\varkappa^2}.$$

6° Au cours de la réflexion dans le métal il apparaît une différence de phase entre l'onde réfléchie et l'onde incidente, qui est différente pour les ondes s et p:

$$\operatorname{tg} \Delta\varphi_s^r = \frac{2b \cos i}{\cos^2 i - (a^2 + b^2)},$$

$$\operatorname{tg} \Delta\varphi_p^r = \frac{2b \cos i \, (a^2 + b^2 - \sin^2 i)}{a^2 + b^2 - n^4(1 + \varkappa^2)^2 \cos^2 i},$$

quant à la signification de a et b voir 5°.

Lors de l'incidence sur le métal d'une onde polarisée dans un plan il apparaît entre les composantes s et p de l'onde réfléchie un décalage de phase $\Delta\varphi^r = \Delta\varphi_s^r - \Delta\varphi_p^r$, et dans ce cas

$$\operatorname{tg} \Delta\varphi^r = \frac{2b \sin i \operatorname{tg} i}{a^2 + b^2 - \sin^2 i \operatorname{tg}^2 i}.$$

C'est pourquoi, quand $i \neq 0$, la lumière réfléchie est polarisée elliptiquement. Sous l'incidence normale $(i = 0)$:

$$\operatorname{tg} \Delta\varphi_s^r = \operatorname{tg} \Delta\varphi_p^r = \frac{2n\varkappa}{1 - n^2(1 + \varkappa^2)} \quad \text{et} \quad \Delta\varphi^r = 0.$$

CHAPITRE 4

Interférence de la lumière

1. Ondes cohérentes

1° Deux ondes sont *cohérentes* si leur différence de phase ne dépend pas du temps. A cette condition satisfont les ondes monochromatiques (p. 591), de fréquences égales.

Deux ondes sont *incohérentes* si leur différence de phase varie avec le temps. Les ondes monochromatiques de différentes fréquences et les ondes composées d'une série de *trains d'ondes*, commençant et s'interrompant indépendamment l'un de l'autre avec des valeurs arbitraires des phases aux moments initial et d'interruption de chaque série, sont incohérentes.

2° Lors de la superposition de deux ondes polarisées rectilignement dans un même plan, l'amplitude A de l'onde résultante est liée aux amplitudes a_1 et a_2 et aux phases Φ_1 et Φ_2 des ondes superposées au point considéré de l'onde résultante par la relation

$$A^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\Phi_1 - \Phi_2).$$

Dans le cas de superposition d'ondes incohérentes de différentes fréquences ν_1 et ν_2, l'amplitude A représente une fonction périodique du temps de période $T = \left|\frac{1}{\nu_1} - \frac{1}{\nu_2}\right|$. Si la plus petite durée possible d'observation $\tau \gg T$ (comme cela a lieu généralement dans les expériences optiques), on ne peut enregistrer par expérience que la valeur moyenne du carré de l'amplitude de l'onde résultante: $\overline{A^2} = a_1^2 + a_2^2$. Par conséquent, lors de la superposition d'ondes incohérentes on observe la sommation de leurs intensités: $I = I_1 + I_2$.

3° Dans le cas de superposition d'ondes cohérentes, polarisées rectilignement dans un même plan, $\Phi_1 - \Phi_2 = \varphi_1 - \varphi_2$, où φ_1 et

φ_2 sont les phases initiales des ondes superposées au point considéré du champ. L'amplitude A de l'onde résultante ne dépend pas du temps et varie d'un point à l'autre du champ en fonction de $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$: $A_{min} \leqslant A \leqslant A_{max}$, où

$$A_{max} = a_1 + a_2 \quad \text{quand } \Delta\varphi = 2m\pi,$$

$$A_{min} = |a_1 - a_2| \quad \text{quand } \Delta\varphi = (2m + 1)\pi,$$

où $m = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$

Les intensités maximale et minimale de l'onde résultante sont respectivement égales à

$$I_{max} \sim (a_1 + a_2)^2 \text{ et } I_{min} \sim (a_1 - a_2)^2.$$

Si $a_1 = a_2$, on a $I_{min} = 0$ et $I_{max} = 4I_1 = 4I_2$, autrement dit, I_{max} est deux fois plus grande que la somme des intensités des ondes cohérentes superposées.

4° Comme résultat de la superposition des ondes cohérentes polarisées rectilignement dans un même plan, on observe tantôt l'affaiblissement tantôt l'augmentation de l'intensité de la lumière suivant le rapport des phases des ondes lumineuses superposées. Ce phénomène est appelé *interférence de la lumière*. Le résultat de la superposition des ondes cohérentes observé sur écran, plaque photographique, etc., est appelé *image d'interférence*. Lors de la superposition d'ondes incohérentes seule l'intensification de la lumière a lieu, autrement dit, l'interférence n'est pas observée.

5° Chaque atome ou molécule de la source lumineuse émet un train d'ondes dans un laps de temps de l'ordre 10^{-8} s (p. 600). L'étendue de ce train d'ondes est de l'ordre de 10^7 longueurs d'onde, de sorte qu'en première approximation, chaque train de ce genre peut être supposé quasi monochromatique. Toutefois, lors du rayonnement spontané (p. 772) ayant lieu dans les sources lumineuses ordinaires, les ondes électromagnétiques sont émises par les atomes (les molécules) d'une substance, indépendamment les uns des autres, avec des valeurs arbitraires des phases initiales. C'est pourquoi au cours du temps τ d'observation dans les expériences optiques ($\tau \gg 10^{-8}$s) les ondes, émises de façon spontanée par les atomes (les molécules) d'une source lumineuse quelconque, sont incohérentes et ne donnent pas d'interférence lors de leur superposition.

En plus du rayonnement spontané, on peut observer le rayonnement induit, qui surgit sous l'action d'un champ électromagnétique extérieur variable. Le rayonnement induit est en cohérence avec le rayonnement monochromatique qui l'excite. Il a les mêmes

fréquence, direction de propagation et polarisation. Ces particularités du rayonnement induit sont utilisées dans les générateurs quantiques: masers et lasers (p. 772).

6° Pour obtenir des ondes lumineuses cohérentes et observer leur interférence à l'aide de sources ordinaires de rayonnement spontané, on utilise la méthode de décomposition de l'onde, émise par une seule source lumineuse, en deux ou plusieurs systèmes d'ondes, qui, après avoir passé des chemins de différentes longueurs, se superposent. Il y a dans chaque couple de tels systèmes deux trains d'ondes cohérents et polarisés identiquement qui correspondent aux mêmes radiations des atomes de la source. Le résultat de l'interférence des systèmes d'ondes indiqués dépend de la différence de phase acquise par les trains d'ondes cohérents parcourant des chemins différents de la source au point considéré de l'image d'interférence.

7° Sur la figure V.4.1. est représenté le schéma de principe des dispositifs d'interférence dans lesquels la lumière provenant de la source lumineuse S de dimension linéaire $2b$, petite devant la longueur d'onde ($2b \ll \lambda$), se décompose en deux systèmes d'ondes cohérentes à l'aide de miroirs, de prismes, etc. Ici S_1 et S_2 sont des sources d'ondes cohérentes (images réelles ou virtuelles de la source S dans le système optique du dispositif), 2ψ l'*ouverture d'interférence*, c'est-à-dire l'angle au point S entre les rayons extrêmes, qui, après avoir traversé le système optique, convergent au point M, centre de l'image d'interférence sur l'écran EE, 2ω *l'angle de convergence* des rayons au point M.

8° Généralement, S tient la forme d'une fente parallèle au plan de symétrie du système optique. Lorsque $EE \parallel S_1S_2$, l'image d'interférence représente des *franges* parallèles à la fente.

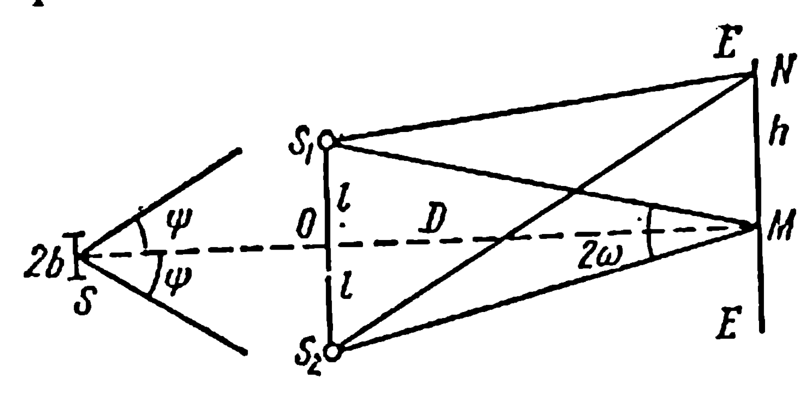


FIG. V.4.1.

En désignant $S_1S_2 = 2l$, $OM = D$ $(D \gg 2l)$, $MN = h$, la distribution des intensités dans l'image d'interférence en lumière monochromatique (p. 591) de longueur d'onde λ,

$$I = I_0 \cos^2 \frac{2\pi l}{\lambda D} h,$$

a des maximums lorsque

$$h = m \frac{\lambda D}{2l}$$

et des minimums lorsque

$$h = (2m+1) \frac{\lambda D}{4l},$$

où m est un nombre entier appelé *ordre d'interférence* et I_0 l'intensité au point M (quand $h = 0$).

9° La distance entre deux maximums ou minimums voisins $(\Delta m = 1)$ est:

$$B = \frac{D\lambda}{2l} \approx \frac{\lambda}{2\omega}.$$

La grandeur B est appelée *largeur de la frange d'interférence*. L'image d'interférence est d'autant plus grande que plus petit est $2l$ (ou ω). La *largeur angulaire des franges d'interférence* est: $\beta = \frac{B}{D} = \frac{\lambda}{2l}$.

10° Si les dimensions de la source $2b \ll \lambda$, on observe une image d'interférence nette. En pratique, $2b \gg \lambda$, et l'image d'interférence est obtenue par superposition d'ondes cohérentes issues de différents points de la source. L'image d'interférence reste nette lorsqu'est réalisée la condition approchée:

$$2b \sin\psi \leqslant \frac{\lambda}{4},$$

où 2ψ est l'ouverture d'interférence, λ la longueur d'onde.

11° Le contraste de l'image d'interférence se détermine de la formule

$$v = \frac{E_{max} - E_{min}}{E_{max} + E_{min}} = \frac{B}{2\pi b} \left| \sin \frac{2\pi b}{B} \right|,$$

où E_{max}, E_{min} sont l'éclairement de l'écran aux endroits des maximums et des minimums de l'image, c'est-à-dire aux centres des franges claires et sombres, $B = \lambda D/2l$ la largeur de la frange d'interférence (9°), $2b$ les dimensions de la source. La grandeur v est appelée

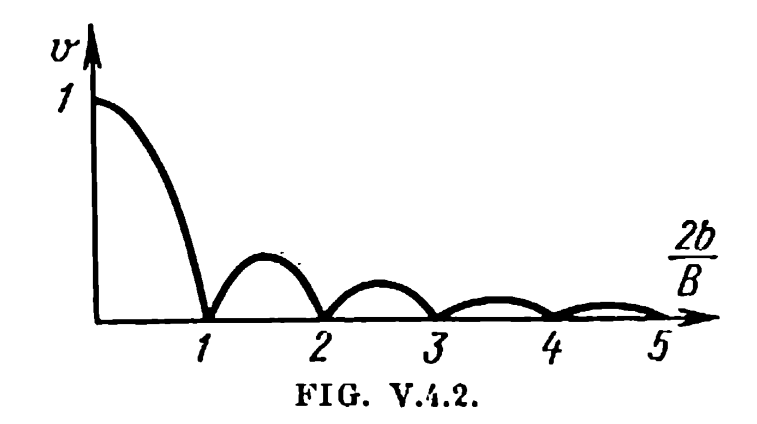


FIG. V.4.2.

facteur de visibilité des franges. La dépendance $v = f(2b/B)$ est montrée fig. V.4.2.

12° L'image d'interférence obtenue en lumière non monochromatique dont les longueurs d'onde sont comprises entre λ et $\lambda +$ $+ \Delta\lambda$, est floue dans le cas où avec les maximums d'ordre m pour un rayonnement de longueur d'onde $\lambda + \Delta\lambda$ coïncident les maximums d'ordre $(m + 1)$ pour un rayonnement de longueur d'onde λ:

$$(m + 1)\lambda = m(\lambda + \Delta\lambda).$$

Pour l'observation d'une interférence d'ordre m doit être satisfaite la condition

$$\Delta\lambda < \frac{\lambda}{m}.$$

Plus grand est l'ordre d'interférence m à observer, plus monochromatique doit être la lumière. Même pour une lumière de spectre linéaire $\Delta\lambda$ ne peut être plus petite que la longueur naturelle de la raie spectrale $\Delta\lambda_{nat}$ (p. 707). Généralement, en raison de l'élargissement par choc et par effet Doppler $\Delta\lambda \gg \Delta\lambda_{nat}$ (pp. 707-708).

2. Chemin optique

1° On appelle *chemin optique* le produit de la longueur géométrique d du chemin, parcouru par l'onde lumineuse dans un milieu donné, par l'indice de réfraction absolu n de ce milieu (p. 612)

$$s = nd.$$

2° La *différence de phase* $\Delta\varphi$ de deux ondes cohérentes issues d'une même source, l'une desquelles parcourt un chemin de longueur d_1 dans le milieu avec l'indice de réfraction absolu n_1 et l'autre

parcourt un chemin de longueur d_2 dans un milieu avec l'indice de réfraction absolu n_2:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(s_2 - s_1),$$

où $s_2 = n_2 d_2$, $s_1 = n_1 d_1$, λ est la longueur d'onde de la lumière dans le vide.

3° Si les chemins optiques parcourus par deux rayons sont égaux: $s_1 = s_2$, ces chemins sont dits *tautochrones* (n'introduisant pas de différences de phase). Dans les systèmes optiques donnant des images stigmatiques (p. 652) de la source lumineuse, tous les chemins des rayons issus d'un même point de la source et convergeant au point correspondant de l'image satisfont à la condition de tautochronisme.

4° La grandeur $\Delta s = s_1 - s_2$ est appelée *différence de marche optique* de deux rayons. La différence de marche Δs est liée à la différence de phase $\Delta\varphi$ de la manière suivante:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta s.$$

5° Lorsque $\Delta s = \lambda/2$, la différence de phase $\Delta\varphi = \pi$. A l'allongement (ou au raccourcissement) du chemin optique d'une des ondes de $\lambda/2$ correspond un retard (ou un devancement) de la première onde de π. Lors de la superposition de ces deux ondes, leurs amplitudes se retranchent l'une de l'autre et l'égalité des amplitudes des deux ondes étant donnée, l'amplitude de l'onde résultante est nulle.

6° L'observation de l'interférence n'est possible que pour des différences de marche Δs non trop grandes. Si $\Delta s \gg \tau c$ (τ est la durée moyenne d'une émission de la lumière par un atome de la source, c la vitesse de la lumière dans le vide et τc l'étendue moyenne du train d'ondes dans le vide), les ondes superposées sont notoirement incohérentes et n'interfèrent pas.

La condition d'observation de l'interférence pour une différence de marche Δs ($\Delta s \ll \tau c$) est la suivante:

$$\Delta\lambda < \frac{\lambda^2}{\Delta s},$$

autrement dit, le degré de monochromatisme de la lumière doit être suffisamment élevé pour réaliser l'interférence aux grandes valeurs de Δs.

3. Interférence dans les lames minces

1° Dans le cas d'observation de l'interférence d'une lumière monochromatique, réfléchie par une lame (fig. V.4.3) à faces planes parallèles dans le vide, la différence de marche optique des rayons interférents constitue:

$$\Delta s = n(AD + DC) - (BC) + \frac{\lambda}{2} = 2h\sqrt{n^2 - \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2},$$

$$\Delta s = 2hn \cos r + \frac{\lambda}{2},$$

où h est l'épaisseur de la lame, n son indice de réfraction absolu, i l'angle d'incidence des rayons sur la lame, r l'angle de réfraction des rayons dans la lame. La différence de marche complémentaire $\lambda/2$ est liée à la réflexion de la lumière sur la face antérieure de la lame (milieu optiquement plus dense), c'est-à-dire à une variation de la phase de l'onde de π lors de réflexion.

2° Les maximums et les minimums de l'image d'interférence formée par les ondes cohérentes réfléchies sur les deux faces de la lame doivent satisfaire aux conditions suivantes:

$$2h\sqrt{n^2 - \sin^2 i} = \frac{k\lambda}{2}.$$

Ici $k=2m$ (m est un nombre entier) pour les minimums et $k=2m+$ $+ 1$ pour les maximums. Si la réflexion sur les deux faces de la lame s'opère avec des pertes de $\lambda/2$ (ou sans elles), l'image d'interférence se déplace d'une demi-frange, autrement dit, $k = 2m$ correspond aux maximums d'interférence et $k = (2m + 1)$ aux minimums.

3° Lors de l'éclairement d'une lame à faces planes parallèles par un faisceau parallèle de rayons de lumière blanche, en lumière réfléchie la lame acquiert une certaine coloration. En vertu de la condition p. 627, 6°, l'interférence en lumière blanche ne peut être observée que dans des lames (pellicules) très minces, dont l'épaisseur ne dépasse pas 0,01 mm. En lumière monochromatique, on peut observer l'interférence avec des lames beaucoup plus épaisses.

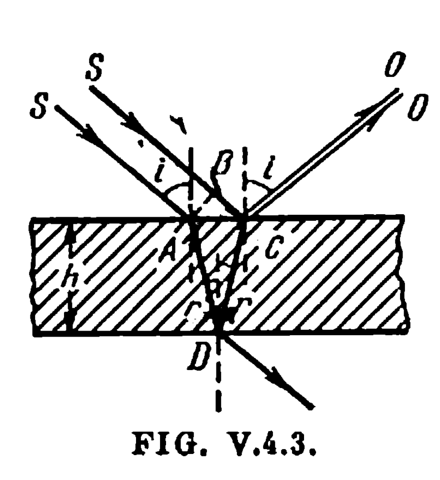


FIG. V.4.3.

4° Si un faisceau parallèle ou presque parallèle ($i \approx$ idem) de rayons de lumière monochromatique tombe sur une lame très mince d'épaisseur h, non uniforme en différents points, des franges d'inter-

férence claires et sombres apparaissent, en lumière réfléchie, sur la surface supérieure de la lame. Ces franges sont appelées *franges d'égale épaisseur*, chacune d'elles passant par des points avec des mêmes valeurs de h. Des franges d'égale épaisseur, localisées sur la surface de la lame mince, peuvent être observées également sur un écran si l'on projette sur celui-ci la face supérieure de la lame mince à l'aide d'une lentille convergente. On observe, en lumière blanche, un système de franges d'interférence colorées d'égale épaisseur.

5° Lors de l'interférence dans un coin transparent, les franges d'égale épaisseur sont parallèles à l'arête du coin. Pour un angle d'incidence $i = 0$ la largeur des franges d'interférence constitue:

$$B = \frac{\lambda}{2n},$$

où α est l'angle au sommet du coin ($\alpha \ll 1$ rd), n l'indice de réfraction absolu du matériau constituant le coin.

Dans le cas d'une source lumineuse étendue, l'image d'interférence est observée seulement dans la partie du coin qui est proche de son sommet pour lequel $2\, hi\psi \ll \lambda$, où i est l'angle d'incidence, ψ l'angle sous lequel apparaît la source étendue du point du coin correspondant à l'épaisseur h donnée.

6° Lors de l'interférence de la lumière dans la lame d'air entre le miroir plan noir et la lentille plan-convexe accolée à celui-ci (fig. V.4.4, la lumière est normale à la surface plane de la lentille qui est parallèle au plan du miroir noir) on observe un système de franges d'égale épaisseur dans la lame d'air, ayant la forme d'anneaux concentriques *(anneaux de Newton)*. Les centres des anneaux coïncident avec le point de contact de la lentille du miroir. En lumière monochromatique réfléchie, les rayons des anneaux clairs et sombres sont égaux à

$$\rho_{\text{clair}} = \sqrt{(2m+1)R\frac{\lambda}{2}} \quad \text{et}$$

$$\rho_{\text{sombre}} = \sqrt{mR\lambda},$$

où R est le rayon de courbure de la face inférieure de la lentille, λ la longueur d'onde de la lumière dans le vide (l'air), $m = 0, 1, 2, \ldots$ Au centre de l'image d'interférence, on observe une tache sombre.

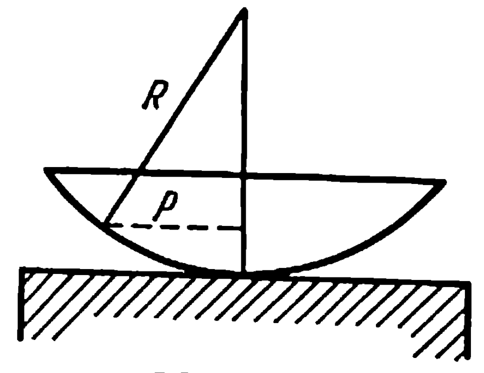


FIG. V.4.4.

En lumière blanche, à différentes longueurs d'onde λ correspondent différents ρ et l'on obtient un système d'anneaux colorés avec une superposition notable de certains sur d'autres; aux m importants l'image d'interférence n'est pas discernable à l'œil nu.

7° Lors de l'éclairement d'une lame à faces planes parallèles par un faisceau de lumière convergent ou divergent, à chaque valeur de l'angle d'incidence i correspond une valeur déterminée de la différence de marche optique Δs. L'image d'interférence est observée dans le plan focal de la lentille convergente, établie sur le chemin de la lumière réfléchie par la lame. En lumière monochromatique, l'image d'interférence a la forme de franges alternativement lumineuses et sombres. Chacune de ces franges correspond à une valeur déterminée de l'angle d'incidence i, on les appelle *franges d'égale inclinaison*. Les franges d'égale inclinaison sont localisées à l'infini. Lors de l'éclairement d'une lame à faces planes parallèles par la lumière blanche les franges d'égale inclinaison sont disposées différemment suivant λ et sont colorées. Avec l'augmentation de l'ordre d'interférence m l'image devient floue.

8° Dans le cas d'interférence de N ondes cohérentes de même amplitude A_0 et même décalage de phase $\Delta\varphi_0$, entre la i-ième onde et la $(i-1)$-ième onde ($\Delta\varphi_0$ ne dépend pas de i), l'amplitude A et l'intensité I de l'onde résultante sont égales à

$$A = A_0 \left| \frac{\sin \frac{N\Delta\varphi_0}{2}}{\sin \frac{\Delta\varphi_0}{2}} \right|, \quad I = I_0 \frac{\sin^2 \frac{N\Delta\varphi_0}{2}}{\sin^2 \frac{\Delta\varphi_0}{2}},$$

où I_0 est l'intensité de chacune des ondes qui interfèrent.

Les valeurs $\Delta\varphi_0 = \pm 2m\pi$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ correspondent aux *maximums principaux* (m est l'*ordre du maximum principal*): $A = NA_0$. L'intensité du maximum principal est proportionnelle au carré du nombre des ondes qui interfèrent $I = N^2 I_0$.

Les valeurs $\Delta\varphi_0 = \pm \frac{p}{N} 2\pi$, où p prend des valeurs positives entières quelconques, excepté $0, N, 2N$, etc., correspondent aux minimums d'interférence: $A = I = 0$. Entre chaque couple de minimums voisins se trouve un maximum (soit principal, soit *secondaire*, beaucoup plus faible).

CHAPITRE 5

Diffraction de la lumière

1. Principe de Huyghens-Fresnel

1° On appelle *diffraction de la lumière* l'ensemble des phénomènes qui sont dus à la nature ondulatoire de la lumière et sont observés lors de sa propagation dans un milieu avec des hétérogénéités très accusées (par exemple lors de son passage à travers des orifices faits dans des écrans opaques, au voisinage des frontières des corps opaques, etc.). Dans un sens plus étroit, on comprend sous diffraction le phénomène de contournement de petits obstacles par la lumière, autrement dit, les écarts des lois de l'optique géométrique.

Mathématiquement, la résolution rigoureuse des problèmes de diffraction à l'aide de l'équation des ondes (p. 591) pour les conditions aux limites, dépendant du caractère des obstacles, présente en général de grandes difficultés. Aussi utilise-t-on des méthodes de résolution approximatives.

2° *Principe de Huyghens:* la position du front d'onde en propagation peut être représentée à chaque instant par l'enveloppe de toutes les ondes secondaires *(ondelettes)*. Les points atteints par le front d'onde primaire à l'instant antérieur constituent les sources des ondelettes. On suppose dans ce cas que ces dernières ne rayonnent «qu'en avant», c'est-à-dire dans les directions qui forment des angles aigus avec la direction de la normale extérieure au front d'onde primaire.

Le principe de Huyghens permet d'expliquer les lois de la réflexion et de la réfraction de la lumière, mais n'est pas suffisant pour expliciter les phénomènes de diffraction.

3° Soit S une source lumineuse et σ une surface fermée arbitraire entourant S.

Principe de Huyghens-Fresnel: en tout point se trouvant en dehors de la surface σ, l'onde lumineuse excitée par la source S peut être représentée comme le résultat de la superposition d'ondelettes cohérentes «émises» par des sources élémentaires imaginaires, réparties de façon continue sur la surface auxiliaire σ. Autrement dit, au-delà de la surface σ, l'onde primaire réelle qui se propage peut être remplacée par un système d'ondelettes imaginaires cohérentes, interférant lors de leur superposition.

L'amplitude, la phase initiale et le diagramme directionnel du rayonnement des ondelettes, «excitées» par l'élément $d\sigma$ de surface auxiliaire, dépendent des caractéristiques de l'onde primaire (de ses amplitude, phase et direction de propagation) aux points de $d\sigma$. Généralement, on fait coïncider la surface auxiliaire σ avec la position d'une des surfaces d'onde de l'onde primaire en un certain instant, de sorte que toutes les phases initiales de toutes les ondelettes sont les mêmes. Dans ce cas, l'amplitude de l'ondelette «excitée» par l'élément de surface d'onde $d\sigma$ est proportionnelle à l'expression $\varphi \frac{A}{r} d\sigma$, où A est l'amplitude de l'onde primaire aux points de l'élément $d\sigma$, r la distance de $d\sigma$ au point considéré M du champ situé au-delà de la surface σ, φ une fonction inconnue de l'angle α formé par la normale extérieure à l'élément $d\sigma$ de la surface d'onde et le rayon vecteur $\mathbf{r}$ mené de $d\sigma$ au point M. D'après l'hypothèse de Fresnel, la fonction φ est maximale pour $\alpha = 0$ et décroît lentement avec l'accroissement de α, s'annulant quand $\alpha \geqslant \frac{\pi}{2}$ [1].

Pour obtenir une valeur juste de la phase de l'onde au point M, il est nécessaire d'admettre que la phase des ondelettes dépasse de $\pi/2$ la phase de l'onde primaire aux points de la surface σ.

4° Si, entre la source d'ondes lumineuses et le point d'observation, on met un écran opaque percé de trous, les amplitudes des ondelettes sur sa surface sont alors admises nulles et les amplitudes dans les trous égales aux amplitudes qu'auraient ces ondelettes s'il n'y avait pas d'écran. De ce fait on suppose que le matériau constituant l'écran ne joue aucun rôle. Cette simplification est permise si les dimensions des trous sont grandes devant la longueur d'onde λ. L'amplitude de l'onde traversant l'écran est déterminée par calcul au point d'observation de l'interférence des ondelettes émanant des sources secondaires disposées dans les trous de l'écran.

---

[1] En réalité, comme l'a montré Kirchhoff, la fonction $\varphi \sim (1 + \cos \alpha)$, c'est-à-dire devient nulle pour $\alpha = \pi$. Mais l'angle α étant généralement petit dans les problèmes de diffraction, cette précision est de peu d'importance.

5° Dans certains problèmes de diffraction à symétrie axiale, le calcul de l'interférence des ondelettes peut être très simplifié à l'aide d'une méthode géométrique de division du front d'onde en zones annulaires appelées *zones de Fresnel*. La division en zones est effectuée de manière que la différence de marche optique des ondes issues des frontières analogues (internes ou externes) de chaque couple de zones voisines jusqu'au point considéré T soit égale à $\lambda/2$. Les ondelettes issues des points analogues de deux zones voisines arrivent en T dans des phases contraires et s'affaiblissent mutuellement lors de la superposition.

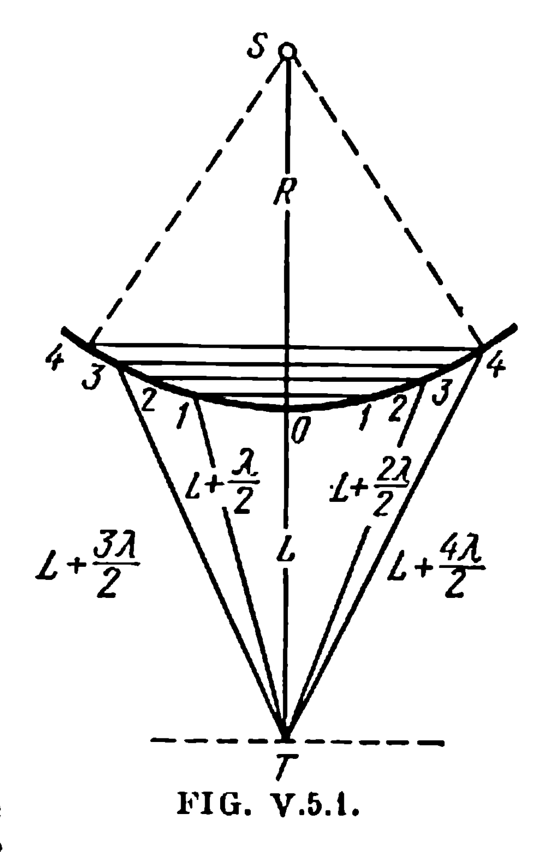


FIG. V.5.1.

La construction des zones de Fresnel pour le cas d'une onde sphérique excitée par la source S est montrée fig. V.5.1. La portion *101* de la surface d'onde est appelée première zone (centrale) de Fresnel, la portion annulaire *21*, seconde zone, etc. Etant donné que R et $L \gg \lambda$ pour des i non trop grands, les surfaces des i premières zones de Fresnel sont égales:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \ldots = \sigma_i = \frac{\pi R L \lambda}{R + L}.$$

Dans le cas d'un front d'onde plan

$$\sigma_1 = \ldots = \sigma_i = \pi L \lambda.$$

2. Composition graphique des amplitudes des ondelettes

1° On calcule l'amplitude de l'onde au point d'observation en se basant sur la méthode graphique des diagrammes vectoriels de la composition des oscillations cohérentes (p. 117) dirigées dans le même sens et excitées en ce point par toutes les sources élémentaires des ondelettes. A l'intérieur de chaque zone de Fresnel l'angle α formé par la normale extérieure au front et la direction au point d'observation ainsi que la distance r jusqu'au point d'observation varient de façon insignifiante. C'est pourquoi le diagramme vecto-

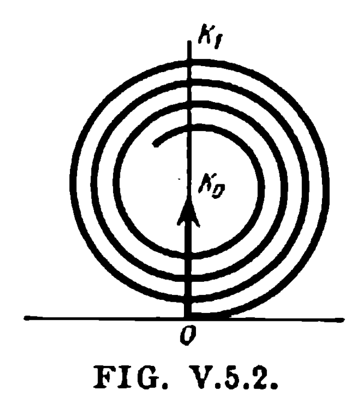


FIG. V.5.2.

riel correspondant à une zone a une forme d'une demi-circonférence. L'amplitude résultante des ondelettes provenant de toutes les portions élémentaires de la zone est égale au diamètre de cette demi-circonférence.

2° L'amplitude résultante A_i des ondelettes issues de la i-ième zone est directement proportionnelle à la surface de cette zone. Pour les zones d'aire égale (fig. V.5.1) l'amplitude A_i diminue à mesure qu'augmente l'ordre i de la zone par suite de l'accroissement de l'angle α et de la distance r: $A_1 > A_2 > A_3 > \ldots$ Dans ce cas, le diagramme vectoriel pour le système de zones a la forme d'une spirale s'enroulant lentement (fig. V.5.2).

3° Si une onde plane ou sphérique se propage dans un milieu homogène (sans obstacles), de sorte que le front d'onde est entièrement ouvert, son amplitude au point T (fig. V.5.1) est déterminée par le segment OK_0 sur la figure V.5.2. Ce segment est égal à la moitié de l'amplitude OK_1 correspondant à l'action de la zone centrale de Fresnel seulement. Le rayon de la zone centrale est négligeable devant la distance $ST = R + L$. C'est pourquoi on peut admettre que dans un milieu homogène, la lumière issue de la source S se propage au point T le long du rayon ST, autrement dit, de façon rectiligne.

4° Il est possible d'augmenter de façon notable l'amplitude et l'intensité de la lumière au point T en recouvrant à l'aide d'un dispositif spécial appelé *réseau zoné* les zones paires de Fresnel, laissant ouvertes les zones impaires (ou inversement). Si le nombre total de zones de Fresnel sur le réseau zoné est égal à $2k$, l'amplitude A de l'onde lumineuse au point d'observation T est $A = A_1 + A_3 + \ldots$ $\ldots + A_{2k-1}$. Pour des k non trop grands $A \approx kA_1$, c'est-à-dire elle est $2k$ fois plus grande que dans le cas de propagation libre de la lumière de la source au point T.

5° Pour déterminer la diffraction de la lumière par le bord rectiligne d'un écran plan ou par une fente rectiligne, la méthode des zones de Fresnel n'est pas commode, étant donné qu'alors ces zones sont en partie recouvertes par l'écran. Dans ce cas, on découpe le front d'onde incidente en bandes d'égale largeur parallèles au bord rectiligne de l'écran ou de la fente. Le calcul de la diffraction peut

être effectué graphiquement à l'aide de la *spirale de Cornu* (fig. V.5.3) dont l'équation paramétrique est de la forme:

$$u = \int_0^v \cos \frac{\pi \xi^2}{2} d\xi \text{ et}$$

$$w = \int_0^v \sin \frac{\pi \xi^2}{2} d\xi,$$

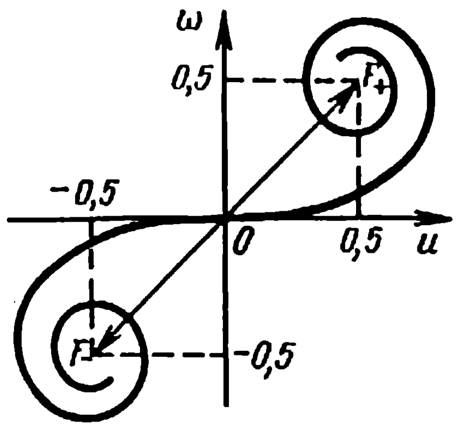


FIG. V.5.3.

où le paramètre $v = \sqrt{\frac{2}{\lambda L}}\,(x - x_0)$. Ici λ est la longueur d'onde, L la distance du plan de l'écran au point T (on suppose que l'onde est normale au plan de l'écran), x_0 la coordonnée du point d'observation T, x la coordonnée courante des points du front d'onde, notons que l'axe Ox est mené dans le plan de l'écran perpendiculairement à son bord.

La spirale de Cornu est constituée de deux branches symétriques par rapport à l'orgine des coordonnées ($v = 0$) et s'enroulant asymptotiquement sur le pôle F_+ (0,5; 0,5) et le pôle F_- (− 0,5; − 0,5) respectivement lorsque $v \to \pm \infty$.

L'amplitude A des oscillations au point T, excitées par la portion du front d'onde limitée par les droites $x = x_1$ et $x = x_2$, est égale à $A_0 \cdot B_1B_2/F_-F_+$, où A_0 est l'amplitude des oscillations en T pour un front d'onde entièrement ouvert et B_1B_2 la longueur du segment réunissant deux points de la spirale de Cornu, correspondant aux valeurs $v_1 = \sqrt{\frac{2}{\lambda L}}\,(x_1 - x_0)$ et $v_2 = \sqrt{\frac{2}{\lambda L}}\,(x_2 - x_0)$. A la limite, quand $x_1 \to -\infty$ et $x_2 \to \infty$ (front d'onde entièrement ouvert), $B_1B_2 = F_-F_+ = \sqrt{2}$.

Pour des valeurs fixées x_1 et x_2 les grandeurs v_1 et v_2 dépendent de x_0, c'est-à-dire de la position du point T sur le plan d'observation de l'image de diffraction, c'est pourquoi les segments B_1B_2 correspondant à différents x_0 caractérisent l'*amplitude relative* A/A_0 en différents points de l'image de diffraction.

3. Diffraction de Fresnel

1° On appelle *diffraction de Fresnel* les effets de diffraction dans lesquels il est impossible de négliger la courbure des surfaces d'onde des ondes incidente et diffractée (ou de l'onde diffractée seu-

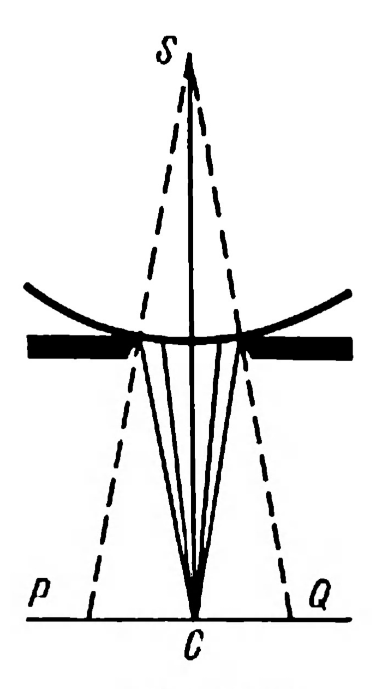


FIG. V.5.4.

lement). La diffraction de Fresnel est réalisée dans les cas où la source lumineuse et l'écran (ou seulement l'écran) servant à l'observation de l'image de diffraction se trouvent à des distances *finies* de l'obstacle responsable de la diffraction. Au cours de la diffraction de Fresnel on obtient sur l'écran l'«image de diffraction» de l'*obstacle*. Le calcul analytique de ces effets est généralement difficile. Dans les cas les plus simples, considérés ci-dessous, on détermine l'aspect de l'image de diffraction par la méthode des zones de Fresnel ou à l'aide de la spirale de Cornu.

2° *Diffraction par l'ouverture circulaire d'un écran opaque* (fig. V.5.4). L'image de diffraction sur un plan PQ, parallèle à l'écran, a la forme d'anneaux de diffraction concentriques, alternativement clairs et sombres. Les centres des anneaux sont situés au point O d'intersection du plan PQ et de la droite menée de la source S à travers le centre de l'ouverture. Si, pour O, le nombre de zones de Fresnel comprises dans l'ouverture est impair $(2k + 1)$, l'amplitude en O est plus grande que s'il n'existait pas l'écran:

$$A \approx \frac{1}{2}(A_1 + A_{2k+1}),$$

où A_1 et A_{2k+1} sont les amplitudes correspondant à l'action des 1-ière et $(2k + 1)$-ième zones de Fresnel. Si le nombre de zones est pair $(2k)$, l'amplitude en O est plus petite qu'en l'absence de l'écran: $A \approx \frac{1}{2}(A_1 - A_{2k})$. L'aspect des images de diffraction sur le plan PQ pour ces deux cas extrêmes est montré fig. V.5.5.

3° *Diffraction par un petit écran circulaire* (fig. V.5.6, *a*). L'intensité de la lumière au point O situé en face du centre de l'écran est égale au quart de l'intensité de l'onde émanant de la première zone ouverte. Si l'écran n'est pas grand $(d \sim \sqrt{2L\lambda})$, l'intensité de la lumière en O est pratiquement la même que si l'écran n'existait pas. L'image de diffraction sur le plan PQ est représentée fig. V.5.6, *b*.

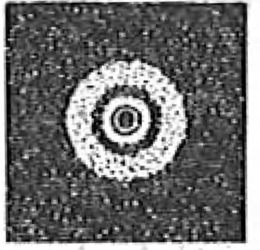
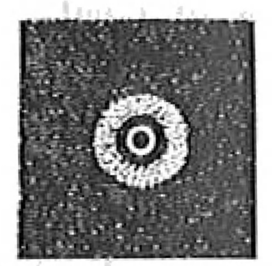



FIG. V.5.5.

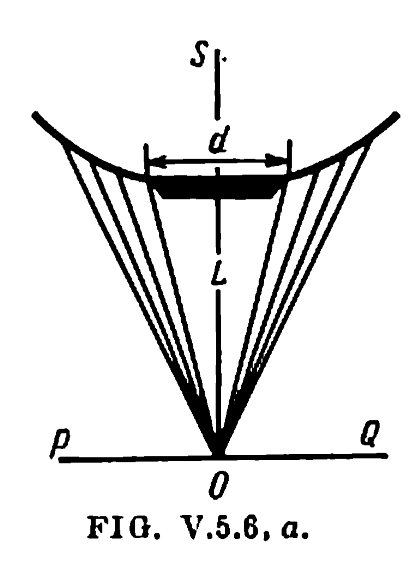
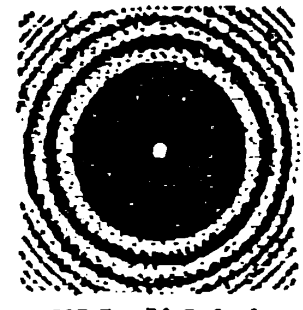


FIG. V.5.6, *a*.


FIG. V.5.6, *b*.

4° *Diffraction par le bord rectiligne d'un écran plan* (fig. V.5.7, *a*). Le calcul de l'image de diffraction peut être effectué à l'aide de la spirale de Cornu. L'amplitude au point T_0 situé en face du bord de l'écran ($B_1B_2 = OF_+ = 0,5\ F_-F_+$) est deux fois plus petite qu'en l'absence de l'écran. L'intensité de la lumière est respectivement quatre fois plus petite. La distribution des intensités sur le plan d'observation, parallèle au plan de l'écran, est montrée fig. V.5.7, *b*.

5° *Diffraction par une fente rectiligne* (fig. V.5.8,*a*). L'aspect de l'image de diffraction dépend de la valeur du *paramètre d'onde* $p = \sqrt{\lambda L}/a$, où a est la largeur de la fente, L la distance entre le plan de la fente et le plan d'observation qui lui est parallèle, λ la longueur d'onde.

Si $p \ll 1$ (fente large), l'amplitude de l'onde au point d'observation situé en face du milieu de la fente est déterminée par la dis-

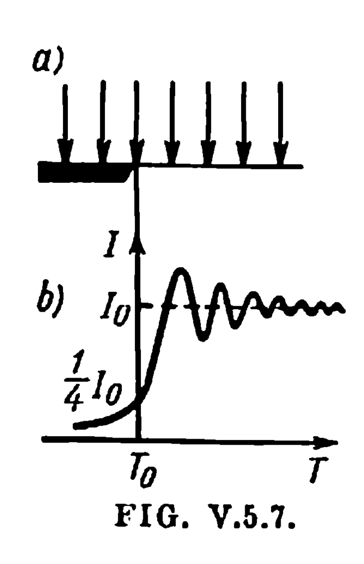


FIG. V.5.7.

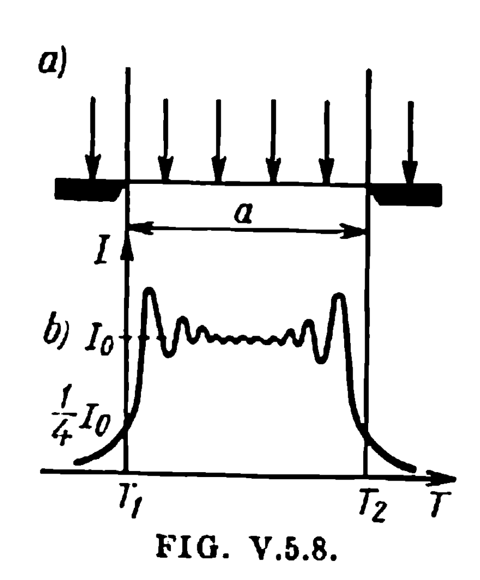


FIG. V.5.8.

tance F_-F_+ entre les pôles de la spirale de Cornu: $A = A_0$, autrement dit, elle est la même que si l'écran n'existait pas. La distribution des intensités sur le plan d'observation est montrée fig. V.5.8, *b*. Au voisinage des points T_1 et T_2 situés en face des bords de la fente, elle est semblable à la distribution des intensités au voisinage du point T_0, lors de diffraction par le bord d'un écran semi-infini (fig. V.5.7,*b*).

Lorsque $p \sim 1$, les oscillations de l'intensité embrassent tout le domaine T_1T_2 correspondant à l'image de la fente en optique géométrique et sont observées également dans le domaine de l'ombre géométrique (à la différence de la décroissance monotone de l'intensité au voisinage des bords de l'ombre lorsque $p \ll 1$). Suivant la valeur de p il peut y avoir, au milieu de l'image de diffraction, aussi bien un maximum qu'un minimum d'intensité.

Lorsque $p \gg 1$, l'image de diffraction a le même aspect que lors de la diffraction de Fraunhofer par la même fente (fig. V.5.10). En face du milieu de la fente se trouve le maximum d'intensité principal, qui est d'autant plus «flou» que plus étroite est la fente (fig. V.5.11).

6° *Diffraction par un long écran rectangulaire* (fig. V.5.9, *a*). L'amplitude relative A/A_0 (p. 635) au point arbitraire T du plan d'observation, parallèle à l'écran, peut être calculée à l'aide de la spirale de Cornu: $\frac{A}{A_0} = \frac{|\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2|}{F_- F_+}$. Ici $\mathbf{a}_1$ et $\mathbf{a}_2$ sont des vecteurs menés aux pôles de la spirale de Cornu F_+ et F_- à partir des points de la spirale, correspondant aux valeurs v_1 et v_2 du paramètre v (p. 635) pour les bords de l'écran.

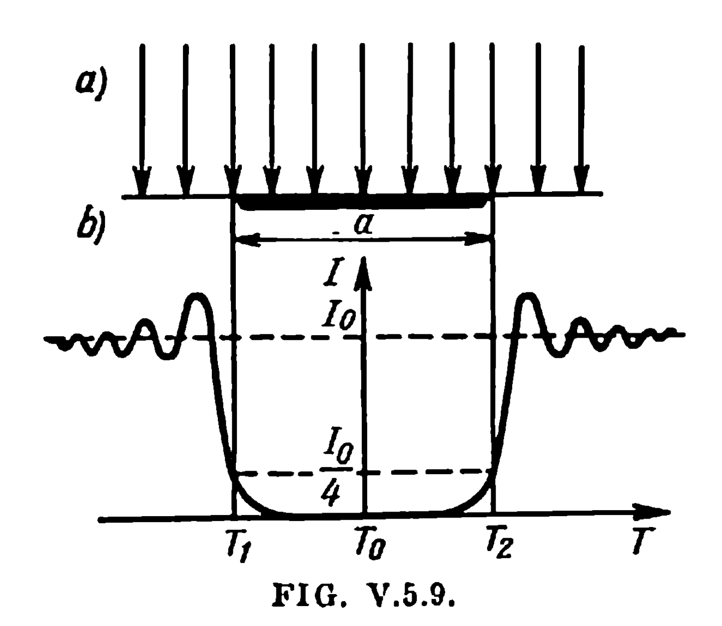


FIG. V.5.9.

Si le paramètre d'onde $p = \frac{\sqrt{\lambda L}}{a} \ll 1$ (*a* est la largeur de l'écran), on a au voisinage des frontières de l'ombre géométrique provenant de l'écran soit $\mathbf{a}_1 \approx 0$, soit $\mathbf{a}_2 \approx 0$. C'est pourquoi il se forme derrière l'écran un domaine d'ombre sur les frontières duquel sont observées des franges de diffraction (fig. V.5.9,*b*) semblables aux franges obtenues du bord d'un écran semi-infini (4°).

Si $p \gg 1$, un système de franges alternativement claires et sombres est observé derrière l'écran, une frange claire étant toujours en face du milieu de l'écran.

7° Si la forme des bords des écrans et des ouvertures faites dans ceux-ci diffère d'une forme géométrique parfaite, les lois de la diffraction décrites 2°-6° ne sont pas réalisées. L'écart par rapport à ces lois est déterminé par la grandeur $\Delta/\sqrt{L\lambda}$, où Δ est la longueur de la base et la hauteur des saillies sur les bords de l'écran, L la distance de l'écran au point d'observation, λ la longueur d'onde:

a) $\frac{\Delta}{\sqrt{L\lambda}} \ll 1$, l'image de diffraction n'est pas pratiquement altérée;

b) $\frac{\Delta}{\sqrt{L\lambda}} \sim 1$, l'image de diffraction s'efface et peut disparaître;

c) $\frac{\Delta}{\sqrt{L\lambda}} \gg 1$, les franges ou les anneaux de diffraction reproduisent la configuration des saillies et des cavités existant sur les bords extérieurs des écrans ou sur les bords des ouvertures faites dans ceux-ci.

4. Diffraction de Fraunhofer

1° On appelle *diffraction de Fraunhofer* la diffraction des ondes planes, autrement dit, les effets de diffraction dans lesquels la source lumineuse et le point d'observation sont infiniment éloignés de l'obstacle responsable de la diffraction. Pour réaliser pratiquement ce type de diffraction, on place la source lumineuse au foyer de la lentille convergente et l'on observe l'image de diffraction dans le plan focal de la deuxième lentille convergente établie derrière l'obstacle. La figure de diffraction représente l'«image de diffraction» de la *source de lumière*. Généralement, on calcule ce type de diffraction par les procédés analytiques.

2° Deux obstacles (écrans) sont dits *écrans complémentaires* si aux ouvertures de l'un correspondent des régions opaques de l'autre,

ayant les mêmes formes, dimensions et disposition, et inversement.

Théorème (principe) de Babinet: lors de diffraction de Fraunhofer par un écran quelconque, l'intensité de la lumière diffractée dans une direction quelconque ne coïncidant pas avec la direction de propagation de l'onde primaire plane incidente sur l'écran doit être la même que lors de diffraction par un écran complémentaire.

3° *Diffraction par une longue fente étroite.* La lumière monochromatique est normale au plan de la fente. L'amplitude de l'onde au point d'observation, foyer latéral de la lentille convergente, est égale à

$$A(\varphi) = A_0 \frac{\sin\left(\frac{kX}{2}\sin\varphi\right)}{\frac{kX}{2}\sin\varphi} = A_0 \frac{\sin\left(\frac{\pi X}{\lambda}\sin\varphi\right)}{\frac{\pi X}{\lambda}\sin\varphi},$$

où φ est l'*angle de diffraction* compté à partir de la normale extérieure au front d'onde incidente, c'est-à-dire à partir de la normale au plan de la fente, $k = 2\pi/\lambda$ le nombre d'onde, X la largeur de la fente, A_0 l'amplitude au centre de l'image de diffraction (pour $\varphi = 0$).

Si l'angle φ est petit, on a:

$$A(\varphi) = A_0 \frac{\sin\frac{\pi X}{\lambda}\varphi}{\frac{\pi X}{\lambda}\varphi}.$$

Condition des minimums:

$$A(\varphi) = 0 \text{ lorsque } \sin\varphi = \pm\frac{n\lambda}{X}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Condition des maximums:

pour un maximum d'ordre zéro $\varphi = 0$ et $A = A_0$;

pour les autres maximums $\sin\varphi = \pm\frac{k_m}{X}\lambda$, où k_m sont les racines de l'équation $\operatorname{tg} k_m\pi = k_m$, $m = 1, 2, \ldots$ est l'ordre du maximum; $k_1 = 1{,}43$, $k_2 = 2{,}46$, $k_3 = 3{,}47$, $k_4 = 4{,}48$, ...

Condition approchée pour tous les maximums, excepté le maximum d'ordre zéro:

$$\sin\varphi = \pm(2m+1)\frac{\lambda}{2X} \quad (m = 1, 2, 3, \ldots).$$

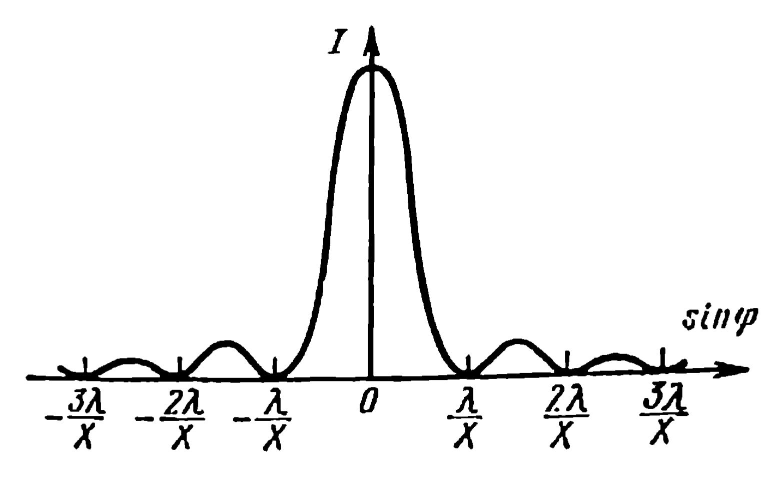


FIG. V.5.10.

4° Distribution des intensités ($I \sim A^2$):

$$I(\varphi) = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi X}{\lambda}\sin\varphi\right)}{\left(\frac{\pi X}{\lambda}\sin\varphi\right)^2}.$$

Cette distribution est montrée fig. V.5.10.

L'intensité relative des maximums d'ordre $m \geqslant 1$ satisfait à la formule approchée:

$$\frac{I_m}{I_0} = \frac{4}{\pi^2(2m+1)^2}.$$

5° La distance séparant le centre de l'image de diffraction du premier minimum augmente avec la diminution de X. Ceci étant, le maximum central d'intensité s'élargit et diminue en hauteur (fig. V.5.11). Quand $X = \lambda$, le premier maximum s'éloigne à l'infini.

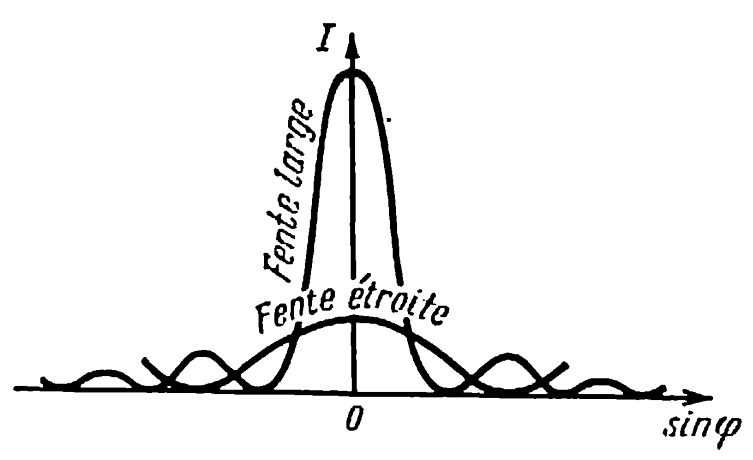


FIG. V.5.11.

L'intensité baisse graduellement du centre du plan d'observation vers ses bords. Avec l'augmentation de X l'image de diffraction se resserre et le maximum principal est plus en relief. Quand $X \gg \lambda$, on obtient sur l'écran l'image nette de la source lumineuse conformément aux lois de l'optique géométrique.

6° *Diffraction par une ouverture rectangulaire* de largeur X et de hauteur Y. On donne la direction de propagation de la lumière diffractée à l'aide de deux angles α et β formés par cette direction avec les axes Ox et Oy, menés parallèlement aux côtés X et Y de l'ouverture respectivement. Dans le cas d'incidence normale de la lumière sur le plan de la fente, les directions correspondant aux minimums d'intensité de la lumière diffractée satisfont aux conditions:

$$X \sin \varphi = \pm m\lambda \text{ et } Y \sin \psi = \pm n\lambda,$$

où $\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha$, $\psi = \frac{\pi}{2} - \beta$, m et n sont des nombres entiers positifs quelconques. La distribution des intensités est la suivante:

$$I(\varphi, \psi) = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi X}{\lambda} \sin \varphi\right)}{\left(\frac{\pi X}{\lambda} \sin \varphi\right)^2} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi Y}{\lambda} \sin \psi\right)}{\left(\frac{\pi Y}{\lambda} \sin \psi\right)^2}.$$

L'intensité dans les directions pour lesquelles $\sin \varphi \approx \varphi$, $\sin \psi \approx \psi$:

$$I(\varphi, \psi) = I_0 \frac{\sin^2 \frac{\pi X}{\lambda} \varphi}{\left(\frac{\pi X}{\lambda} \varphi\right)^2} \frac{\sin^2 \frac{\pi Y}{\lambda} \psi}{\left(\frac{\pi Y}{\lambda} \psi\right)^2},$$

où I_0 est l'intensité de la lumière qui se propage suivant la direction déterminée par les angles $\varphi = 0$, $\psi = 0$.

7° *Diffraction par une ouverture circulaire.* Dans le cas d'une source lumineuse ponctuelle, lors de l'incidence normale de la lumière sur le plan de l'ouverture, l'image de diffraction représente l'alternance d'anneaux clairs et sombres; la distribution des intensités est montrée fig. V.5.12. Les positions des maximums et des minimums satisfont à la condition

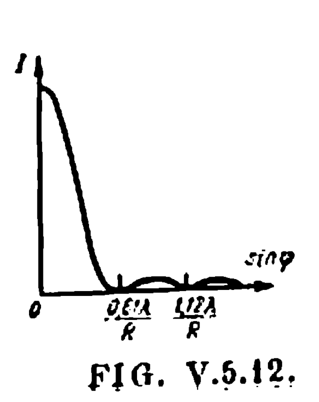


FIG. V.5.12.

$$\sin \varphi = \frac{k_m}{R} m\lambda,$$

où $\varphi = \text{arc tg } (\rho/F)$ est l'angle de diffraction, F la distance focale de la lentille, ρ la distance

séparant le centre de l'image de diffraction du point considéré de cette image (le rayon de l'anneau), $m = 1, 2, 3, \ldots$ est l'ordre du maximum ou du minimum, R le rayon de l'ouverture, λ la longueur d'onde. Les valeurs k_{min}, k_{max} et les intensités relatives des maximums I_{rel}, pour $m = 1, 2, 3$ et 4, sont données au tableau ci-après.

m	k_{max}	k_{min}	I_{rel}
1	0	0,61	1
2	0,41	0,56	0,0175
3	0,44	0,54	0,0042
4	0,46	0,53	0,0016

Le rétrécissement des ouvertures donne l'image de diffraction floue. Avec l'augmentation de R l'image de diffraction se resserre en un point.

8° *Diffraction par deux fentes parallèles identiques* (fig. V.5.13). La lumière est normale au plan des fentes. Les minimums d'intensité «principaux» satisfont à la même condition que les minimums pour une fente (p. 640). Les minimums secondaires correspondent aux directions dans lesquelles l'interférence de la lumière issue des deux fentes conduit à son extinction:

$$Z \sin \varphi = \pm (2l + 1) \frac{\lambda}{2},$$

$$l = 0, 1, 2, \ldots ;$$

ici $Z = X + Y$, X est la largeur de la fente, Y la distance entre fentes.

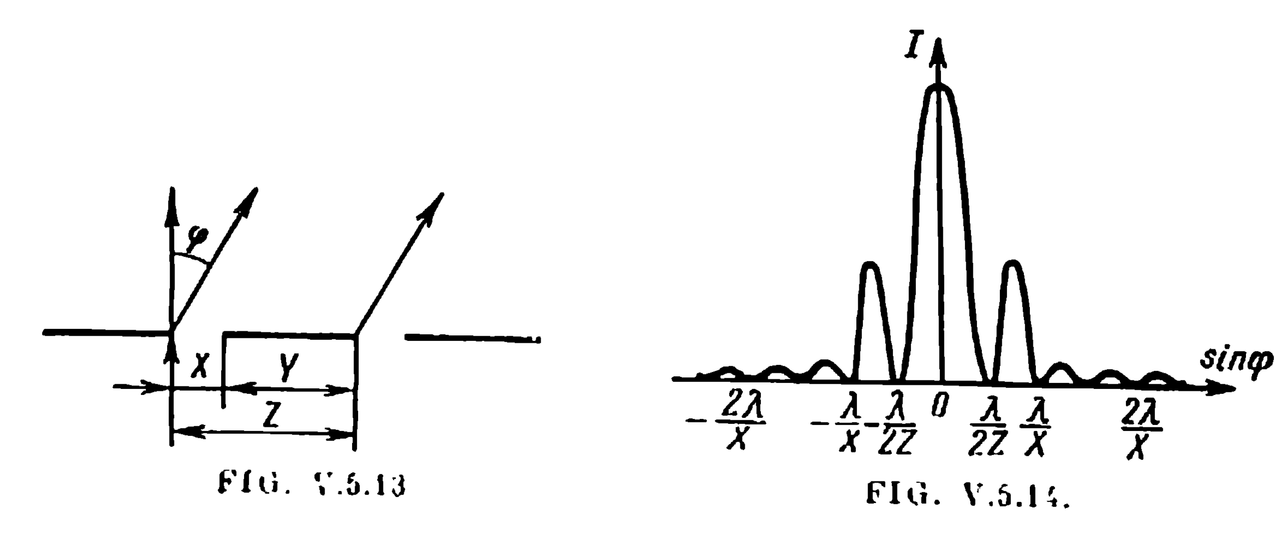


FIG. V.5.13

FIG. V.5.14.

Les positions des minimums principaux sont $X \sin \varphi = \pm n\lambda$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Les positions des maximums principaux sont $Z \sin\varphi = \pm m\lambda$, $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$ est l'*ordre du maximum principal.*

La distribution des intensités est montrée fig. V.5.14. Les maximums de diffraction sont plus étroits et plus brillants que dans le cas de diffraction par une fente de même largeur X (4°). Entre deux maximums principaux voisins est disposé un minimum secondaire. Quand $X \ll Z$, entre deux minimums principaux voisins est disposé un nombre notable de nouveaux minimums et maximums. Si Z/X est un nombre rationnel, autrement dit, $Z = \frac{k_1}{k_2} X$, où k_1 et k_2 sont des nombres entiers n'ayant pas de facteurs communs, les maximums principaux d'ordre k_1, $2k_1$, etc., font défaut.

9° *Diffraction par un réseau de diffraction unidimensionnel*, c'est-à-dire par un système de N fentes parallèles et identiques, disposées sur un écran plan opaque et équidistantes. La grandeur $Z = X + Y$, où X est la largeur de la fente, Y la largeur de l'espace opaque entre fentes voisines, est appelée *période du réseau de diffraction.*

Si la lumière est normale au plan du réseau, alors les conditions suivantes ont lieu:

pour les minimums principaux: $X \sin \varphi = \pm n\lambda$, $n = 1, 2, 3, \ldots$;

pour les maximums principaux: $Z \sin \varphi = \pm m\lambda$, $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$;

pour les minimums secondaires:

$$Z \sin \varphi = \pm \frac{\lambda}{N}, \pm \frac{2\lambda}{N}, \ldots, \pm \frac{(N-1)\lambda}{N}, \pm \frac{(N+1)\lambda}{N}, \ldots$$

Entre deux maximums principaux voisins $N - 1$ minimums secondaires sont disposés, séparés par des maximums secondaires. Avec l'augmentation du nombre de fentes l'intensité des maximums principaux croît proportionnellement à N^2, et l'énergie de la lumière transmise augmente proportionnellement à N. En définitive apparaissent des maximums très aigus, séparés par des intervalles pratiquement sombres; la plus grande intensité des maximums secondaires ne constitue pas plus de 5% de l'intensité du maximum principal.

La *largeur angulaire* $\Delta\varphi$ du maximum principal est déterminée par la différence des angles de diffraction φ correspondant aux minimums secondaires limitant ce maximum. Pour $Z \gg \lambda$ et des grands N la largeur angulaire des maximums principaux d'ordres non trop élevés constitue

$$\Delta \varphi \approx \frac{2\lambda}{NZ}.$$

10° La distribution de l'intensité sur le plan d'observation s'exprime par

$$I = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi X}{\lambda}\sin\varphi\right)}{\left(\frac{\pi X}{\lambda}\sin\varphi\right)^2} \; \frac{\sin^2\left(\frac{\pi N Z}{\lambda}\sin\varphi\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi Z}{\lambda}\sin\varphi\right)},$$

où I_0 est l'intensité dans la direction $\varphi = 0$ pour une fente. Dans les maximums principaux l'intensité est N^2 fois supérieure à celle que donne aux endroits correspondants une seule fente. La distribution des intensités suivant les maximums principaux s'exprime par (m est l'ordre du maximum):

$$I_m = I_0 \frac{N^2 Z^2}{\pi^2 m^2 X^2} \sin^2 \frac{\pi m X}{Z}.$$

Si Z/X est un nombre irrationnel, I_m décroît de façon monotone avec l'accroissement de l'ordre du maximum m. Si, au contraire, Z/X est un nombre rationnel: $\frac{Z}{X} = \frac{k_1}{k_2}$, où k_1 et k_2 sont des nombres entiers, n'ayant pas de facteurs communs, on a $I_m = 0$ pour $m = k_1, 2k_1, \ldots$, autrement dit, les maximums principaux d'ordres multiples de k_1 font défaut.

Dans le tableau ci-après sont amenées les intensités relatives des maximums principaux pour différents ordres de diffraction pour deux valeurs du rapport Z/X.

Z/X \ m	0	1	2	3	4
2	1	0,4	0	0,045	0
3	1	0,675	0,17	0	0,042

11° Si l'onde plane tombe sur un réseau de diffraction sous l'angle θ (fig. V.5.15), la condition des maximums principaux est de la forme:

$$Z\,(\sin\varphi_m - \sin\theta) = \pm\, m\lambda,$$

ou bien

$$2Z\cos\left(\frac{\varphi_m + \theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\varphi_m - \theta}{2}\right) = \pm\, m\lambda,$$

où $m = 0, 1, 2, \ldots$

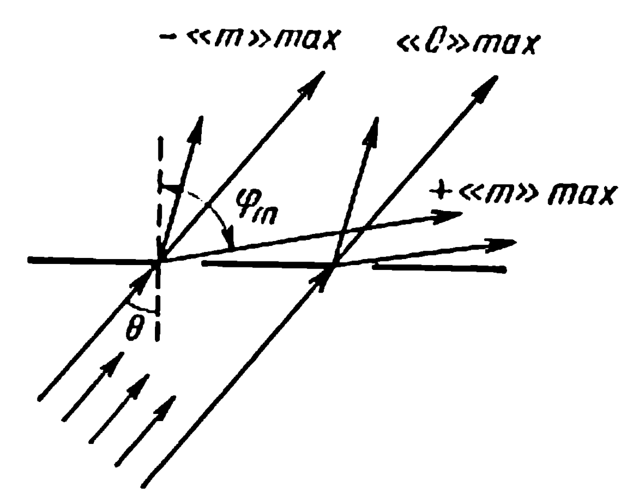


FIG. V.5.15.

Si $Z \gg \lambda$, φ_m diffère peu de 0 et

$$Z(\varphi_m - \theta) \cos \theta = \pm m\lambda.$$

Cette image de diffraction coïncide avec l'image de diffraction observée lors de l'incidence normale d'une onde sur le réseau lorsque sa période serait diminuée $Z' = Z \cos \theta$. Lors de l'incidence rasante de la lumière ($\theta \approx \pi/2$) on observe la diffraction même par des réseaux très grossiers ($Z \gg \lambda$).

12° *Diffraction par une grande quantité d'obstacles identiques et de même orientation.* L'intensité I de la lumière en un point arbitraire de l'image de diffraction est égale au produit de deux fonctions: $I = F \cdot f$. La fonction F est égale à l'intensité de la lumière au même point de l'image de diffraction lors de la diffraction par un seul obstacle. La valeur de la fonction f ne dépend que du nombre N d'obstacles et de leur disposition réciproque. Ainsi, pour un réseau de diffraction unidimensionnel (10°) $F = I_0 \sin^2 (aX)/(aX)^2$ et $f = \sin^2 (NaZ)/\sin^2 (aZ)$, où $a = \frac{\pi}{\lambda} \sin \varphi$.

Si le nombre d'obstacles est grand et que ces obstacles soient disposés de façon chaotique l'un par rapport à l'autre, $f \approx N$ et l'image de diffraction a le même aspect que celle produite par un seul obstacle, mais son intensité est N fois plus grande: $I = NF$.

5. Phénomènes de diffraction dus aux structures multidimensionnelles

1° On appelle *structure optique bidimensionnelle* un corps optiquement hétérogène dont les facteurs de transmission et de réflexion dépendent de deux coordonnées prises sur sa surface. Un exem-

ple simple de structure bidimensionnelle périodique est le réseau de diffraction plan bidimensionnel et orthogonal, constitué de réseaux de diffraction unidimensionnels (p. 644) croisés sous angle droit suivant les axes des x et des y et dont les périodes sont Z_1 et Z_2.

2° Dans le cas d'incidence normale de la lumière (suivant l'axe z) sur un réseau plan bidimensionnel et orthogonal, les maximums principaux satisfont simultanément à deux conditions:

$$Z_1 \cos \alpha = m\lambda, \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$
$$Z_2 \cos \beta = n\lambda, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

où α et β sont les angles formés par les axes des x et des y des réseaux et la direction menée au maximum principal d'ordre (m, n). L'angle γ que fait cette direction avec l'axe des z est déterminé par la condition:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1,$$

d'où

$$\cos \gamma = \sqrt{1 - \left(\frac{m\lambda}{Z_1}\right)^2 - \left(\frac{n\lambda}{Z_2}\right)^2}.$$

Dans le cas général d'incidence d'une onde plane (suivant une direction arbitraire formant avec les axes Ox et Oy du réseau les angles α_0 et β_0) sur un réseau plan bidimensionnel et orthogonal, les positions des maximums principaux satisfont simultanément aux conditions suivantes:

$$Z_1 (\cos \alpha - \cos \alpha_0) = m\lambda,$$
$$Z_2 (\cos \beta - \cos \beta_0) = n\lambda,$$

où m et n sont des nombres entiers.

3° On comprend sous *structure optique tridimensionnelle* un corps dont les propriétés optiques dépendent de toutes les trois coordonnées spatiales. L'exemple le plus simple de telle structure *(réseau de diffraction spatial)* peut servir un système de réseaux plans bidimensionnels identiques, équidistants et disposés parallèlement les uns aux autres le long de l'axe perpendiculaire à leur plan. Les structures cristallines des corps solides (p. 278) sont un cas important de réseau de diffraction spatial. D'une manière générale, l'image de diffraction due à une structure tridimensionnelle périodique (un réseau cristallin spatial) est déterminée par le type de symétrie du réseau.

Les directions menées aux maximums principaux de diffraction satisfont aux *équations de Laue:*

$$Z_1 (\cos \alpha - \cos \alpha_0) = m\lambda,$$
$$Z_2 (\cos \beta - \cos \beta_0) = n\lambda,$$
$$Z_3 (\cos \gamma - \cos \gamma_0) = l\lambda,$$

où m, n et l sont des nombres entiers; Z_1, Z_2 et Z_3 les périodes du réseau le long de ses trois axes; α_0, β_0, γ_0 et α, β, γ les angles faits par les axes du réseau avec les rayons incidents et réfractés respectivement. Les valeurs de $\cos \alpha$, $\cos \beta$ et $\cos \gamma$ doivent de plus vérifier une relation (géométrique) liée à la disposition réciproque des axes du réseau. Par exemple, dans le cas d'un réseau orthogonal $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$. C'est pourquoi pour une direction donnée des rayons incidents, autrement dit, pour des valeurs fixées α_0, β_0 et γ_0 l'observation des maximums de diffraction d'ordre (m, n, l) n'est possible que dans le cas d'une valeur déterminée de la longueur d'onde. Ainsi, pour un réseau orthogonal

$$\lambda = -\frac{\frac{m}{Z_1}\cos\alpha_0 + \frac{n}{Z_2}\cos\beta_0 + \frac{l}{Z_3}\cos\gamma_0}{\left(\frac{m}{Z_1}\cos\alpha_0\right)^2 + \left(\frac{n}{Z_2}\cos\beta_0\right)^2 + \left(\frac{l}{Z_3}\cos\gamma_0\right)^2}.$$

4° Une seconde méthode beaucoup plus simple de calcul de la diffraction cristalline est fondée sur la représentation du cristal sous forme d'un système de plans parallèles. Chaque plan passe par un grand nombre de nœuds du réseau et est appelé *plan réticulaire*. On suppose que les plans réticulaires réfléchissent, comme dans le cas d'un miroir, les ondes incidentes. Il est nécessaire pour qu'apparaissent des maximums de diffraction que les ondes réfléchies par tous les plans parallèles réticulaires s'intensifient mutuellement par interférence. Cette condition n'est réalisée que pour les valeurs de la longueur d'onde diffractée λ et de son angle d'incidence i sur les plans réticulaires vérifiant la *formule (la condition) de* Bragg:

$$2d \cdot \sin \vartheta = k\lambda,$$

où $\vartheta = \frac{\pi}{2} - i$ est l'*angle de glissement*, d la distance entre deux plans réticulaires voisins, $k = 1, 2, \ldots$ l'*ordre de réflexion*. L'angle fait par la direction menée au maximum de diffraction avec le rayon incident est égal à 2ϑ. La condition de Bragg est en accord avec les équations de Laue et peut être obtenue à partir de celles-ci directement.

5° En vertu de la condition de Bragg, seules les ondes dont la longueur $\lambda < 2d$ peuvent être diffractées par les réseaux spatiaux. Par conséquent, l'inégalité $d < (\lambda/2)$ représente la ***condition de l'homogénéité optique du cristal*** pour les ondes électromagnétiques de longueur d'onde λ. Chez les réseaux cristallins $d \sim (10^7 \div 10^8)$ cm. C'est pourquoi les cristaux sont optiquement homogènes pour les rayonnements visible et ultraviolet[1]). Les réseaux cristallins diffractent les rayons X et γ, ainsi que les électrons, les neutrons et autres microparticules avec des longueurs d'onde de de Broglie suffisamment petites.

6° Connaissant les paramètres du réseau, on peut, d'après la disposition des maximums de diffraction, déterminer les longueurs λ des ondes diffractées, c'est-à-dire réaliser l'***analyse spectrale*** de ces dernières (des rayons X par exemple). Inversement, connaissant la longueur des ondes diffractées par l'échantillon à étudier, ainsi que l'aspect de l'image de diffraction, on peut élucider la structure de cet échantillon. On appelle ***analyse structurale aux rayons*** X, ***étude par diffraction électronique*** et ***étude par diffraction neutronique*** les méthodes d'étude de la structure de la substance basées respectivement sur la diffraction par rayons X, électrons et neutrons.

L'étude par diffraction électronique est largement utilisée, en particulier pour l'analyse de la structure de la couche superficielle de la substance. Ceci s'explique par le fait que, à cause de l'interaction forte des électrons avec la substance, leur profondeur de pénétration dans l'échantillon à étudier est très faible (de l'ordre de $10^{-5} \div 10^{-7}$ cm).

L'interaction des rayons X avec la substance est de nature électromagnétique. L'amplitude de la diffusion (p. 756) des rayons X dans les couches électroniques des atomes croît avec l'augmentation du nombre atomique Z de l'élément. La diffusion des neutrons par la substance est due principalement à leur interaction avec les noyaux des atomes (interaction nucléaire). L'amplitude de la diffusion des neutrons lents (p. 885) varie de façon non monotone avec la variation de Z. Elle diffère pour différents isotopes d'un même élément. Toutefois son ordre de grandeur est le même dans tous les cas. C'est pourquoi l'étude par diffraction neutronique a des avantages essentiels sur l'analyse structurale aux rayons X dans les cas où la substance est constituée d'éléments ayant des valeurs de Z très proches ou très différentes (substances hydrogé-

---

[1]) Ceci n'est vrai que pour un cristal parfait, les distances entre les nœuds duquel sont rigoureusement identiques. A cause de l'agitation thermique on ne peut admettre les cristaux réels entièrement optiquement homogènes, même pour la lumière visible. Leur inhomogénéité optique se manifeste par exemple dans le phénomène de diffusion moléculaire de la lumière dans les cristaux.

nées par exemple). La diffusion des neutrons par la substance peut être due également à l'interaction électromagnétique entre les moments magnétiques des neutrons et des atomes de cette substance. C'est pourquoi l'étude par diffraction neutronique est appliquée également à l'analyse des substances magnétiques.

6. Diffraction des ondes radioélectriques

1° On étudie la diffraction des ondes radioélectriques en résolvant les équations de Maxwell pour des conditions données de radiation des ondes radioélectriques et pour des conditions aux limites données (p. 524) à la surface de séparation Terre-atmosphère.

Dans les problèmes de diffraction des ondes radioélectriques, l'atmosphère est, en première approximation, admise homogène avec la constante diélectrique relative $\varepsilon = 1$ et la perméabilité magnétique relative $\mu = 1$. La réfraction des ondes radioélectriques n'est pas prise en considération.

2° On considère généralement la *diffraction par la surface de la Terre*, que l'on suppose parfaitement sphérique et homogène par ses propriétés électriques et magnétiques, et la *diffraction due au relief* de la surface de la Terre (monts, creux, etc.).

La diffraction par la surface de la Terre correspond à l'entrée (la réception) des ondes radioélectriques dans le domaine d'ombre géométrique derrière l'horizon. La diffraction due au relief de la surface de la Terre correspond au contournement des obstacles (de dimensions comparables à la longueur d'ondes radioélectriques ou plus petites que celle-ci) par les ondes radioélectriques.

La diffraction des ondes radioélectriques par la surface de la Terre assure la radiocommunication à ondes longues formant un «rayon terrestre» contournant la surface de la Terre.

CHAPITRE 6

Optique géométrique

1. Principes fondamentaux

1° On appelle ***optique géométrique*** le cas limite de l'optique ondulatoire pour $\lambda \to 0$ (λ est la longueur d'onde). En optique géométrique, on fait abstraction de la nature ondulatoire de la lumière et des phénomènes de diffraction. Ceci est possible lorsque les effets de diffraction sont négligeablement petits (par exemple lors du passage de la lumière à travers une lentille dont le diamètre de monture est $d \gg \lambda$).

2° En optique géométrique on étudie les lois de propagation de la lumière dans des milieux transparents en considérant la lumière comme un ensemble de ***rayons lumineux:*** droites le long desquelles se propage l'énergie lumineuse. Dans un milieu optiquement isotrope les rayons lumineux sont orthogonaux aux surfaces d'onde et dirigés dans le sens des normales extérieures à ces surfaces. Dans un milieu optiquement homogène les rayons sont rectilignes. Sur la surface de séparation de deux milieux ils obéissent aux lois de la réflexion et de la réfraction (p. 612). Les faisceaux de rayons lumineux peuvent se couper sans interférer, se propageant après intersection indépendamment l'un de l'autre.

3° *Principe de Fermat:* le chemin réel suivi par la lumière entre deux points A et B est le chemin pour la traversée duquel la lumière met un temps minimal T en comparaison avec le temps qu'elle mettrait pour passer tout autre chemin imaginaire entre ces points:

$$\delta T = \delta \int_A^B \frac{dl}{v} = 0, \quad \text{ou} \quad \delta \int_A^B ds = 0,$$

où δ est le symbole de la variation (p. 96), dl l'élément de longueur du trajet entre A et B, $v = v(x, y, z)$ la vitesse de la lumière dans le milieu; $ds = n \cdot dl$ l'élément de chemin optique; $n = n(x, y, z)$ l'indice de réfraction absolu du milieu.

4° Le principe de Fermat est une conséquence du principe de Huyghens (p. 631) à condition que la longueur d'onde de la lumière soit infiniment petite. Il est le principe le plus général à partir duquel peuvent être déduites toutes les lois fondamentales de l'optique géométrique. Ainsi, dans le cas d'un milieu optiquement homogène

$$\delta \int_A^B ds = n \cdot \delta \int_A^B dl = 0,$$

autrement dit, du principe de Fermat découle la *loi de la propagation rectiligne de la lumière dans un milieu optiquement homogène*. De façon analogue sont déduites les lois de la réflexion et de la réfraction de la lumière.

Du principe de Fermat est déduite également la *loi du retour inverse des rayons lumineux:* le rayon incident dans le premier milieu sous l'angle i à la surface de séparation est réfracté dans le second milieu sous l'angle r, et inversement, le rayon incident dans le second milieu sous l'angle r est réfracté dans le premier milieu sous l'angle i. D'ici vient la relation pour les indices de réfraction relatifs des deux milieux:

$$n_{12} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{n_{21}},$$

où n_1 et n_2 sont les indices de réfraction absolus des deux milieux.

5° En optique géométrique, chaque point S de la source lumineuse est supposé centre d'un faisceau divergent de rayons dit *faisceau homocentrique*. Si après réflexions et réfractions dans un système optique le faisceau reste homocentrique, son centre S' est appelé *image stigmatique du point S dans le système optique*. L'image S' est *réelle* si au point S' se coupent les rayons du faisceau eux-mêmes, et *virtuelle* si en ce point se coupent les prolongements de ces rayons. Les points correspondants de la source et de l'image ainsi que les rayons et les faisceaux lumineux correspondants sont appelés *conjugués*.

2. Miroir plan. Lame à faces planes parallèles. Prisme

1° Le faisceau homocentrique sortant du point S après réflexion dans le miroir plan (fig. V.6.1) reste homocentrique. Le point S^* est l'*image virtuelle* de la source S, cette image étant formée non par les rayons réfléchis eux-mêmes, mais par leurs prolongements. La ligne SS^* est perpendiculaire au plan du miroir et $A = A'$, où A et A' sont respectivement les distances du point et de son image au miroir. Les dimensions géométriques de la source lumineuse étendue et de son image virtuelle sont les mêmes.

2° Dans une lame à faces planes parallèles (fig. V.6.2) l'angle d'incidence et l'angle d'émergence des rayons lumineux de la lame sont égaux entre eux. La lame déplace le rayon lumineux parallèlement à lui-même d'une distance de

$$\Delta = d \sin i \left(1 - \sqrt{\frac{1 - \sin^2 i}{n^2 - \sin^2 i}}\right),$$

où d est l'épaisseur de la lame, i l'angle d'incidence des rayons, n l'indice de réfraction relatif du matériau de la lame. La source semble rapprochée de la surface de la lame d'une distance

$$\Delta' = d\left(1 - \sqrt{\frac{1 - \sin^2 i}{n^2 - \sin^2 i}}\right).$$

Lors de l'incidence normale des rayons ($i = 0$) $\Delta = 0$ et $\Delta' = d\,\frac{n-1}{n}$.

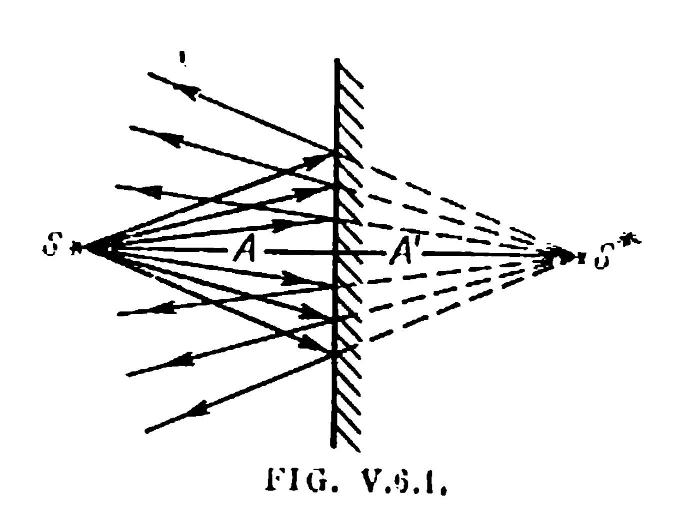


FIG. V.6.1.

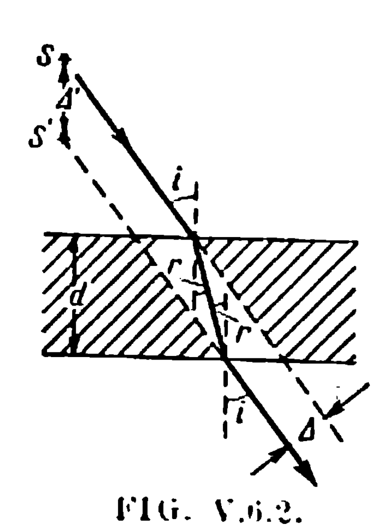


FIG. V.6.2.

3° Dans un prisme de base AB et d'arête réfringente C (fig. V.6.3) l'angle α fait par les faces AC et BC est appelé *angle de réfraction*. Le rayon lumineux incident sur le prisme dans le plan perpendiculaire à ses arêtes A, B et C est dévié après réfraction vers la base AB du prisme d'un angle $\varphi = i_1 + r_2 - \alpha$, où i_1 est l'angle d'incidence du rayon sur la face AC et r_2 l'angle de réfraction sur la face BC. Si $r_2 = i_1$, l'angle de déviation est minimum ($\varphi = \varphi_{\min}$).

Une telle disposition du prisme par rapport à la source lumineuse est appelée *orientation sous l'angle de minimum de déviation*; dans ce cas

$$\sin \frac{\varphi_{\min} + \alpha}{2} = n \sin \frac{\alpha}{2},$$

où n est l'indice de réfraction du matériau constituant le prisme par rapport au milieu ambiant.

3. Réfraction et réflexion par une surface sphérique

1° Si deux milieux ont une surface de séparation de forme sphérique (fig. V.6.4), après réfraction sur celle-ci le faisceau reste homocentrique dans le seul cas où l'angle d'ouverture n'est pas grand, de façon plus précise, quand $SA \approx SO$, $S'A \approx S'O_1$ et les points O_1 et O coïncident pratiquement.

On appelle *axe optique de la surface sphérique* la droite passant par la source lumineuse ponctuelle S et le centre de courbure C de la surface sphérique.

2° On appelle *axe paraxial* un étroit cône de rayons lumineux ayant un axe normal à la surface de séparation sphérique. Les faisceaux non paraxiaux ne donnent pas d'images stigmatiques et après réfraction ne sont plus homocentriques.

3° Si la surface sphérique a un rayon de courbure R et que les milieux de part et d'autre de la surface sphérique possèdent des indices de réfraction absolus n_1 et n_2, la grandeur $Q =$

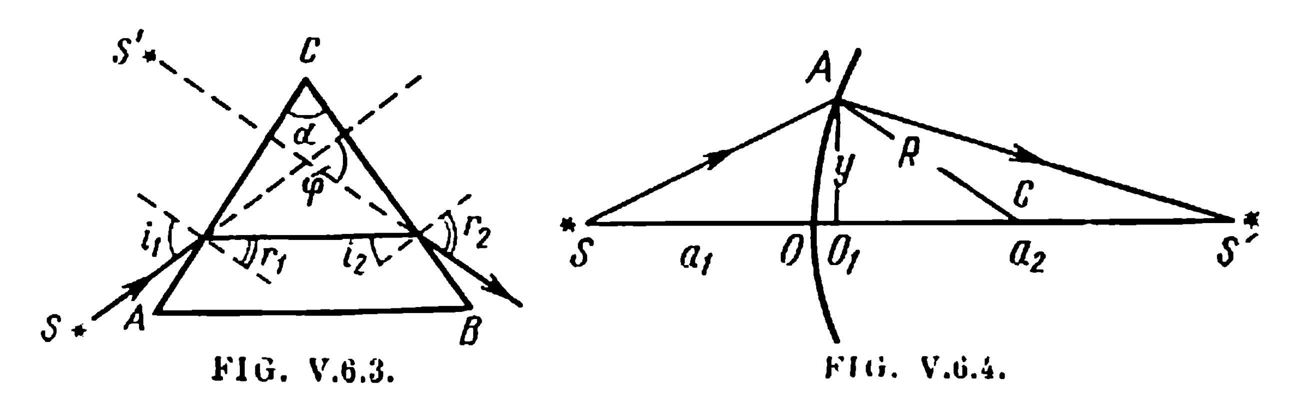


FIG. V.6.3. FIG. V.6.4.

$= n\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{R}\right)$ appelée *invariant d'Abbe d'ordre zéro*, reste constante pour les faisceaux paraxiaux:

$$Q = n_1\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{R}\right) = n_2\left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{R}\right),$$

où a_1 et a_2 sont respectivement les distances jusqu'à la source et son image comptées à partir de la surface de séparation O. Dans le sens de propagation de la lumière ces distances sont supposées positives et dans le sens contraire, négatives (sur la figure V.6.4 $a_2 > 0$ et $a_1 < 0$). Pour une surface de séparation convexe (par rapport à la source lumineuse) $R > 0$, pour une surface de séparation concave $R < 0$.

4° La relation 3° pour les faisceaux paraxiaux écrite sous la forme:

$$\frac{n_1}{a_1} - \frac{n_2}{a_2} = \frac{n_1 - n_2}{R} \quad \text{ou} \quad \frac{f_1}{a_1} + \frac{f_2}{a_2} = 1,$$

est appelée *équation de la surface sphérique réfringente*. Ici

$$f_1 = \frac{n_1 R}{n_1 - n_2} \quad \text{et} \quad f_2 = \frac{n_2 R}{n_2 - n_1}$$

sont les *distances focales avant* et *arrière de la surface sphérique réfringente*. Le point F_1 pour lequel $a_1 = f_1$ et le point F_2 pour lequel $a_2 = f_2$ sont respectivement les *foyers avant* et *arrière de la surface sphérique*. Si la source lumineuse S est située au foyer $F_1 (a_1 = f_1)$, son image se forme à l'infini ($a_2 = \infty$), autrement dit, le faisceau paraxial convergeant de sommet au point F_1 se transforme après réfraction en un système de rayons parallèles. Si la source S est située à l'infini ($a_1 = -\infty$), son image se forme au foyer F_2.

Les foyers F_1 et F_2 sont réels si $f_1 < 0$ et $f_2 > 0$, autrement dit, si $R > 0$ et $n_2 > n_1$ ou si $R < 0$ et $n_2 < n_1$. Dans ce cas l'image S' de la source S est réelle ($a_2 > 0$) si $\frac{a_1}{f_1} > 1$.

Les positions de la source S et de son image S' peuvent être caractérisées également à l'aide des distances x_1 entre F_1 et S et x_2 entre F_2 et S', alors $x_1 = a_1 - f_1$ et $x_2 = a_2 - f_2$. Les grandeurs x_1 et x_2 vérifient la *formule de Newton:*

$$x_1 x_2 = f_1 f_2 = -\frac{n_1 n_2 R^2}{(n_2 - n_1)^2}.$$

5° *Formule du miroir sphérique:*

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = \frac{2}{R},$$

où R est le rayon de courbure du miroir, a_1 et a_2 les distances du miroir à la source lumineuse et à son image (la règle des signes pour a_1, a_2 et R est celle donnée 3°). La distance focale du miroir sphérique $f = R/2$. L'image dans le miroir sphérique est réelle si elle se trouve du même côté du miroir que la source ($a_2 < 0$), et virtuelle dans le cas contraire ($a_2 > 0$). L'image dans un miroir convexe ($R > 0$) est toujours virtuelle, tandis que dans un miroir concave ($R < 0$) elle est réelle si $\frac{2a_1}{R} > 1$ et virtuelle si $\frac{2a_1}{R} < 1$.

6° Si un objet lumineux (un petit segment de dimension $h_0 (h_0 \ll |a_1|)$ est perpendiculaire à l'axe optique de la surface sphérique (fig. V.6.5), son image obtenue à l'aide de rayons paraxiaux a également la forme d'un petit segment perpendiculaire à l'axe optique.

On appelle *grandissement transversal* le rapport des dimensions linéaires transversales de l'image (h_i) et de l'objet (h_0):

$$Y = \pm \frac{h_i}{h_0}.$$

Le signe plus, c'est-à-dire $Y > 0$, correspond à une image droite et le signe moins, c'est-à-dire $Y < 0$, à une image renversée (ce cas est représenté fig. V.6.5).

Lors de la réfraction sur une surface sphérique dans les conditions indiquées ci-dessus

$$Y = \frac{n_1}{n_2} \frac{a_2}{a_1}.$$

Lors de la réflexion par un miroir sphérique dans les mêmes conditions

$$Y = -\frac{a_2}{a_1}.$$

Dans les deux cas l'image est renversée si elle est réelle, et droite si elle est virtuelle.

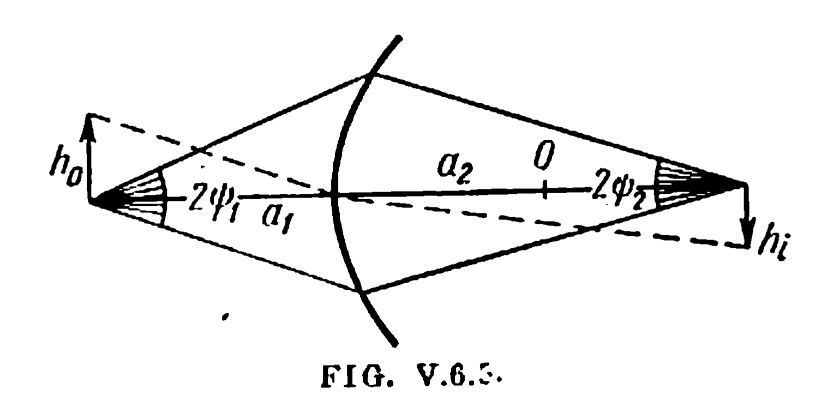


FIG. V.6.5.

Si $2\psi_1$ et $2\psi_2$ sont les angles d'ouverture maximaux des faisceaux lumineux paraxiaux de la source et de l'image respectivement (fig. V.6.5), on a lors de réfraction sur une surface sphérique la réalisation de la *relation de Lagrange-Helmholtz:*

$$h_0 n_1 \psi_1 = h_i n_2 \psi_2.$$

7° Le plan objet et le plan image sont dits *conjugués* par rapport à la surface sphérique. Les plans conjugués pour lesquels $Y = 1$ sont dits *principaux*. Pour la surface sphérique les deux plans principaux coïncident avec le plan tangent à la surface sphérique en son point d'intersection avec l'axe optique.

4. Lentilles minces

1° On appelle *lentille* un corps transparent limité par deux surfaces curvilignes ou par une curviligne et une plane. Dans la plupart des cas on utilise des lentilles aux faces sphériques.

2° La lentille est *mince* si son épaisseur d est petite devant les rayons de courbure de ses surfaces R_1 et R_2. Dans le cas contraire la lentille est *épaisse*.

3° On appelle *axe optique principal de la lentille* la droite qui joint les centres de courbure de ses surfaces. On peut considérer que dans une lentille mince les points d'intersection de l'axe principal avec les deux surfaces de la lentille sont confondus en un même point O (fig. V.6.6) appelé *centre optique*. La lentille mince a un seul *plan principal* commun pour ses deux surfaces et passant par le centre optique perpendiculairement à l'axe principal.

Toutes les droites passant par le centre optique de la lentille et ne coïncidant pas avec son axe optique principal sont appelées *axes optiques secondaires*.

Les rayons dirigés le long des axes optiques de la lentille (principal et secondaires) ne subissent pas de réfraction.

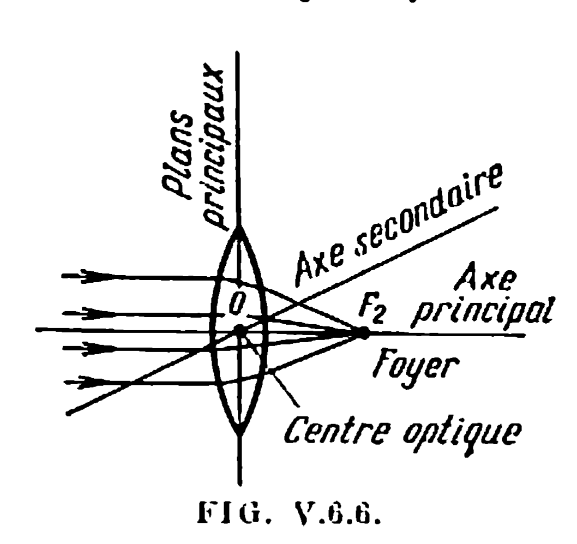


FIG. V.6.6.

4° *Formule de la lentille mince:*

$$\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} = (n_{21} - 1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right),$$

où $n_{21} = n_2/n_1$, n_2 et n_1 sont les indices de réfraction absolus du matériau de la lentille et du milieu ambiant, R_1 et R_2 les rayons de courbure des faces avant et arrière (par rapport à l'objet) de la lentille, a_1 et a_2 les distances jusqu'à l'objet et son image comptées à partir du centre optique de la lentille suivant son axe principal. La règle des signes pour R_1, R_2, a_1 et a_2 est celle indiquée p. 655. La formule d'une lentille mince, écrite ci-dessus, n'est vraie que pour des rayons paraxiaux.

5° On appelle la grandeur

$$f = \frac{1}{(n_{21} - 1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}$$

distance focale de la lentille. Les points situés sur l'axe principal de la lentille de part et d'autre du centre optique à des distances identiques, égales à f, sont appelés *foyers principaux.* Pour le foyer principal avant $F_1a_1 = -f$, pour le foyer principal arrière $F_2a_2 = f$. Si la source de lumière monochromatique est située au point F_1, son image se forme à l'infini ($a_2 = \infty$). Inversement, si la source de lumière monochromatique est située à l'infini ($a_1 = -\infty$), son image est obtenue au point F_2.

Les plans passant par les foyers principaux F_1 et F_2 de la lentille, perpendiculairement à son axe optique principal, sont appelés *plans focaux.* Les points d'intersection des axes optiques secondaires avec les plans focaux de la lentille sont appelés *foyers secondaires.*

6° La lentille est *convergente (positive)* si sa distance focale $f > 0$. La lentille est *divergente (négative)* si sa distance focale $f < 0$.

Si $n_2 > n_1$, convergentes sont les lentilles *biconvexes, plano-convexes* et *convexo-concaves (ménisques convergents)* s'amincissant du centre vers les bords; divergentes sont les lentilles *biconcaves, plano-concaves* et *concavo-convexes (ménisques divergents)* s'épaississant du centre vers les bords. Si $n_2 < n_1$, la classification des lentilles est inverse de celle du cas $n_2 > n_1$.

7° Si un faisceau de rayons monochromatiques parallèles tombe sur une lentille convergente, tous ces rayons, après réfraction par la lentille, se coupent au foyer secondaire de la lentille correspondant à l'axe secondaire parallèle aux rayons incidents. Si un même faisceau de rayons tombe sur une lentille divergente, ce faisceau, après réfraction par la lentille, se transforme en un faisceau de rayons divergents dont les prolongements se coupent au foyer secondaire correspondant de la lentille. C'est pourquoi

les foyers de la lentille convergente sont réels et ceux de la lentille divergente virtuels.

8° On a pour les lentilles la formule

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{d}=\pm\frac{1}{|f|} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{s}+\frac{1}{d}=\frac{1}{f},$$

où $s=|a_1|$, $d=a_2$, $f=f_2$ est la distance focale de la lentille, le signe plus correspond à une lentille convergente, le signe moins à une lentille divergente.

La grandeur

$$\Phi=\frac{1}{f}$$

est appelée *puissance de la lentille*. Pour les lentilles convergentes $\Phi>0$, pour les lentilles divergentes $\Phi<0$. La puissance des lentilles s'exprime en *dioptries*; la dimension de la dioptrie est m^{-1}.

9° Une lentille mince donne une image non déformée de l'objet si la lumière est monochromatique et l'objet petit (ou bien suffisamment éloigné de la lentille), de sorte que les rayons issus de l'objet passent au voisinage immédiat de l'axe principal de la lentille (ces rayons sont paraxiaux).

10° La construction de l'image d'un objet dans la lentille est réalisée à l'aide de deux rayons issus de chaque point de l'objet; l'image du point est située au point d'intersection de ces rayons après leur passage à travers la lentille (dans le cas de l'image virtuelle, au point d'intersection des prolongements de ces rayons traversant la lentille). Habituellement, on utilise deux rayons quelconques des trois suivants: le rayon passant sans réfraction par le centre optique de la lentille, le rayon tombant sur la lentille parallèlement à son axe principal (après réfraction par la lentille ce rayon ou son prolongement passe par le foyer principal arrière de la lentille) et enfin le rayon (ou son prolongement) qui passe par le foyer principal avant de la lentille et après réfraction dans la lentille est dirigé parallèlement à son axe principal.

11° Le grandissement transversal d'une lentille mince est $Y = a_2/a_1$. Pour les images réelles $Y<0$, autrement dit, elles sont renversées; pour les images virtuelles $Y>0$, autrement dit, elles sont droites. Lorsque $a_2=-a_1$, la lentille donne une image réelle renversée et égale à l'objet. Ceci est possible lorsque l'objet et l'image sont situés tous les deux au double des distances focales à partir du centre de la lentille.

12° Les images des objets obtenues à l'aide de lentilles présentent de nombreux défauts (p. 667). Pour diminuer ces défauts, on associe les lentilles en systèmes optiques.

5. Systèmes optiques centrés

1° Le système optique est *centré* si les centres de courbure de toutes ses surfaces réfringentes sont situés sur une même droite appelée ***axe optique principal du système.***

2° On appelle ***système optiquement parfait*** tout système optique où est conservée l'homocentricité des faisceaux et où l'image est géométriquement semblable à l'objet. On peut admettre presque parfaits les systèmes optiques centrés dans lesquels les images sont obtenues à l'aide de faisceaux monochromatiques et paraxiaux de lumière.

3° Chaque système optique parfait possède deux plans principaux et deux plans focaux. Les ***plans principaux*** sont perpendiculaires à l'axe *principal* du système et, dans le cas général, ne coïncident pas l'un avec l'autre. Ils représentent des plans conjugués correspondant au grandissement transversal $Y = +1$. Les ***plans focaux*** sont perpendiculaires à l'axe principal du système et coupent celui-ci en ses foyers. Les points d'intersection H_1 et H_2 des plans principaux avec l'axe principal du système (fig. V.6.7) sont appelés ***points principaux.*** Les distances séparant ces points des foyers sont nommées ***distances focales.***

4° Si f_1 et f_2 sont les distances focales du système optique et que la position des points conjugués (p. 652) soit déterminée par leurs distances respectives a_1 et a_2 jusqu'aux plans principaux correspondants (compte tenu de la règle des signes, p. 655), tandis que x_1 et x_2 sont respectivement les distances de l'objet au foyer avant et de l'image au foyer arrière du système ($x_1 = a_1 - f_1$, $x_2 = a_2 - f_2$), les formules suivantes sont justes:

$$\frac{f_1}{a_1} + \frac{f_2}{a_2} = 1, \quad x_1 x_2 = f_1 f_2; \quad \frac{f_1}{f_2} = -\frac{n_1}{n_2}; \quad Y = -\frac{x_2}{f_2} = -\frac{f_1}{x_1},$$

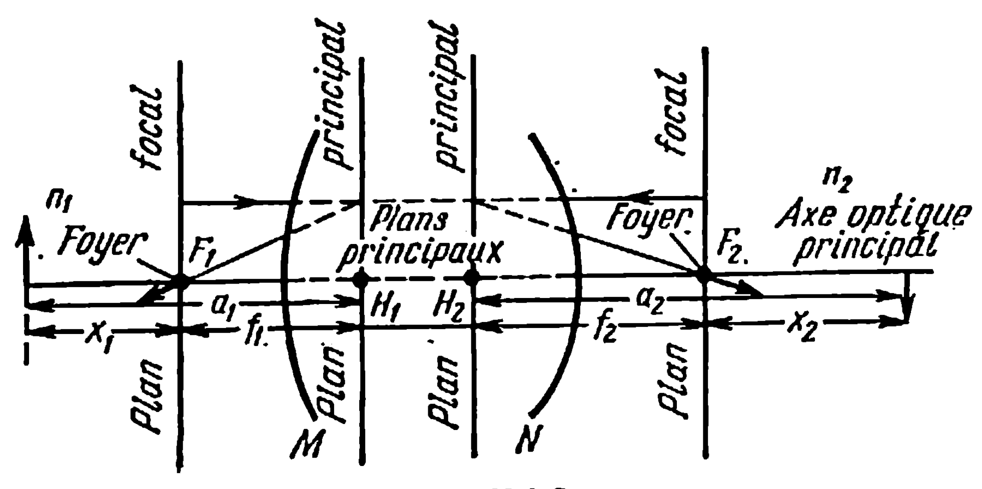


FIG. V.6.7.

où n_1 et n_2 sont les indices de réfraction absolus des milieux dans lesquels sont disposés l'objet et son image.

Si ces milieux sont identiques ($n_1 = n_2$), on a:

$$\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} = \frac{1}{f}\ ;\ x_1x_2 = -f^2;\ f_2 = -f_1 = f.$$

5° On caractérise le système optique par le *grandissement angulaire Z:*

$$Z = \frac{\operatorname{tg}\psi_2}{\operatorname{tg}\psi_1},$$

où ψ_1 est l'angle d'ouverture du faisceau de rayons en un point de l'objet (p. 657), ψ_2 celui en un point conjugué de l'image. Dans le cas d'une image renversée, les signes de ψ_1 et ψ_2 sont supposés différents et $Z < 0$, dans le cas d'une image droite $Z > 0$. Le grandissement transversal et le grandissement angulaire sont liés par la relation

$$ZY = \frac{n_1}{n_2}.$$

Si l'objet et son image se trouvent dans un même milieu ($n_1 = n_2$), on a:

$$ZY = 1.$$

6° Les points conjugués pour lesquels $Z=1$ sont appelés *points nodaux* du système optique. Les rayons conjugués passant par les nœuds sont parallèles entre eux. Les points nodaux sont éloignés des foyers F_1 et F_2 d'une distance $x_1 = f_2$ et $x_2 = f_1$ respectivement. Les deux plans passant par les points nodaux perpendiculairement à l'axe principal sont appelés *plans nodaux.*

7° Le système optique est caractérisé également par le *grandissement longitudinal* $X = \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{x_2}{x_1}$:

$$X = \frac{n_2}{n_1} Y^2; \quad XZ = Y.$$

8° Deux plans principaux, deux plans focaux et deux plans nodaux et les points correspondants constituent six *plans* et *points cardinaux du système.* Lorsque $n_1 = n_2$, $f_1 = -f_2$, les points et les plans nodaux se confondent aux points et plans principaux et il ne reste plus que quatre plans et points cardinaux. Le passage du système optique à une lentille mince conduit au confondement de deux plans et points principaux en un seul. La lentille mince est caractérisée par trois points cardinaux: deux foyers et un centre optique, et par leurs plans cardinaux correspondants.

9° La distance focale d'une lentille sphérique épaisse dans l'air ($n_1 = n_2 = 1$) est de

$$f = \frac{1}{(n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{n-1}{n}\frac{d}{R_1 R_2}\right)},$$

où n est l'indice de réfraction absolu du matériau constituant la lentille, d l'épaisseur de la lentille suivant l'axe principal, R_1 et R_2 les rayons de courbure des faces de la lentille (voir règle des signes p. 655).

Les points principaux avant (H_1) et arrière (H_2) d'une lentille épaisse sont situés aux distances

$$h_1 = -\frac{R_1 d}{n(R_2 - R_1) + (n-1)d} \quad \text{et} \quad h_2 = -\frac{R_2 d}{n(R_2 - R_1) + (n-1)d},$$

comptées dans le sens de la propagation de la lumière à partir respectivement des points d'intersection O_1 et O_2 de l'axe principal de la lentille avec ses faces avant et arrière. Par exemple, pour une lentille biconvexe ($R_1 > 0$, $R_2 < 0$) ou bien biconcave ($R_1 < 0$, $R_2 > 0$) $h_1 > 0$ et $h_2 < 0$, autrement dit, le point principal H_1 est à droite du point O_1 et le point principal H_2 à gauche du point O_2.

Si $(n-1)d \ll n\,|R_2 - R_1|$, on peut s'aider des formules approchées:

$$h_1 = \frac{R_1 d}{n(R_1 - R_2)} \quad \text{et} \quad h_2 = \frac{R_2 d}{n(R_1 - R_2)}.$$

10° La puissance Φ et la distance focale f du système centré de deux lentilles minces de puissances Φ_1 et Φ_2, situées à la distance d l'une de l'autre, sont:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 - \Phi_1\Phi_2 d, \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2},$$

où $f_1 = 1/\Phi_1$ et $f_2 = 1/\Phi_2$ sont les distances focales des deux lentilles. Les positions des points principaux (cf. 9°) sont:

$$h_1 = d\frac{\Phi_2}{\Phi} = \frac{fd}{f_2} = \frac{f_1 d}{f_1 + f_2 - d},$$

$$h_2 = -d\frac{\Phi_1}{\Phi} = -\frac{fd}{f_1} = -\frac{f_2 d}{f_1 + f_2 - d},$$

où h_1 et h_2 sont comptées à partir des centres optiques de la première et de la seconde lentille respectivement. En particulier, pour deux lentilles minces accolées ($d = 0$),

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2; \quad f = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2}; \quad h_1 = h_2 = 0.$$

6. Principaux instruments d'optique

1° La destination des instruments d'optique est d'obtenir sur un écran ou dans des dispositifs sensibles à la lumière (œil, films, etc.) des images nettes d'objets volumineux éloignés, de très petits objets rapprochés, de menus détails d'objets volumineux rapprochés, d'objets normaux vus à l'œil aux propriétés optiques anomales, d'objets projetés sur de grands écrans. Parmi les instruments d'optique on distingue les lunettes astronomiques (y compris les télescopes), les loupes, microscopes, lunettes, appareils de projection.

2° Les instruments d'optique agrandissent l'angle de vision pour l'image par comparaison avec l'angle de vision correspondant à l'objet considéré. On appelle *angle de vision* l'angle sous lequel dans le centre optique de l'œil convergent les rayons issus des points marginaux de l'objet ou de son image. Le *grossissement de l'instrument* d'optique est:

$$N = \frac{\operatorname{tg} \varphi_i}{\operatorname{tg} \varphi_0},$$

où φ_0 et φ_i sont respectivement les angles de vision pour l'objet et pour son image.

3° Les instruments d'optique donnent habituellement une image bidimensionnelle (plane) des objets tridimensionnels (spatiaux). La limitation de l'angle d'ouverture des faisceaux lumineux (p. 657) issus de l'objet, indispensable pour obtenir une image suffisamment nette, est réalisée à l'aide d'un *diaphragme d'ouverture*. Une ouverture circulaire dans un écran opaque ou bien la monture d'une des lentilles du système peut jouer ce rôle.

4° On appelle *pupille d'entrée* et *pupille de sortie* d'un instrument optique celles des ouvertures (ou de leurs images) qui limitent le plus les angles d'ouverture des faisceaux lumineux (fig. V.6.8) incidant dans l'instrument ou en émergeant. Si le diaphragme d'ouverture se trouve à l'intérieur de l'instrument, son image dans la partie avant (par rapport à l'objet) de l'ins-

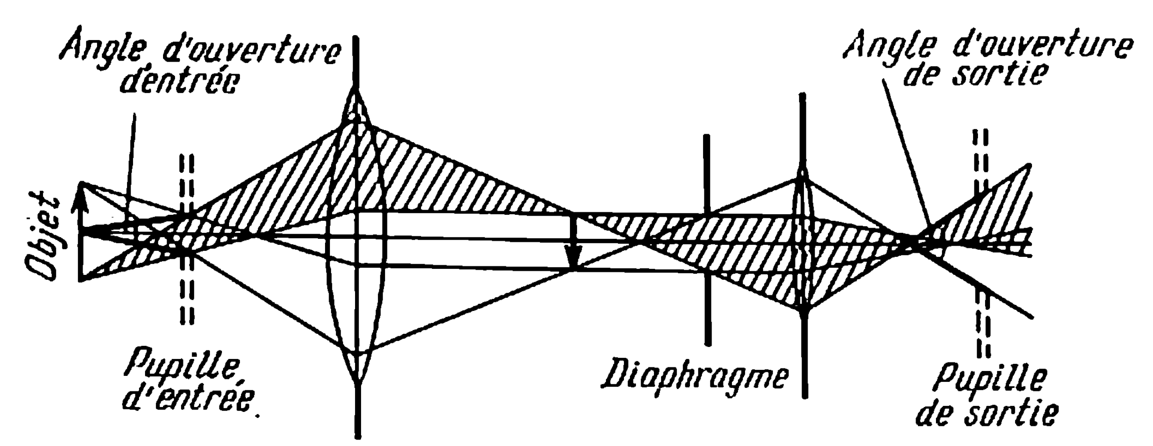


FIG. V.6.8.

trument sert de pupille d'entrée, alors que l'image dans la partie arrière sert de pupille de sortie.

5° L'angle sous lequel est vu le diamètre d'une pupille d'entrée à partir du point d'intersection de l'axe principal de l'instrument avec le plan objet est appelé ***angle d'ouverture d'entrée.*** L'angle sous lequel est vu le diamètre d'une pupille de sortie à partir du point d'intersection de l'axe principal avec le plan image est appelé ***angle d'ouverture de sortie.***

Pour limiter le champ visuel (dans le plan objet), on utilise, en plus du diaphragme d'ouverture, un ***diaphragme du champ visuel*** (par exemple la monture de l'une des lentilles du système peut jouer ce rôle). Le contour réel du diaphragme du champ visuel ou bien son image dans la partie du système disposée entre ce diaphragme et l'objet est appelé ***lucarne d'entrée.*** La diaphragmation la plus nette du champ visuel a lieu quand les plans de la lucarne et de l'objet coïncident.

6° Le rapport de l'aire de la pupille d'entrée au carré de la distance focale de la lentille avant (par rapport à l'objet), qui est l'***objectif de l'instrument d'optique***, est appelé ***intensité lumineuse (intensité lumineuse géométrique) I*** de l'objectif. L'éclairement (p. 676) de l'image d'un objet éloigné est:

$$E \backsim I.$$

Le rapport du diamètre de la pupille d'entrée à la distance focale de l'objectif est appelé ***ouverture relative de l'objectif*** Ω. L'éclairement de l'image d'un objet éloigné est:

$$E \backsim \Omega^2.$$

7° La loupe comporte une ou plusieurs lentilles avec une faible distance focale ($f = 10 \div 100$ mm). On dispose habituelle-

ment l'objet au voisinage du foyer avant de la loupe, de sorte que son image droite virtuelle agrandie dans la loupe se forme à l'infini, autrement dit, elle peut être examinée à l'œil sans effort d'accommodation. Le grossissement de la loupe $N = D/f$, où D est la *distance minimale de vision distincte* (pour un œil normal $D = 250$ mm).

8° Le *microscope* comporte deux systèmes optiques (une ou plusieurs lentilles): un *objectif* et un *oculaire* séparés par une distance considérable devant f_1 et f_2. Un petit objet est placé au voisinage du foyer de l'objectif, qui donne une image réelle renversée très agrandie, que l'on examine à l'aide de l'oculaire, jouant le rôle de loupe.

Le grossissement du microscope est:

$$N = \frac{\Delta}{f_1} \frac{D}{f_2},$$

où f_1 et f_2 sont les distances focales de l'objectif et de l'oculaire, Δ la distance entre le foyer arrière de l'objectif et le foyer avant de l'oculaire, D la distance minimale de vision distincte.

Pour de petites f_1 et f_2 la grandeur N peut être de l'ordre de 10^3. Les phénomènes de diffraction limitent (p. 672) la grandeur N. L'éclairement de l'objet dans le microscope par de larges faisceaux lumineux (pour augmenter le pouvoir séparateur du microscope, p. 673) s'opère à l'aide du *condenseur* dont le foyer est disposé dans le plan objet. L'objectif doit satisfaire à la condition d'aplanétisme (p. 669) pour les points qui sont près de son foyer et encore être achromatique (p. 671). La valeur de l'angle d'ouverture du faisceau lumineux dirigé de l'objet vers l'objectif du microscope est limitée par le phénomène de réflexion totale de la lumière par la face supérieure du couvre-objet. Afin d'augmenter cet angle ainsi que le pouvoir séparateur du microscope, on utilise des objectifs à immersion (p. 673).

9° Le *télescope* comporte deux systèmes optiques (une ou plusieurs lentilles): l'objectif et l'oculaire. L'image réelle renversée diminuée d'un objet éloigné donnée par l'objectif est examinée à l'aide de l'oculaire jouant le rôle de loupe. A ces fins le plan focal avant de l'oculaire est mis en coïncidence avec le plan focal arrière de l'objectif *(système télescopique)*.

Le grossissement du système télescopique est:

$$N = \frac{f_1}{f_2},$$

où f_1 et f_2 sont les distances focales de l'objectif et de l'oculaire.

Dans les *lunettes astronomiques* destinées à l'examen d'objets terrestres éloignés, on introduit encore un système optique complémentaire. Ce système redresse l'image renversée de l'objet.

Le diamètre de la pupille de sortie des lunettes astronomiques et des télescopes ne doit pas dépasser le diamètre de la pupille de l'œil ($d_0 \approx 6 \div 8$ mm lors des observations nocturnes et $d_0 \approx$ $\approx 2 \div 3$ mm lors des observations diurnes), sinon la partie de la lumière qui traverse le système optique ne tombera pas dans l'œil de l'observateur. Le rapport optimal entre les diamètres d_1 et d_2 de l'objectif et de l'oculaire du système télescopique est: $\frac{d_1}{d_2} = \frac{f_1}{f_2} = N$, où $d_2 \leqslant d_0$. Dans ce cas les diamètres des pupilles d'entrée et de sortie sont égaux à d_1 et d_2 respectivement. La limite supérieure du grossissement du télescope avec un objectif de diamètre donné est délimitée par la diffraction de la lumière produite par la pupille de sortie dont le diamètre à cause de celle-ci ne doit pas être moins de 1 mm.

10° On appelle ***appareils spectroscopiques*** les instruments d'optique servant à obtenir et à étudier la décomposition spectrale suivant les fréquences (ou les longueurs d'onde) d'un rayonnement électromagnétique de la gamme optique (c'est-à-dire infrarouge, visible et ultraviolette).

Le système optique des appareils spectroscopiques donnant la décomposition spatiale est constitué d'une source lumineuse: étroite fente d'entrée sur laquelle tombe le rayonnement à étudier, d'un objectif avant (*collimateur*), d'un élément dispersif et d'un objectif arrière (*objectif de chambre*). En tant qu'éléments dispersifs on utilise les prismes, les réseaux de diffraction, l'étalon de Fabry-Pérot, l'étalon de Michelson, etc. Les appareils spectroscopiques sont dits ***appareils à prismes***, ***à réseau*** et ***interférentiels***. Dans les appareils spectroscopiques à prismes les prismes sont habituellement disposés sous l'angle de minimum de déviation (p. 654). Le collimateur transforme le faisceau lumineux divergent issu de la fente d'entrée en un faisceau parallèle incident sur l'élément dispersif. Dans le plan focal arrière de l'objectif de chambre se forme un *spectre* représentant un système continu d'images de la fente d'entrée en lumière chromatique de différentes fréquences. Dans les *spectroscopes* le spectre est observé visuellement, dans les *spectrographes* il est enregistré par photographie ou à l'aide de multiplicateurs d'électrons. A l'aide des *spectromètres* on mesure l'intensité du rayonnement provenant d'une fente étroite disposée dans le plan focal d'un objectif de chambre.

11° On appelle *dispersion angulaire* d'un appareil spectroscopique la grandeur

$$D = \frac{d\varphi}{d\lambda},$$

où $d\varphi$ est la distance angulaire, autrement dit, la différence d'angles à la sortie du prisme (ou du réseau de diffraction) entre les rayons lumineux avec des longueurs d'onde égales à λ et $\lambda + d\lambda$ dans le vide. La dispersion angulaire du réseau de diffraction dans un spectre d'ordre m (p. 645) est:

$$D = \frac{m}{Z \cos \varphi},$$

où Z est la période du réseau.

On appelle *dispersion linéaire* d'un appareil spectroscopique la grandeur

$$D^* = \frac{dl}{d\lambda},$$

où dl est la distance entre les raies du spectre correspondant à une lumière avec des longueurs d'onde comprises entre λ et $\lambda + d\lambda$. La dispersion linéaire de l'appareil spectroscopique dépend de sa dispersion angulaire et de la distance focale de l'objectif de chambre: $D^* = D \cdot f_2$.

7. Défauts des systèmes optiques

1° Les déformations des images dans les systèmes optiques dues à l'utilisation de larges faisceaux de rayons lumineux intenses et de la lumière non monochromatique sont appelées *aberrations*.

On appelle *aberration géométrique* le défaut de l'image apparaissant dans le système optique à cause de l'utilisation de larges faisceaux ou de faisceaux inclinés de lumière monochromatique. L'*aberration chromatique* est la déformation de l'image due au phénomène de dispersion de la lumière dans les lentilles du système optique si la lumière utilisée est blanche.

2° L'utilisation de larges faisceaux de rayons dans les systèmes optiques provoque l'*aberration sphérique* et la *coma* des images.

Par suite de l'aberration sphérique le point S de l'objet (fig. V.6.9) situé sur l'axe principal du système se représente en forme de *cercle de dispersion*. Le rayon de ce cercle est appelé *aberra-*

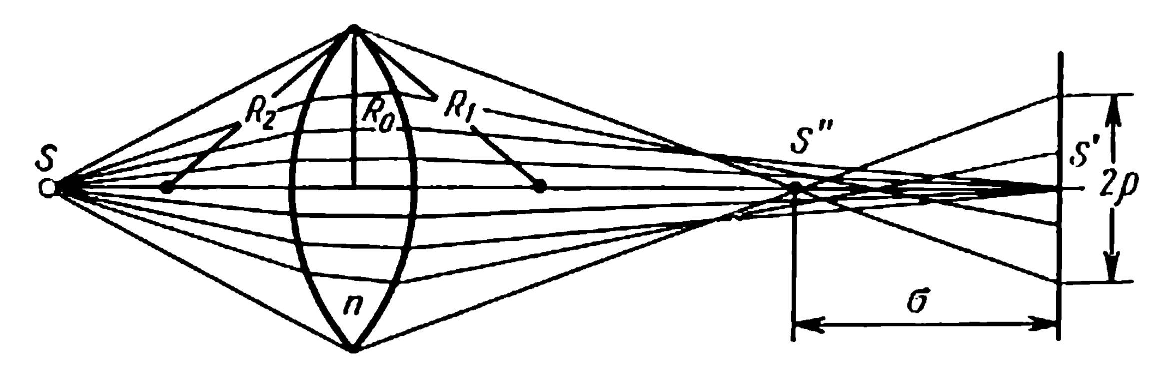


FIG. V.6.9.

tion sphérique transversale ρ. La distance σ entre les images S' et S'' du point S, formées respectivement par les rayons paraxiaux et par les rayons marginaux du faisceau, qui passe par la pupille d'entrée du système, est appelée *aberration sphérique longitudinale*.

On appelle la surface enveloppant tous les rayons du faisceau réfracté *surface caustique* ou *caustique* et sa section par le plan passant par un rayon, *ligne caustique*. Dans le cas d'aberration sphérique la caustique a un axe de symétrie.

3° Les aberrations sphériques de la lentille pour l'image obtenue en son foyer principal (c'est-à-dire pour l'image d'un objet éloigné formée à l'aide d'un large faisceau de rayons parallèles à l'axe principal de la lentille) sont appelées *aberrations sphériques principales*.

Pour une lentille biconvexe avec les rayons de courbure R_1 et R_2 ($R_1 > 0$; $R_2 < 0$) les aberrations sphériques principales sont:

$$\rho = KR_0^3, \quad \sigma = -f_2 KR_0^2,$$

où

$$K = \frac{n^2}{2}\left\{\frac{1}{R_1^2}\left[1 - \frac{2(n^2-1)}{n^3}\right] + \frac{1}{R_1 R_2}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n} - 2\right) + \frac{1}{R_2^2}\right\},$$

R_0 est le rayon de la lentille, n l'indice de réfraction relatif de la lentille, f_2 la distance focale principale. Avec l'augmentation de n pour une forme donnée de la lentille la valeur absolue de σ diminue. L'aberration diminue également si la surface de la lentille tournée vers la source possède la plus grande courbure ($R_1 < |R_2|$). Si $R_1 = -R_2 = R$, on a:

$$K = \frac{1}{R^2}\left(2n^2 - 2n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2}\right).$$

Pour une lentille plano-convexe tournée avec sa face convexe vers l'objet ($R_1 = R$; $R_2 = \infty$),

$$K = \frac{n^2}{2R^2}\left[1 - \frac{2(n^2-1)}{n^3}\right].$$

L'aberration est minimale lorsque

$$\frac{R_1}{R_2} = -\frac{4 + n - 2n^2}{2n^2 + n}.$$

4° Pour une lentille convergente $\sigma < 0$, pour une lentille divergente $\sigma > 0$. C'est pourquoi l'aberration sphérique peut être considérablement diminuée en remplaçant la lentille simple par un système de lentilles convergentes et divergentes choisies de façon appropriée.

5° On appelle *coma* l'aberration géométrique, apparaissant lors du passage à travers le système optique de larges faisceaux lumineux provenant d'un point objet se trouvant à une certaine distance de l'axe principal du système. L'image de ce point a la forme d'une tâche allongée et non uniformément éclairée, rappelant plus ou moins une comète. A la coma correspond une caustique qui n'a qu'un seul plan de symétrie passant par le point objet en dehors de l'axe et l'axe optique du système.

6° Si l'aberration sphérique d'un point S situé sur l'axe principal du système est corrigée, la coma de tous les points d'un petit objet situés au voisinage de S dans le plan perpendiculaire à l'axe principal peut être corrigée également. Dans ce cas il faut que soit satisfaite la *condition des sinus d'Abbe:*

$$y_1 n_1 \sin\psi_1 = y_2 n_2 \sin\psi_2.$$

Ici n_1 et n_2 sont respectivement les indices de réfraction absolus du milieu objet et du milieu image, y_1 et y_2 les distances du point considéré de l'objet et de son image jusqu'à l'axe principal du système, ψ_1 et ψ_2 les angles maximaux entre l'axe principal et les rayons conjugués (fig. V.6.5). La condition des sinus découle de la condition du tautochronisme (p. 600) de tous les chemins des rayons formant l'image de chaque point objet. Pour les rayons paraxiaux les angles ψ_1 et ψ_2 sont faibles, de sorte que $\sin\psi_1 = \psi_1$, $\sin\psi_2 = \psi_2$ et la condition des sinus se transforme en relation de Lagrange-Helmholtz (p. 657).

Seul un couple de plans conjugués du système, dits *plans aplanétiques*, vérifie la condition des sinus. Par conséquent, l'image sans aberration d'un petit objet peut être obtenue à l'aide d'un large faisceau lumineux seulement pour une distance tout à

fait déterminée (calculée) de l'objet au système optique. C'est pourquoi les *lentilles aplanétiques (aplanats)* sont largement utilisées en tant qu'objectifs des microscopes, dans lesquels on place toujours le petit objet à étudier au voisinage du foyer principal avant de l'objectif.

7° L'utilisation de faisceaux inclinés (y compris les pinceaux étroits) de rayons provenant de points objets éloignés de l'axe optique du système provoque l'astigmatisme des faisceaux inclinés, la courbure et la distorsion de l'image.

8° L'*astigmatisme des faisceaux inclinés* consiste en ce qu'ils ne donnent pas d'images stigmatiques (p. 652). Si l'axe du faisceau est situé dans le plan méridien, c'est-à-dire dans le plan passant par l'axe optique du système, l'image d'un point objet a la forme d'une *ellipse de dispersion*, dont l'excentricité dépend de la distance séparant le plan image du foyer principal du système. Dans certaines positions du plan image l'ellipse dégénère en segment de droite disposé dans le plan méridien ou bien en segment de droite disposé dans le plan sagittal perpendiculaire au plan méridien, ou bien en cercle de dispersion.

9° La *courbure d'une image* plane se manifeste dans le fait que l'image des points en dehors de l'axe d'un objet plan n'est pas plane. Elle présente une certaine courbure, d'autant plus notable que plus éloignés sont les points de l'axe optique du système. Habituellement la courbure est corrigée en même temps que l'astigmatisme dans des systèmes de lentilles spéciaux appelés *anastigmats*.

10° La variation du grandissement Y en différents points de l'image produit la déformation de celle-ci, appelée *distorsion*. Si Y diminue du centre du champ de l'image aux bords, on a une *distorsion en barillet* (fig. V.6.10, *b*); si Y décroît dans le sens contraire, une *distorsion en croissant* (fig. V.6.10, *c*). Ces deux distorsions sont corrigées à l'aide de systèmes de lentilles spéciaux.

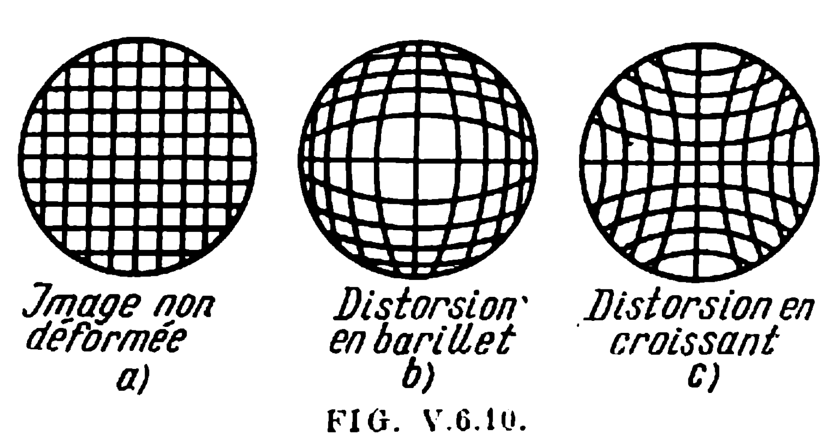


FIG. V.6.10.

11° L'aberration chromatique est propre aux systèmes optiques non corrigés, possédant d'éléments réfractant la lumière (les lentilles et les prismes). On distingue l'*aberration chromatique de position (aberration chromatique longitudinale)* et l'*aberration chromatique de grandissement (aberration chromatique transversale)*. L'aberration chromatique longitudinale est liée à la variation de la position du foyer principal du système en fonction de la longueur d'onde de la lumière. Elle se manifeste en ce que l'image d'une source ponctuelle axiale de lumière blanche, obtenue même avec un faisceau paraxial, a la forme d'anneaux concentriques colorés. La succession des couleurs des anneaux dépend de la position de l'écran sur lequel l'image est obtenue. L'aberration chromatique transversale se manifeste dans le fait qu'en lumière blanche l'image d'un petit objet perpendiculaire à l'axe principal est entourée d'un liséré de couleur.

L'aberration chromatique transversale est liée à l'aberration chromatique longitudinale et est corrigée, en même temps que cette dernière, seulement dans une lentille mince, pour laquelle la position du plan principal ne dépend pas de la longueur d'onde de la lumière. Dans une lentille épaisse la superposition des foyers principaux pour les longueurs d'onde λ_1 et λ_2 n'élimine pour ces ondes que l'aberration longitudinale. Dans ce cas pour les autres longueurs d'onde, l'*aberration chromatique longitudinale résiduelle (spectre secondaire)* reste.

12° L'objectif est dit *achromatique (achromat)* si pour celui-ci l'aberration chromatique longitudinale ainsi que l'aberration sphérique sont supprimées pour deux longueurs d'onde λ_1 et λ_2. Un système de deux lentilles accolées sera achromatisé si pour la lumière de longueur d'onde λ_1 les puissances Φ_1 et Φ_2 de la première et de la seconde lentille sont liées à la puissance Φ du système par les relations:

$$\Phi_1 = \frac{\Phi}{1 - \dfrac{n_2 - 1}{n_1 - 1}\,\dfrac{\Delta n_1}{\Delta n_2}} \quad \text{et} \quad \Phi_2 = \frac{\Phi}{1 - \dfrac{n_1 - 1}{n_2 - 1}\,\dfrac{\Delta n_2}{\Delta n_1}},$$

n_1 et n_2 sont les indices de réfraction absolus des matériaux constituant les lentilles pour la lumière de longueur d'onde λ_1, $n_1 + \Delta n_1$ et $n_2 + \Delta n_2$, ceux de la lumière de longueur d'onde λ_2 (on suppose que le système est situé dans l'air).

Des objectifs plus parfaits sont les *objectifs apochromatiques (apochromats)* dans lesquels l'aberration chromatique longitudinale est corrigée pour trois différentes valeurs de λ. Les objectifs apochromatiques ont une aberration chromatique résiduelle beaucoup plus faible que celle des objectifs achromatiques.

8. Pouvoir séparateur des instruments d'optique

1° Dans tout système optique l'image d'un objet est obtenue à l'aide d'un faisceau de rayons délimité par la pupille d'entrée, autrement dit, elle est due à la diffraction de la lumière dans le système. C'est pourquoi l'image ne peut pas être parfaitement stigmatique, même dans un système optique exempt de toutes sortes d'aberrations. Du fait de la diffraction, chaque point objet lumineux donne comme image une tache lumineuse centrale entourée d'anneaux d'interférence alternativement clairs et sombres (p. 642). Ce phénomène limite la possibilité de distinguer les menus détails de l'objet sur l'image.

2° *Critère de Rayleigh:* les images de deux points proches autolumineux (incohérents) peuvent être encore admises séparées si le centre de la tache de diffraction correspondant à un point coïncide avec le premier minimum de diffraction correspondant à l'autre point.

Conformément au critère de Rayleigh, la distance angulaire minimale $\delta\varphi$ entre deux sources ponctuelles éloignées, dont les images dans l'objectif du télescope ou de la lunette astronomique peuvent encore être admises séparées, est égale à

$$\delta\varphi = 1{,}22\,\frac{\lambda}{d},$$

où λ est la longueur d'onde lumineuse, d le diamètre de la pupille d'entrée. La grandeur

$$R_0 = \frac{1}{\delta\varphi} = \frac{d}{1{,}22\,\lambda}$$

est appelée ***pouvoir séparateur de l'objectif***. Le pouvoir séparateur R_i de l'instrument en entier dépend également du pouvoir séparateur du récepteur R_r (de l'œil, de la couche d'émulsion photographique, etc.). On peut approximativement admettre que

$$\frac{1}{R_i} = \frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_r}.$$

Le ***pouvoir séparateur de l'œil*** est délimité par la structure granulaire de la rétine, ainsi que par la diffraction de la lumière passant par la pupille. Lors d'un bon éclairement, le diamètre pupillaire $d \approx 2$ mm et l'angle limite de séparation dû à la diffraction de la lumière par la pupille est $\delta\varphi = 1'$, ce qui coïncide avec le pouvoir séparateur de la rétine. Le pouvoir séparateur

d'une couche d'émulsion photographique est délimité par les dimensions des grains et par la diffusion de la lumière due à la grande différence des indices de réfraction de la gélatine et des cristaux d'halogénure d'argent.

On choisit le grossissement de l'oculaire du télescope ou de la lunette de telle sorte que tous les détails de l'objet séparés dans l'objectif soient également séparés dans le récepteur.

3° On caractérise le *pouvoir séparateur du microscope* par la grandeur δl de la distance minimale entre deux points objets séparés sur l'image. Pour un objet autolumineux ces points peuvent être considérés comme des sources lumineuses indépendantes (incohérentes) et

$$\delta l = \frac{0{,}61\ \lambda_0}{n \sin \psi},$$

où n est l'indice de réfraction absolu du milieu entre l'objet et l'objectif, λ_0 la longueur d'onde dans le vide, 2ψ l'angle d'ouverture et $n \sin \psi$ *l'ouverture numérique de l'objectif*. Généralement, on examine dans le microscope des objets éclairés et non des objets autolumineux. C'est pourquoi en fonction des conditions d'éclairement, la lumière diffusée par différents points objets est plus ou moins cohérente. Cependant, dans ce cas aussi, dans des conditions optimales d'éclairement la distance minimale entre deux points séparés de l'objet est:

$$\delta l = \frac{0{,}5\ \lambda_0}{n \sin \psi}.$$

Le pouvoir séparateur du microscope peut être augmenté au compte de a) la diminution de λ_0 *(microscopie ultraviolette)*; b) l'accroissement de l'ouverture numérique de l'objectif en interposant dans l'espace entre le couvre-objet et l'objectif un liquide ayant un indice de réfraction absolu élevé *(objectif à immersion)*, d'ordinaire $n = 1{,}4\text{-}1{,}6$ pour les liquides d'immersion.

4° Les valeurs limites des pouvoirs séparateurs des instruments d'optique indiquées ci-dessus résultent des considérations théoriques. En pratique, elles sont toujours moindres par suite des effets des aberrations apparaissant dans les systèmes optiques des instruments, ainsi que de l'absence de contraste parfait entre l'objet et le fond. Le pouvoir séparateur de l'œil diminue de plus lors de l'éclairement insuffisant de l'objet.

5° On peut utiliser les instruments d'optique en dehors des limites de leur pouvoir séparateur, mais non tant pour percevoir la forme exacte ou les détails des objets observés que pour déceler ces objets et étudier leurs mouvements.

6° De très petites (de l'ordre de 10^{-6} cm) particules colloïdales, dont les dimensions sont $d \ll \lambda$, sont observées à l'aide de l'*ultramicroscope* par la *méthode d'éclairage latéral* (ou *à fond noir).* Dans cette méthode la direction d'observation est perpendiculaire à la direction d'éclairement de l'objet et l'on observe des rayons lumineux non rectilignes mais diffusés par les microparticules (effet Tyndall, p. 711). Le schéma de l'ultramicroscope est montré fig. V.6.11.

7° Conformément au critère de Rayleigh, deux raies spectrales voisines obtenues dans un appareil spectroscopique peuvent encore être admises séparées si la distance entre les maximums des intensités pour ces raies n'est pas plus petite que la largeur de ces raies elles-mêmes (p. 707).

Le *pouvoir séparateur d'un appareil spectroscopique* est de

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda},$$

et λ et $\lambda + \delta\lambda$ sont les longueurs d'onde des raies que cet appareil spectroscopique est encore capable de séparer. La grandeur R est déterminée par les propriétés de l'élément dispersif et du récepteur, par les phénomènes de diffraction et les aberrations du système optique.

8° Le *pouvoir séparateur du prisme* d'un appareil spectroscopique, dans lequel le prisme lui-même joue le rôle de diaphragme d'ouverture, est égal à

$$R = d_2 \frac{d\varphi}{d\lambda},$$

où φ est l'angle de déviation de la lumière de longueur d'onde λ par le prisme et d_2 la largeur du faisceau lumineux à la sortie du prisme (mesurée dans le plan perpendiculaire à l'arête réfringente du prisme). Si, de plus, le prisme est établi sous l'angle de minimum de déviation, on a:

$$R = a \frac{dn}{d\lambda},$$

où a est la longueur de la base du prisme et n son indice de réfraction absolu.

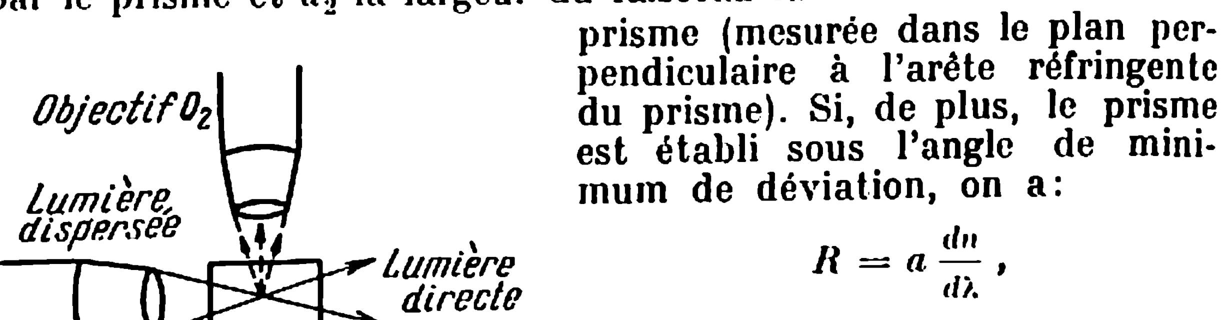


FIG. V.6.11.

9. Eléments de photométrie

1° On appelle *photométrie* le domaine de l'optique dans lequel sont considérées les mesures de l'énergie transportée par les ondes électromagnétiques de la gamme optique (longueurs d'onde de 10^{-8} à $3,4 \cdot 10^{-3}$ m).

Dans un sens plus étroit, considéré ci-dessous, on comprend sous photométrie la partie de l'optique qui est consacrée à la mesure de l'action de la lumière visible sur l'œil de l'homme *(mesures photométriques)*. Pour caractériser cette action, on introduit les *grandeurs photométriques* suivantes: flux lumineux, intensité de la lumière, éclairement, luminosité, luminance (brillance).

2° L'action de la lumière visible sur l'œil dépend non seulement des caractéristiques physiques de la lumière (de la densité de flux d'énergie, de la fréquence ou de la composition spectrale) mais aussi de l'*efficacité lumineuse (*la *sensibilité spectrale* de l'œil) V_λ, égale au quotient du flux lumineux de rayonnement monochromatique par le flux énergétique de ce rayonnement. La grandeur $K_\lambda = V_\lambda/(V_\lambda)_{max}$ est appelée l'*efficacité lumineuse relative (sensibilité spectrale relative* de l'œil). Pour l'œil normal $K_\lambda = 1$ lorsque $\lambda = 5,55 \cdot 10^{-7}$ m = 5 550 Å. La courbe montrant la dépendance de K_λ vis-à-vis de λ *(courbe d'efficacité lumineuse)* est montrée fig. V.6.12.

3° On appelle *flux lumineux* Φ la puissance du rayonnement lumineux (visible) évaluée par son action sur l'œil normal. Le flux lumineux est mesuré en *lumens* (p. 931). Pour un rayonnement monochromatique correspondant au maximum d'efficacité lumineuse (λ = 5 550 Å), le flux lumineux est égal à 683 lm, si la puissance de rayonnement est égale à 1 W.

Le flux lumineux Φ_{tot} à travers une surface fermée arbitraire embrassant la source lumineuse est égal à la puissance du rayonnement lumineux de ce dernier et est appelé *flux lumineux total* de la source lumineuse.

La grandeur Φ_{tot} caractérisant la source lumineuse ne peut être augmentée par aucun système optique. L'action de ce dernier conduit uniquement à la redistribution du flux lumineux suivant les directions choisies au compte d'autres.

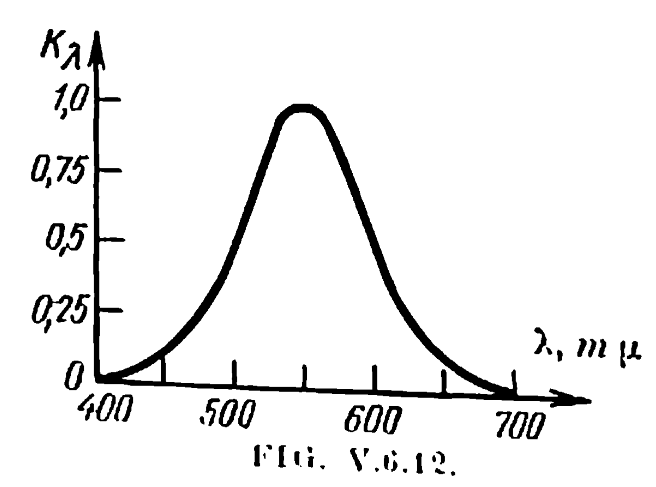


FIG. V.6.12.

La *densité spectrale de puissance lumineuse* de la source de rayonnement non monochro-

matique est la grandeur $d\Phi/d\lambda$; $d\Phi$ est le flux lumineux total de la source pour un intervalle de longueurs d'onde entre λ et $\lambda + d\lambda$.

4° On appelle *source lumineuse ponctuelle* la source émettant des ondes sphériques (p. 594). L'*intensité lumineuse* d'une source ponctuelle est la grandeur I numériquement égale au flux lumineux émis par cette source dans un angle solide unité. Si la source ponctuelle émet uniformément la lumière dans toutes les directions, son intensité lumineuse est alors:

$$I = \frac{\Phi_{tot}}{4\pi}.$$

Dans le cas d'une source lumineuse arbitraire l'intensité lumineuse I d'un petit élément ΔS de sa surface dans une direction donnée est:

$$I = \frac{d\Phi}{d\Omega},$$

où $d\Phi$ est le flux lumineux émis par l'élément de surface ΔS dans une direction donnée dans l'angle solide $d\Omega$.

On appelle *intensité lumineuse sphérique moyenne* d'une source arbitraire la grandeur

$$\bar{I} = \frac{\Phi_{tot}}{4\pi},$$

où Φ_{tot} est le flux lumineux total de la source. Si la source émet uniformément (de façon isotrope) la lumière dans toutes les directions, on a $\bar{I} = I$. L'intensité lumineuse est mesurée en *candelas* (p. 931).

5° On appelle *éclairement* E le quotient du flux lumineux que reçoit une surface par son aire dS:

$$E = \frac{d\Phi}{dS}.$$

Dans le cas d'une source lumineuse ponctuelle

$$E = I\,\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{R}}{R^3} = \frac{I\cos\varphi}{R^2},$$

où $\mathbf{R}$ est le rayon vecteur mené de la source à l'élément dS de surface éclairée, $\mathbf{n}$ le vecteur unité normal à la surface dS, φ l'angle entre $\mathbf{R}$ et $\mathbf{n}$ (angle d'incidence).

Si sur la surface tombe une onde lumineuse plane, on a alors

$$E = E_0 \cos\varphi,$$

où E_0 est l'éclairement de la surface normale à la direction de propagation de l'onde, φ l'angle entre cette surface et la surface considérée. L'éclairement est mesuré en *lux* et en *phots* (p. 931).

6° La *quantité d'éclairement (l'exposition)* H est le produit de l'éclairement E de la surface par sa durée t (en photographie, la *durée d'exposition* ou *pose)* s'exprime par

$$H = Et.$$

7° On appelle *luminance (brillance)* B_φ la densité superficielle d'intensité lumineuse dans une direction donnée, égale au quotient de l'intensité lumineuse par l'aire de projection de la surface lumineuse sur le plan perpendiculaire à cette direction:

$$B_\varphi = \frac{dI}{dS \cos \varphi} = \frac{d^2\Phi}{dS\, d\Omega \cos\varphi},$$

où dI est l'intensité lumineuse de l'élément dS de surface lumineuse dans la direction formant l'angle φ avec la normale à l'élément dS, $d^2\Phi$ le flux lumineux émis par l'élément dS dans l'angle solide $d\Omega$ dans la même direction. La luminance est mesurée en *nits* et en *stilbs* (p. 931).

La source lumineuse pour laquelle B_φ ne dépend pas de φ est dite *source obéissant à la loi de Lambert.* Strictement parlant, cette condition n'est vérifiée que par le corps noir (p. 716) et les surfaces ou les milieux diffusant uniformément la lumière dans toutes les directions *(diffuseurs parfaits)*.

8° On appelle *luminosité (émittance lumineuse)* R la densité superficielle d'un flux lumineux émis par une surface. Elle est égale au quotient du flux lumineux $d\Phi$ par l'élément dS:

$$R = \frac{d\Phi}{dS}.$$

La luminosité s'exprime en lux et phots (p. 931). La relation entre la luminosité et la luminance est:

$$R = 2\pi \int_0^{\pi/2} B_\varphi \cos \varphi \sin \varphi \, d\varphi.$$

Pour les sources obéissant à la loi de Lambert, $R = \pi B$.

CHAPITRE 7

Polarisation de la lumière

1. Procédés d'obtention d'une lumière polarisée

1° La lumière constituée d'ondes électromagnétiques, dont les vecteurs **E** et **H** (satisfaisant aux conditions de perpendicularité réciproque et de perpendicularité à la direction de propagation de l'onde) oscillent uniformément dans toutes les directions possibles, est dite *lumière non polarisée* ou *lumière naturelle.*

Chaque train d'ondes (p. 594) émis par un atome dans une radiation est polarisé dans un plan. La radiation spontanée d'une infinité d'atomes représente une lumière naturelle.

2° Dans tous les procédés de transformation de la lumière naturelle en lumière polarisée on choisit une partie des composantes ou toutes les composantes de la lumière naturelle qui ont une orientation déterminée de polarisation. On obtient dans le premier cas une onde à polarisation plane, dans le second une onde polarisée partiellement avec une orientation privilégiée de son plan de polarisation.

Les dispositifs servant à la transformation de la lumière naturelle ou polarisée partiellement en lumière polarisée dans un plan sont appelés *polariseurs.* Leur principe d'action est fondé soit sur le phénomène de polarisation de la lumière lors de la réflexion ou de la réfraction par la surface de séparation de deux diélectriques transparents isotropes (p. 617), soit sur le phénomène d'anisotropie optique et la biréfringence (p. 685), ainsi que sur le phénomène de dichroïsme (p. 688).

3° Un milieu est dit *optiquement anisotrope* si ses propriétés optiques (en particulier la vitesse de phase de la lumière et l'indice de réfraction absolu) dépendent de la direction de propagation de l'onde lumineuse et du caractère de sa polarisation. Les

lois de la propagation de la lumière dans un milieu sont déterminées par l'interférence de l'onde primaire et des ondelettes émises par les molécules, atomes et ions du milieu par suite de leur polarisation électronique sous l'action du champ de l'onde lumineuse. C'est pourquoi les propriétés optiques du milieu sont conditionnées par les propriétés électriques de ces émetteurs élémentaires, leur disposition réciproque et leur interaction. Suivant leur structure les atomes et les molécules peuvent être électriquement isotropes (leur polarisation ne dépend pas de la direction) ou anisotropes.

4° Dans les conditions normales, les gaz, les liquides et les solides amorphes sont optiquement isotropes, car les molécules de beaucoup d'entre eux, quoique électriquement anisotropes, ont une orientation tout à fait chaotique. Chaque mise en ordre des orientations des molécules anisotropes dans ces milieux conduit à l'apparition d'une anisotropie optique (*anisotropie optique artificielle*, pp. 688-690).

L'anisotropie optique des cristaux peut être conditionnée aussi bien par l'anisotropie électrique des particules les constituant que par l'anisotropie du champ de forces d'interaction des particules. Le caractère de ce champ est lié à la symétrie du réseau cristallin. Tous les cristaux, excepté ceux du système cubique, sont optiquement anisotropes, indépendamment des propriétés électriques des particules les constituant.

Dans la gamme de fréquences optiques, la plupart des cristaux ne sont pas *magnétiques*, autrement dit, leur perméabilité magnétique relative $\mu \approx 1$.

L'anisotropie optique des cristaux non magnétiques, optiquement non actifs (p. 696) et transparents (c'est-à-dire n'absorbant pas la lumière), est due à l'anisotropie de la susceptibilité diélectrique $\varkappa_e$ et de la constante diélectrique relative $\varepsilon = 1 + \varkappa_e$ (en u. SI).

2. Notions d'optique cristalline

1° Pour un cristal optiquement inactif, non magnétique, transparent, optiquement homogène et anisotrope la dépendance de la constante diélectrique relative vis-à-vis de la direction peut être représentée graphiquement. Si l'on mène d'un point arbitraire O du cristal dans toutes les directions possibles les rayons vecteurs **r** dont les modules sont $r = \sqrt{\varepsilon}$, où ε est la constante diélectrique relative du cristal dans la direction **r**, les extrémités des vecteurs **r** seront situées sur la surface d'un ellipsoïde appelé

ellipsoïde des indices ou *indicatrice optique* (fig. V.7.1). Les axes de symétrie de cet ellipsoïde déterminent trois *directions principales* réciproquement perpendiculaires *dans le cristal.* Dans un système cartésien rectangulaire dont les axes Ox, Oy et Oz sont menés suivant les directions principales, l'équation de l'ellipsoïde des indices est de la forme:

$$\frac{x^2}{\varepsilon_x} + \frac{y^2}{\varepsilon_y} + \frac{z^2}{\varepsilon_z} = 1,$$

où ε_x, ε_y et ε_z sont les valeurs de ε suivant les directions principales appelées *valeurs principales de la constante diélectrique* du cristal. En tous les points d'un cristal homogène, satisfaisant aux conditions indiquées ci-dessus, les ellipsoïdes des indices sont identiques, autrement dit, l'orientation et les dimensions de leurs demi-axes sont les mêmes.

2° Dans le cas d'un cristal optiquement isotrope ε ne dépend pas de la direction ($\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon$) et l'ellipsoïde des indices dégénère en sphère de rayon $r = \sqrt{\varepsilon} = n$, où n est l'indice de réfraction absolu du cristal isotrope.

On appelle *axe optique (*ou *binormale)* d'un cristal anisotrope au point O la droite passant par le point O perpendiculairement au plan de la section circulaire de l'ellipsoïde des indices. Dans le cas général l'indicatrice optique a la forme d'un ellipsoïde triaxial ($\varepsilon_x \neq \varepsilon_y \neq \varepsilon_z$), de sorte que par le point O on peut mener deux sections circulaires différentes (les plans *1* et *2* sur la figure V.7.1) et deux axes optiques O_1O_1' et O_2O_2' leur correspondant.

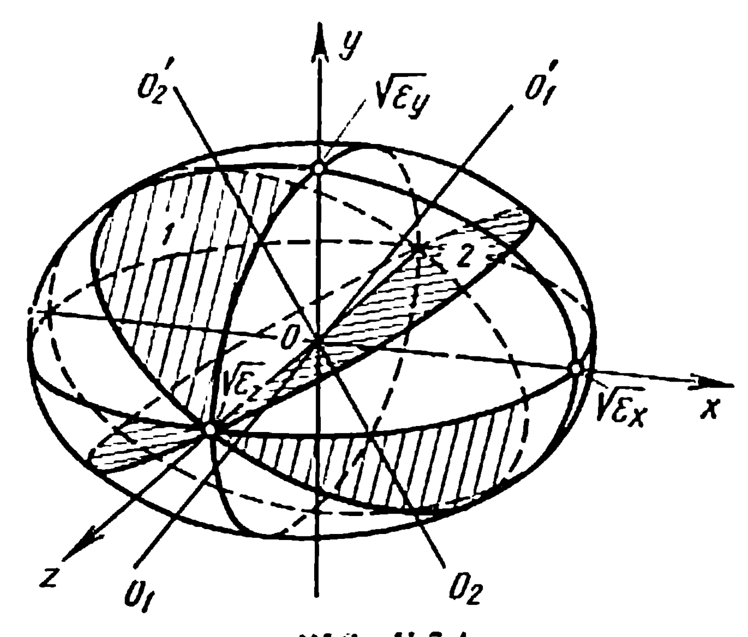


FIG. V.7.1.

Un tel cristal est dit *biaxe*. Si $\varepsilon_x > \varepsilon_z > \varepsilon_y$ (fig. V.7.1), les axes optiques sont situés sur le plan xOy symétriquement par rapport à l'axe Oy. Les axes optiques similaires en différents points du cristal sont parallèles deux par deux, c'est-à-dire caractérisent deux directions privilégiées du biaxe.

3° Si l'indicatrice optique est un ellipsoïde de révolution, le cristal n'a qu'un seul axe optique coïncidant avec l'axe de révolution de l'ellipsoïde et est appelé *uniaxe*. Un uniaxe est ***optiquement positif*** si son axe optique coïncide avec le grand axe de l'ellipsoïde (l'ellipsoïde est allongé suivant l'axe de révolution), et ***optiquement négatif*** s'il coïncide avec le petit axe de l'ellipsoïde (l'ellipsoïde est aplati suivant l'axe de révolution).

4° Dans un cristal optiquement inactif, non magnétique, transparent, la relation entre les projections des vecteurs déplacement électrique **D** et intensité **E** du champ électrique sur les directions principales est de la forme:

$$D_x = \varepsilon_0\varepsilon_x E_x, \quad D_y = \varepsilon_0\varepsilon_y E_y, \quad D_z = \varepsilon_0\varepsilon_z E_z \quad \text{(en u. SI)},$$

$$D_x = \varepsilon_x E_x, \quad D_y = \varepsilon_y E_y, \quad D_z = \varepsilon_z E_z \quad \text{(en u. du système de Gauss)}.$$

Le vecteur **D** coïncide en direction avec le vecteur **E** seulement dans le cas où **E** est parallèle à l'une des directions principales.

5° Les directions des vecteurs **D** et **E** ne coïncidant pas, l'onde monochromatique plane polarisée rectilignement dans un cristal anisotrope est caractérisée par deux trios de vecteurs réciproquement perpendiculaires: **D**, **H**, **v** et **E**, **H**, **v**′ (fig. V.7.2). La vitesse **v**′ coïncide en direction avec le vecteur de Poynting (p. 528) et est égale à la vitesse de transport de l'énergie de l'onde. On l'appelle ***vitesse radiale*** de l'onde. La vitesse **v** est appelée ***vitesse normale*** de l'onde. Elle est égale à la vitesse de propagation de la phase et du front d'onde dans la direction de la normale à cette dernière. La relation entre v et v' est:

$$v' = \frac{v}{\cos\alpha},$$

où α est l'angle formé par les vecteurs **D** et **E**. Si **N** est le vecteur unité de la normale au front d'onde, et **S** le vecteur unité du rayon (c'est-à-dire celui qui coïncide en direction

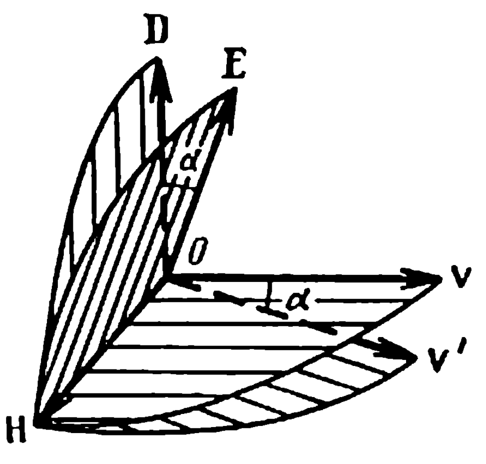


FIG. V.7.2.

avec le vecteur de Poynting), on a en u. du système de Gauss (en u. SI on remplace n^2 par $\varepsilon_0 n^2$)

$$\mathbf{D} = n^2 [\mathbf{E} - \mathbf{N}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{N})]$$

et

$$\mathbf{E} = \frac{1}{n^2 \cos^2 \alpha} [\mathbf{D} - \mathbf{S}(\mathbf{D}\cdot\mathbf{S})],$$

où $n = c/v$ est l'indice de réfraction absolu dans la direction $\mathbf{N}$.

Si $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ sont les vecteurs unités des directions principales du cristal, on a $\mathbf{N} = N_x\mathbf{i} + N_y\mathbf{j} + N_z\mathbf{k}$ et la vitesse normale de l'onde $\mathbf{v}$ dans la direction du vecteur $\mathbf{N}$ vérifie l'*équation des normales de Fresnel:*

$$\frac{N_x^2}{v^2 - b_x^2} + \frac{N_y^2}{v^2 - b_y^2} + \frac{N_z^2}{v^2 - b_z^2} = 0.$$

Et alors pour l'indice de réfraction n dans la direction $\mathbf{N}$

$$\frac{N_x^2}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_x^2}} + \frac{N_y^2}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_y^2}} + \frac{N_z^2}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_z^2}} = 0.$$

Ici $b_x = c/n_x$, $b_y = c/n_y$ et $b_z = c/n_z$ sont les *vitesses de phase principales* de l'onde, égales aux vitesses normales des ondes dont les vecteurs $\mathbf{D}$ sont parallèles aux directions principales correspondantes; c est la vitesse de la lumière dans le vide et $n_x = \sqrt{\varepsilon_x}$, $n_y = \sqrt{\varepsilon_y}$ et $n_z = \sqrt{\varepsilon_z}$ sont les *indices de réfraction principaux* du cristal.

Pour la vitesse radiale $\mathbf{v}'$ dans la direction déterminée par le vecteur unité $\mathbf{S} = S_x\mathbf{i} + S_y\mathbf{j} + S_z\mathbf{k}$,

$$\frac{b_x^2 S_x^2}{v'^2 - b_x^2} + \frac{b_y^2 S_y^2}{v'^2 - b_y^2} + \frac{b_z^2 S_z^2}{v'^2 - b_z^2} = 0.$$

On peut alors trouver l'indice de réfraction du cristal pour le rayon $n' = c/v'$ à partir de l'équation

$$\frac{S_x^2}{n'^2 - n_x^2} + \frac{S_y^2}{n'^2 - n_y^2} + \frac{S_z^2}{n'^2 - n_z^2} = 0.$$

6° Il découle de l'équation des normales de Fresnel que, pour le cas général, dans une direction arbitraire $\mathbf{N}$ deux valeurs différentes v_1 et v_2 de la vitesse normale de l'onde sont possibles. Si

les axes de coordonnées sont choisis de telle sorte que $\varepsilon_x < \varepsilon_y <$ $< \varepsilon_z$, ce qui signifie $b_x > b_y > b_z$, la direction **N** suivant laquelle n'est possible qu'une seule valeur de la vitesse normale $v(v_1 = v_2)$ vérifie la condition:

$$N_x^2 = \frac{b_x^2 - b_y^2}{b_x^2 - b_z^2}, \; N_y = 0 \;\text{ et }\; N_z^2 = \frac{b_y^2 - b_z^2}{b_x^2 - b_z^2}.$$

Il y en a en tout quatre directions **N** de tel genre, correspondant à deux binormales, c'est-à-dire aux axes optiques du biaxe (p. 680). Dans l'uniaxe il y a deux directions **N** citées, correspondant à son unique axe optique.

Si l'on mène du point O dans toutes les directions possibles **N** les vecteurs vitesses normales **v** leur correspondant, les extrémités de ces vecteurs seront situées sur la surface dite *surface des normales*. Son équation dans un système rectangulaire de coordonnées cartésiennes avec son origine au point O et ses axes menés le long des directions principales du cristal est de la forme:

$$(b_y^2 - r^2)(b_z^2 - r^2)\,x^2 + (b_z^2 - r^2)(b_x^2 - r^2)\,y^2 + (b_x^2 - r^2) \times$$
$$\times (b_y^2 - r^2)\,z^2 = 0,$$

où $r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = v^2$. Ceci est l'équation d'une surface bicavitaire du sixième degré par rapport aux coordonnées. Les cavités correspondent à deux valeurs de la vitesse normale dans une direction **N** donnée. Elles se coupent en quatre points situés sur les deux binormales du biaxe.

Dans le cas d'un uniaxe avec l'axe optique Ox ($b_y = b_z = v_o$ et $b_x = v_{eo}$) l'une des cavités de la surface des normales a la forme d'une sphère $r^2 = v_o^2$, et la seconde, celle d'un ellipsoïde $(v_o^2 - r^2)\,x^2 + (v_{eo}^2 - r^2)(y^2 + z^2) = 0$. L'ellipsoïde est tangent à la sphère aux deux points de son intersection avec l'axe optique.

7° Le lieu géométrique des points éloignés du point O à la distance $r = v'$, où v' est la vitesse radiale dans une direction donnée, est appelé *surface d'onde* ou *surface radiale*. Elle représente une surface équiphase, c'est-à-dire une surface d'onde pour les ondes se propageant dans un cristal anisotrope à partir d'une source ponctuelle disposée au point O. La surface d'onde se décrit par une équation du quatrième degré par rapport aux coordonnées:

$$\frac{b_x^2 x^2}{r^2 - b_x^2} + \frac{b_y^2 y^2}{r^2 - b_y^2} + \frac{b_z^2 z^2}{r^2 - b_z^2} = 0,$$

ou bien

$$r^2\left(b_x^2x^2+b_y^2y^2+b_z^2z^2\right)-b_x^2\left(b_y^2+b_z^2\right)x^2-b_y^2\left(b_z^2+b_x^2\right)y^2-$$
$$-b_z^2\left(b_x^2+b_y^2\right)z^2+b_x^2b_y^2b_z^2=0.$$

Cette surface aussi est bicavitaire, étant donné qu'à chaque direction du vecteur unité **S** du rayon, dans le cas général, correspondent deux valeurs différentes de la vitesse radiale v'. Les cavités de la surface d'onde se coupent en quatre points situés deux par deux sur deux droites qui se coupent au point O. Ces droites sont appelées *biradiales* ou *axes optiques de première espèce.*

L'uniaxe possède une biradiale qui coïncide avec son axe optique Ox. Dans ce cas, l'une des cavités de la surface d'onde a la forme d'une sphère $r^2=v_o^2=b_x^2=c^2/\varepsilon_x$ et la seconde, celle d'un ellipsoïde de révolution autour de l'axe optique Ox:

$$\frac{x^2}{v_o^2}+\frac{y^2+z^2}{v_{eo}^2}=1,$$

où $v_{eo}^2=b_y^2=b_z^2=\frac{c^2}{\varepsilon_y}=\frac{c^2}{\varepsilon_z}$. La sphère et l'ellipsoïde sont tangents en leurs deux points d'intersection avec l'axe optique. Si $v_o>v_{eo}$ (cristal optiquement positif), la sphère est circonscrite à l'ellipsoïde; si $v_o<v_{eo}$ (cristal optiquement négatif), la sphère est inscrite dans l'ellipsoïde.

8° Dans un cristal anisotrope, dans une direction arbitraire de la normale **N**, peuvent se propager seules deux ondes planes, polarisées rectilignement dans des plans réciproquement perpendiculaires. Les directions des vecteurs $\mathbf{D}_1$ et $\mathbf{D}_2$ de ces ondes coïncident avec les axes de l'ellipse, qui est obtenue lors de l'intersection de l'indicatrice optique avec le plan mené par le point O perpendiculairement au vecteur **N**. Les vitesses normales de

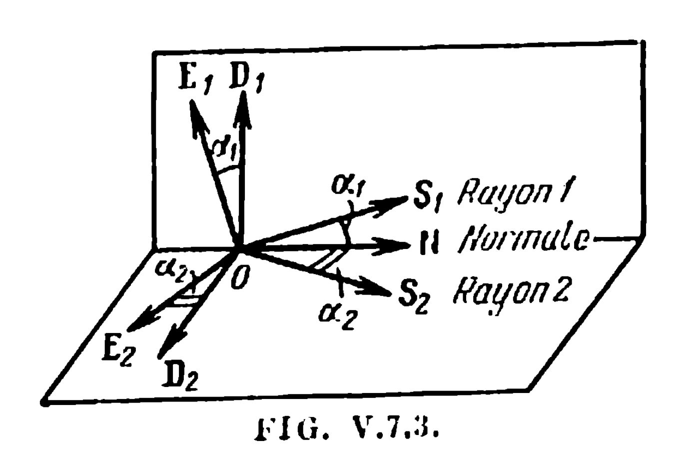


FIG. V.7.3.

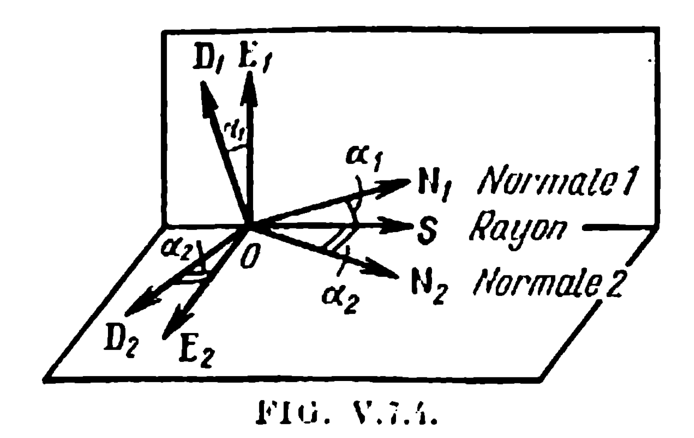


FIG. V.7.4.

ces ondes v_1 et v_2 sont liées aux demi-axes ε_1 et ε_2 de la section elliptique par les relations: $v_1 = c/\sqrt{\varepsilon_1}$ et $v_2 = c/\sqrt{\varepsilon_2}$. Les vecteurs $\mathbf{E}_1$ et $\mathbf{E}_2$ de ces ondes sont eux aussi situés sur des plans perpendiculaires (fig. V.7.3) et, de plus, leur correspondent deux vecteurs radiaux $\mathbf{S}_1$ et $\mathbf{S}_2$ différents en direction et deux valeurs différentes de la vitesse radiale $v_1' = v_1/\cos\alpha_1$ et $v_2' = v_2/\cos\alpha_2$.

De façon analogue, pour une direction donnée du rayon (vecteur $\mathbf{S}$), seules deux directions réciproquement perpendiculaires d'oscillation du vecteur $\mathbf{E}$ ($\mathbf{E}_1$ et $\mathbf{E}_2$) sont possibles, elles correspondent à deux valeurs v_1' et v_2' de la vitesse radiale dans la direction $\mathbf{S}$ (fig. V.7.4).

3. Biréfringence

1° Dans un cristal anisotrope la dépendance de la vitesse radiale d'une onde plane vis-à-vis de la direction de propagation et du caractère de polarisation de l'onde conduit au dédoublement des rayons lumineux lors de leur réfraction sur la surface du cristal. Ce phénomène est appelé ***biréfringence*** ou ***double réfraction*** et les cristaux anisotropes, ***cristaux biréfringents***.

2° Dans un biaxe les deux rayons réfractés n'obéissent pas aux lois ordinaires de la réfraction de la lumière sur la surface de séparation de deux milieux isotropes (p. 612). Dans un uniaxe l'un des rayons réfractés dit ***ordinaire*** suit ces lois et l'autre n'obéit pas, c'est pourquoi on appelle ce dernier ***rayon extraordinaire***. Dans le cas général, le rayon extraordinaire n'est pas situé dans le plan d'incidence et donc la loi de Snell ne peut lui être appliquée.

3° Le plan passant par le rayon et coupant son axe optique est appelé ***plan principal (section principale) de l'uniaxe*** pour ce

rayon. Le rayon ordinaire est polarisé dans le plan principal, autrement dit, le vecteur **E** du rayon ordinaire est perpendiculaire au plan principal. Le rayon extraordinaire est polarisé dans le plan perpendiculaire au plan principal: le vecteur **E** oscille dans le plan principal. Dans le cas général, les plans de polarisation des rayons ordinaire et extraordinaire ne sont pas tout à fait perpendiculaires entre eux, étant donné que les plans principaux du cristal pour ces rayons peuvent ne pas coïncider. Toutefois, l'angle formé par les plans principaux des rayons ordinaire et extraordinaire correspondant au même rayon incident est généralement petit. Il est exactement nul si l'axe optique du cristal est situé dans le plan d'incidence.

4° Le vecteur **E** du rayon ordinaire est toujours perpendiculaire à l'axe optique, donc il coïncide avec la direction principale dans un uniaxe. C'est pourquoi l'indice de réfraction du cristal pour un rayon ordinaire ne dépend pas de la direction du rayon dans le cristal et est égal à n_0.

Le vecteur **E** du rayon extraordinaire peut faire avec l'axe optique toutes sortes d'angles de 0 à $\pi/2$. C'est pourquoi l'indice de réfraction du cristal pour un rayon extraordinaire n'_e dépend de la direction de ce rayon par rapport à l'axe optique.

Le long de l'axe optique les vitesses des rayons ordinaire et extraordinaire sont les mêmes ($n'_e = n_0$). Dans la direction perpendiculaire à l'axe optique, $n'_e = n_{e0}$, autrement dit n'_e diffère plus intensément de n_0. Pour un cristal optiquement positif $n'_e \geqslant n_0$, pour un cristal optiquement négatif $n'_e \leqslant n_0$.

5° Si sur la surface plane d'un uniaxe tombe une onde lumineuse plane monochromatique non polarisée, dans le cristal se propagent deux ondes planes polarisées rectilignement: ordinaire et extraordinaire. On peut trouver leurs surfaces d'onde à l'aide du principe de Huyghens. Ces surfaces représentent les enveloppes des ondelettes correspondantes. Les surfaces d'onde des ondelettes sont déterminées par leurs vitesses radiales. Pour les ondes ordinaires elles ont la forme sphérique et pour les ondes extraordinaires, la forme d'ellipsoïdes de révolution autour de droites menées par les sources ponctuelles des ondelettes dans la direction de l'axe optique du cristal.

La méthode graphique de construction des fronts d'ondes planes réfractées ordinaire et extraordinaire dans un uniaxe optiquement négatif à l'aide du principe de Huyghens, ainsi que la construction des rayons ordinaire et extraordinaire correspondant à ces ondes est montrée fig. V.7.5. Sur cette figure AB est le front d'onde plane tombant sur la surface plane AC du cristal,

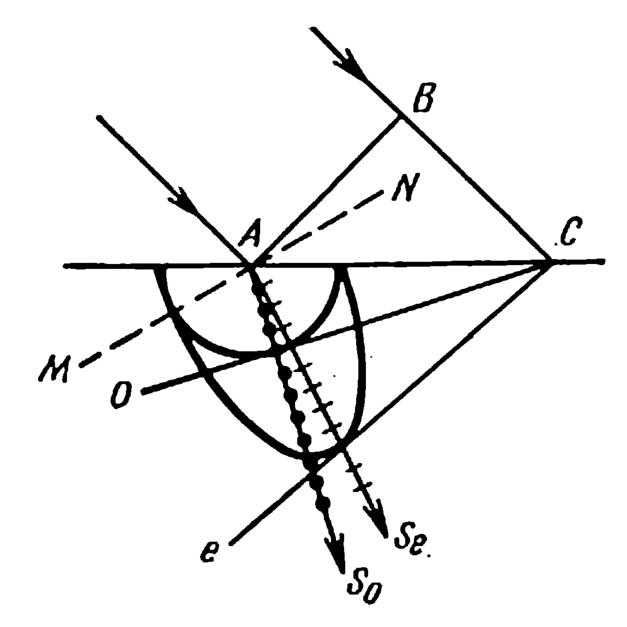


FIG. V.7.5.

MN la direction de l'axe optique (situé dans le plan d'incidence), Co le front d'onde ordinaire, Ce le front d'onde extraordinaire; AS_0 le rayon ordinaire; AS_e le rayon extraordinaire. Les directions des oscillations des vecteurs **E** des rayons ordinaire et extraordinaire sont montrées respectivement par les points et les tirets transversaux portés sur les rayons.

Pour une onde ordinaire les directions du rayon et de la normale au front d'onde coïncident toujours. Pour une onde extraordinaire elles sont en général distinctes. A la différence du rayon extraordinaire la normale au front d'onde extraordinaire est toujours située dans le plan d'incidence.

6° Les lois de la propagation de la lumière dans une lame cristalline taillée dans un uniaxe dépendent de l'orientation de l'axe optique par rapport à la surface de la lame et au rayon incident.

a) La lame est taillée perpendiculairement à l'axe optique. Si le rayon lumineux est dirigé suivant l'axe optique, il n'y a pas de biréfringence et la lumière reste non polarisée. Si le rayon lumineux est dirigé sous l'angle i à l'axe optique, il y a biréfringence. Le rapport $\sin i / \sin r_o$, où r_o est l'angle de réfraction du rayon ordinaire, est constant. Le rapport $\sin i / \sin r_e$, où r_e est l'angle de réfraction du rayon extraordinaire, varie en fonction de l'angle d'incidence i.

b) La lame est taillée parallèlement à l'axe optique. Si le plan d'incidence de la lumière est parallèle à l'axe optique du cristal, les rayons ordinaire et extraordinaire sont situés dans le même plan. La normale au front d'onde extraordinaire est réfractée plus faiblement (plus intensément) que la normale au front d'onde ordinaire dans un cristal négatif (positif). Pour les rayons correspondants les lois peuvent être tout autres. Si le plan d'incidence forme l'angle α avec l'axe optique $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$, le rayon ordinaire reste dans le plan d'incidence, alors que le rayon extraordinaire émerge de celui-ci. Si le plan d'incidence est perpendiculaire à

l'axe optique, les rayons ordinaire et extraordinaire restent dans le plan d'incidence. Dans ce cas, l'indice de réfraction d'un rayon extraordinaire ne dépend pas de sa direction et est égal à n_{eo}.

7° Si c'est une lumière naturelle qui tombe sur un uniaxe, les intensités des ondes ordinaire I_o et extraordinaire I_e à l'entrée dans le cristal sont les mêmes:

$$I_o = I_e = \frac{1}{2} I,$$

où I est l'intensité de la lumière incidente.

8° Dans les cristaux anisotropes absorbants l'absorption de la lumière est en général, elle aussi, anisotrope, c'est-à-dire elle est différente suivant l'orientation du vecteur électrique de l'onde par rapport aux axes cristallographiques. Ce phénomène est appelé *dichroïsme (pléochroïsme)*. Ainsi, un uniaxe de la tourmaline absorbe un rayon ordinaire beaucoup plus intensément qu'un rayon extraordinaire. L'absorption dépend également de la fréquence de la lumière. C'est pourquoi lorsqu'on éclaire un cristal dichroïque avec de la lumière blanche, le cristal est coloré différemment suivant la direction d'observation.

4. Biréfringence artificielle

1° Un corps optiquement isotrope devient optiquement anisotrope lors de sa déformation. Dans le cas de compression ou de traction longitudinale les propriétés optiques du corps ressemblent aux propriétés optiques d'un uniaxe dont l'axe optique coïncide avec la direction de la déformation. La différence maximale des indices de réfraction pour les rayons ordinaire et extraordinaire est obtenue lorsque les rayons sont dirigés perpendiculairement à l'axe optique, elle dépend du degré de déformation:

$$n_o - n_{eo} = k\sigma,$$

où σ est la contrainte normale (p. 294), k un coefficient de proportionnalité dépendant des propriétés du corps. La détection de l'anisotropie artificielle est une méthode très sensible d'évaluation des contraintes dans les corps solides *(méthode optique de polarisation)*.

2° Un diélectrique optiquement isotrope (solide, liquide ou gazeux) peut devenir optiquement anisotrope lorsqu'on l'introduit dans un champ électrique uniforme extérieur. Ce phénomène est appelé *effet Kerr*. Sous l'action du champ le diélectrique par ses

propriétés optiques devient semblable à un uniaxe dont l'axe optique est parallèle à la direction du champ.

Pour une lumière monochromatique se propageant dans la substance perpendiculairement au vecteur $\mathbf{E}_{ext}$ champ électrique uniforme extérieur, la différence des indices de réfraction pour les rayons ordinaire et extraordinaire est:

$$n_{eo} - n_o = kE_{ext}^2.$$

La grandeur $B = k/\lambda$, où λ est la longueur d'onde de la lumière dans le vide, est appelée *constante de Kerr*. La valeur de B dépend de la nature de la substance, de la longueur d'onde λ et de la température décroissant rapidement avec l'accroissement de cette dernière.

A température ambiante et pour $\lambda = 589$ nm, la valeur absolue de la constante de Kerr pour les liquides est de l'ordre de $(10^{-14} \div 10^{-12})$ m/V^2 $\sim$ $(10^{-7} \div 10^{-5})$ u.é.s. CGS et pour les gaz de l'ordre de $(10^{-19} \div 10^{-16})$ m/V^2 $\sim$ $(10^{-12} \div 10^{-9})$ u.é.s. CGS. Pour la plupart des corps $B > 0$, autrement dit, ces corps sont par leurs propriétés optiques dans un champ électrique uniforme semblables à des uniaxes optiquement positifs.

On utilise souvent une autre constante de Kerr $K = B\lambda/n$, où n est l'indice de réfraction absolu du corps en l'absence de champ électrique extérieur. La grandeur K est numériquement égale à la différence relative des indices de réfraction des rayons ordinaire et extraordinaire $(n_{eo} - n_o)/n$ dans un champ électrique extérieur d'intensité unité. L'effet Kerr est pratiquement sans rémanence: le retard dans la variation de $n_{eo} - n_o$ par comparaison avec la variation de E_{ext} est inférieur à 10^{-9} s.

3° Dans les gaz ayant des molécules polaires et électriquement anisotropes, l'effet Kerr est dû à la polarisation de ces molécules dans un champ électrique extérieur et au trouble de la disposition chaotique des molécules. L'influence simultanée de l'action d'orientation du champ électrique sur les moments dipolaires induits des molécules et des chocs entre les molécules au cours de leur agitation thermique fait apparaître une orientation privilégiée des molécules. Dans ce cas la constante diélectrique relative du gaz ε est maximale dans la direction du vecteur $\mathbf{E}_{ext}$, de sorte que $n_{eo} > n_o$ et $B > 0$.

Dans les gaz ayant des molécules polaires et électriquement anisotropes dans un champ électrique extérieur il apparaît une orientation préférentielle des moments dipolaires constants des molécules dans la direction $\mathbf{E}_{ext}$. Toutefois, la direction de la polarisation maximale des molécules peut faire un certain angle

α avec la direction de son moment dipolaire constant. Si $\alpha = 0$, on a $n_{eo} > n_o$ et $B > 0$; si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, on a $n_{eo} < n_o$ et $B < 0$.

Pour les liquides, cette théorie classique d'orientation de Langevin-Born ne décrit l'effet Kerr que qualitativement, les forces intermoléculaires, qui jouent un grand rôle dans les liquides, n'y étant pas prises en considération.

4° L'apparition d'anisotropie optique artificielle dans les substances isotropes (liquides, verres, colloïdes) sous l'action d'un champ magnétique extérieur uniforme intense est appelé *effet Cotton-Mouton*. Dans ce cas l'axe optique coïncide avec la direction du champ magnétique. La différence des indices de réfraction pour les rayons ordinaire et extraordinaire dans la direction perpendiculaire à l'axe optique dépend du champ magnétique H_{ext}:

$$n_{eo} - n_o = k'H_{ext}^2.$$

On appelle la grandeur $C = k'/\lambda$ *constante de Cotton-Mouton*; elle dépend de la nature du corps, de la longueur d'onde λ et de la température.

5. Analyse de la lumière polarisée. Polarisation elliptique et circulaire de la lumière

1° Pour étudier le caractère et le degré de polarisation de la lumière, on utilise les *analyseurs*. En tant qu'analyseurs on utilise les mêmes dispositifs que ceux qui servent pour obtenir la lumière polarisée rectilignement (polariseurs).

2° Si l'onde lumineuse entrant dans l'analyseur est polarisée rectilignement, l'intensité de l'onde sortant de l'analyseur obéit à la *loi de Malus:*

$$I = k_a I_0 \cos^2 \gamma,$$

où I_0 est l'intensité de la lumière incidente, k_a le *coefficient de transparence de l'analyseur*, γ l'angle entre les plans de polarisation de la lumière incidente et de la lumière émergente.

3° Si une onde lumineuse plane monochromatique polarisée rectilignement tombe dans une direction perpendiculaire à la surface d'une lame cristalline biréfringente, taillée parallèlement à l'axe optique, deux rayons (ordinaire et extraordinaire) traversent la lame dans une même direction avec différentes vitesses. Les oscillations électriques dans ces rayons sont réciproquement perpendi-

culaires (p. 686). La différence de phase $\Delta\varphi$ entre ces deux rayons, après leur passage à travers une lame d'épaisseur d, est égale à

$$\Delta\varphi = -\frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_{eo})\,d,$$

où λ est la longueur d'onde lumineuse dans le vide, n_o et n_{eo} les indices de réfraction des rayons ordinaire et extraordinaire.

4° Les amplitudes des oscillations des vecteurs électriques $\mathbf{E}_o$ et $\mathbf{E}_e$ des rayons ordinaire et extraordinaire dans les conditions données plus haut (3°) sont respectivement égales à

$$a = A\cos\alpha, \quad b = A\sin\alpha,$$

où A est l'amplitude de l'onde incidente, α l'angle entre la direction des oscillations du vecteur $\mathbf{E}$ dans la lumière polarisée incidente et la direction de l'axe optique du cristal (p. 680). Sortant de la lame, l'onde résultante est décrite par l'équation de l'ellipse

$$\frac{E_x^2}{a^2} + \frac{E_y^2}{b^2} - \frac{2E_xE_y}{ab}\cos(\Delta\varphi) = \sin^2(\Delta\varphi),$$

où E_x et E_y sont respectivement les intensités du champ électrique du rayon extraordinaire et du rayon ordinaire, a et b les amplitudes de ces rayons, $\Delta\varphi$ la différence de phase entre ces rayons (les directions des oscillations dans les deux rayons, polarisés rectilignement dans des directions réciproquement perpendiculaires x, y, sont perpendiculaires à la direction de propagation z de l'onde). Lorsque $n_o > n_{eo}$, le rayon ordinaire présente un retard de phase sur le rayon extraordinaire, lorsque $n_o < n_{eo}$, il a une avance de phase sur celui-ci. De la sorte l'onde polarisée dans le plan, après avoir traversé la lame, devient, dans le cas général, polarisée elliptiquement.

5° Si l'angle $\alpha = 0°$, seul le rayon extraordinaire se propage dans la lame. Si $\alpha = 90°$, seul le rayon ordinaire se propage dans la lame. Dans les deux cas l'onde émergera de la lame sans qu'il y ait changement de type de la polarisation.

6° Si l'épaisseur d de la lame est telle que la différence de marche optique entre les rayons ordinaire et extraordinaire $\Delta s = (2m + 1)\,\lambda/4$ *(lame quart d'onde)* et la différence de phase entre ces rayons $\Delta\varphi = -(2m + 1)\,\pi/2$, où $m = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots$, on a pour l'onde résultante (lorsque $0° < \alpha < 90°$):

$$\frac{E_x^2}{a^2} + \frac{E_y^2}{b^2} = 1;$$

les axes de l'ellipse de polarisation coïncident avec les directions principales dans la lame. Dans un cas particulier de $\alpha = 45°$ les ampli-

tudes des rayons ordinaire et extraordinaire sont égales entre elles et

$$E_x^2 + E_y^2 = a^2,$$

autrement dit, l'onde est polarisée circulairement. Lorsque $\Delta\varphi = -\pi/2$, la polarisation est circulaire lévogyre, lorsque $\Delta\varphi = \pi/2$, elle est circulaire dextrogyre.

7° Si l'épaisseur d de la lame est telle que la différence de marche optique des deux rayons $\Delta_s = (2m + 1)\ \lambda/2$ *(lame demi-onde)* et $\Delta\varphi = -(2m + 1)\ \pi$ (lorsque $0° < \alpha < 90°$), on a:

$$\frac{E_x}{a} + \frac{E_y}{b} = 0,$$

autrement dit, la lumière reste polarisée dans le plan. Dans ce cas son plan de polarisation tourne d'un angle de $180° - 2\alpha$.

8° Si l'épaisseur d de la lame est telle que la différence de marche optique des deux rayons $\Delta s = m\lambda$ *(lame onde)* et $\Delta\varphi = -2\pi m$ (lorsque $0° < \alpha < 90°$), on a:

$$\frac{E_x}{a} - \frac{E_y}{b} = 0,$$

autrement dit, la lumière reste polarisée dans le plan sans que varie la direction de polarisation.

9° Si l'onde entrant dans l'analyseur est polarisée elliptiquement, l'intensité de la lumière en sortant dépend de l'orientation du plan principal de l'analyseur (c'est-à-dire du plan de polarisation de la lumière transmise) par rapport aux axes de l'ellipse caractérisant la lumière polarisée elliptiquement. Lors de la rotation du plan principal de l'analyseur autour de la direction des rayons de lumière polarisée elliptiquement, incidents sur ce plan, l'intensité de la lumière traversant l'analyseur varie. Un phénomène analogue est observé également dans le cas où la lumière incidente est polarisée non elliptiquement, mais partiellement, c'est-à-dire s'il y a dans celle-ci une orientation privilégiée des directions d'oscillation des vecteurs **E** et **H**. Si l'onde incidant dans l'analyseur est polarisée circulairement, la rotation du plan principal de l'analyseur n'influe pas sur l'intensité de la lumière qui le traverse.

6. Interférence des rayons polarisés

A. RAYONS PARALLÈLES

1° La lumière naturelle est constituée d'un grand nombre de trains d'ondes élémentaires incohérents, correspondant à différentes radiations spontanées d'atomes ou de molécules de la source lumi-

neuse. Ces trains d'onde sont polarisés rectilignement dans tous les plans possibles. La formation de l'onde ordinaire qui se propage dans un uniaxe, lors de l'incidence d'une lumière naturelle sur celui-ci, a lieu principalement au compte des trains d'ondes dont les plans de polarisation sont inclinés par rapport au plan principal du cristal sous angle $\alpha < \pi/4$. De la même façon la formation de l'onde extraordinaire a lieu principalement au compte des trains d'ondes pour lesquels $\alpha > \pi/4$. C'est pourquoi les ondes ordinaire et extraordinaire se propageant dans un uniaxe, lors de l'incidence d'une lumière naturelle sur celui-ci, sont incohérentes.

Les ondes ordinaire et extraordinaire se propageant dans un uniaxe dans le cas où une lumière polarisée rectilignement tombe sur celui-ci sont cohérentes, puisqu'elles contiennent des couples de composantes cohérentes, correspondant à chaque train d'ondes traversant le polariseur.

2° Lors de l'incidence normale d'une onde plane monochromatique polarisée rectilignement sur une lame à faces planes parallèles taillée dans un uniaxe parallèlement à son axe optique, il apparaît à la sortie de la lame une différence de phase entre les ondes ordinaire et extraordinaire (p. 691):

$$\Delta\varphi = -\frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_{eo})d.$$

Bien que ces ondes soient cohérentes et se propagent dans une même direction, elles ne peuvent interférer étant polarisées dans des plans orthogonaux. Leur superposition donne une lumière polarisée elliptiquement.

Pour l'intensification ou l'affaiblissement de ces deux ondes par interférence, il faut, à l'aide d'un analyseur (p. 690), isoler de celles-ci les composantes polarisées dans un même plan et qui, de ce fait, sont capables d'interférer (fig. V.7.6).

L'image d'interférence donnée par l'analyseur dépend de la différence de phase $\Delta\varphi$, de la longueur d'onde de la lumière incidente, de l'angle α entre son plan de polarisation et l'axe optique de la lame, ainsi que de l'orientation réciproque des directions des plans de polarisation I et II de la lumière transmise par le polariseur et l'analyseur.

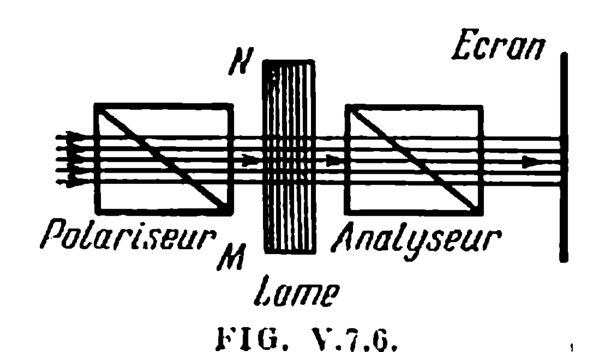


FIG. V.7.6.

L'analyseur et le polariseur sont *croisés* si l'angle β entre les plans I et II est égal à $\pi/2$, et *parallèles* si $\beta = 0$.

3° *Interférence en lumière monochromatique.* Le résultat de l'interférence est représenté au tableau ci-dessous.

$\Delta\varphi$	β	α	Résultat de l'interférence sur l'écran
$(2m + 1)\pi$	0	$\pi/4$	obscurité
	0	0; $\pi/2$	lumière
	$\pi/2$	$\pi/4$	lumière
$m = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$	$\pi/2$	0; $\pi/2$	obscurité
$2m\pi$	0	$\pi/4$	lumière
	0	0; $\pi/2$	lumière
	$\pi/2$	$\pi/4$	obscurité
$m = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$	$\pi/2$	0; $\pi/2$	obscurité

4° *Interférence en lumière blanche.* La valeur de $\Delta\varphi$ est différente pour une lumière de différentes longueurs d'onde. Aussi suit-il des relations 3° que pour les composantes monochromatiques de la lumière blanche, pour des valeurs arbitraires de $\Delta\varphi$, β et α, l'écran est éclairé, à l'exception des cas où $\beta = \pi/2$ et $\alpha = 0$ ou $\pi/2$ lorsque la lumière ne traverse pas l'analyseur. Si $\beta = 0$ et $\alpha = 0$ ou $\pi/2$, l'écran est éclairé en lumière blanche, dans tous les autres cas il est éclairé en lumière colorée, pour $\alpha = \pi/4$ la variation de l'angle β de 0 à $\pi/2$ changeant la couleur de l'écran en une couleur complémentaire.

5° Si la lame est d'épaisseur d variable, les valeurs de la différence de phase $\Delta\varphi$ sont différentes suivant les endroits de la lame. En lumière monochromatique, on observe sur l'écran un système de franges d'interférence sombres et claires, chacune desquelles correspond aux points de même épaisseur de la lame (franges d'égale épaisseur). En lumière blanche, on observe sur l'écran des franges irisées d'égale épaisseur.

B. RAYONS CONVERGENTS

1° Lorsqu'une lame à faces planes parallèles, taillée dans un uniaxe parallèlement à son axe optique, reçoit un faisceau convergent de rayons de lumière monochromatique passant à travers le polariseur et la lentille convergente (fig. V.7.7), à la sortie de la lame la différence de phase entre les rayons ordinaire et extra-

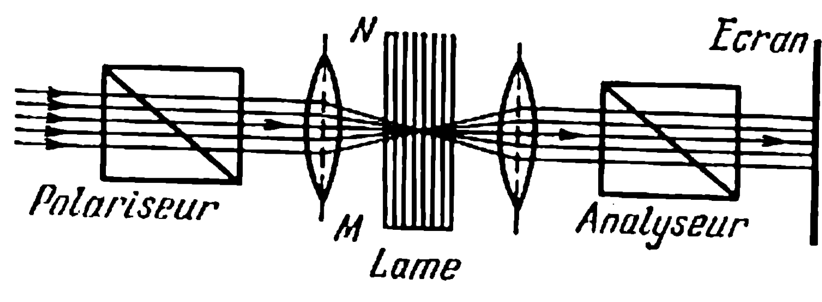


FIG. V.7.7.

ordinaire se propageant dans une même direction dans cette lame est

$$\Delta\varphi = -\frac{2\pi}{\lambda}\frac{d}{\cos\psi}(n_0 - n_e'),$$

où λ est la longueur d'onde lumineuse dans le vide, d l'épaisseur de la lame suivant la normale à sa surface, n_0 et n_e' les indices de réfraction des rayons ordinaire et extraordinaire dans la direction qui fait l'angle ψ avec la normale au plan de la lame. Si l'axe du cône de rayons convergents est normal au plan de la lame, l'image d'interférence donnée par l'analyseur lorsqu'il est croisé avec le polariseur ($\beta = \pi/2$, p. 693) a la forme représentée fig. V.7.8. Les maximums d'interférence forment un système d'anneaux clairs et sombres. Si l'éclairement est effectué en lumière blanche, on observe un système d'*anneaux isochromatiques* concentriques de toutes les couleurs. Les anneaux se coupent par une croix rectangulaire claire ou sombre. La position de cette croix correspond à l'intersection du plan de l'écran avec les plans de polarisation et d'oscillation de la lumière transmise par le polariseur. Lorsque $\alpha = 0$ ou $\pi/2$ et $\beta = 0$, la croix est claire, lorsque $\alpha = 0$ ou $\pi/2$ et $\beta = \pi/2$, la croix est sombre.

Si le faisceau convergent de lumière blanche traverse une lame à faces planes parallèles taillée dans un uniaxe parallèlement à son axe optique, les *courbes isochromatiques* sont les quasi-hyperboles (fig. V.7.9).

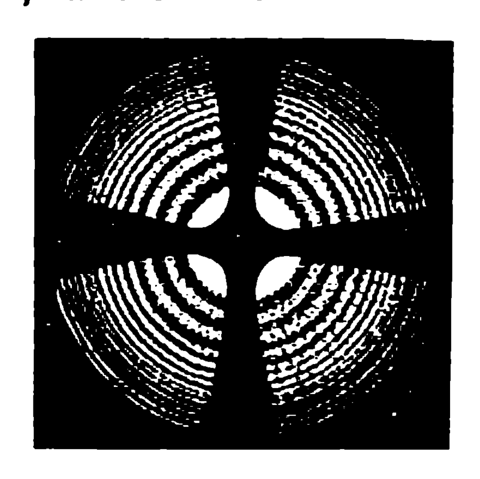


FIG. V.7.8.

2° Pour un biaxe les courbes isochromatiques ont la forme d'hyperboles si la lame est taillée parallèlement aux axes optiques, et de lemniscates par les pôles desquelles passent deux hyperboles (à la place de la croix pour un



FIG. V.7.9.

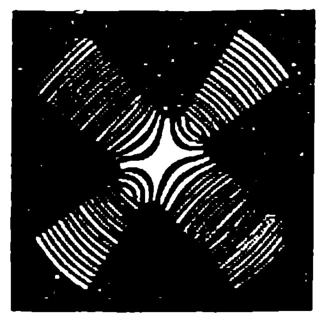


FIG. V.7.10.

uniaxe) si la lame est taillée perpendiculairement à la bissectrice de l'angle entre les axes (fig. V.7.10).

7. Rotation du plan de polarisation

1° La *rotation du plan de polarisation* consiste en la rotation du plan de polarisation de l'onde lumineuse lors de son passage à travers certaines substances dites *optiquement actives.*

L'activité optique est caractéristique de certains cristaux (y compris ceux qui ne manifestent pas de phénomènes de biréfringence) ainsi que de beaucoup de liquides purs, de solutions et de gaz. Toutes les substances qui sont optiquement actives à l'état liquide (et dans les solutions) possèdent plus ou moins cette propriété à l'état cristallin. L'inverse n'a pas toujours lieu.

2° Dans les cristaux anisotropes la rotation pure du plan de polarisation est observée pour la lumière qui se propage le long de l'axe optique. Pour les autres directions de propagation de la lumière ce phénomène se complique par biréfringence.

Pour la plupart des cristaux optiquement actifs sont découvertes deux modifications faisant tourner le plan de rotation dans le sens des aiguilles d'une montre et dans le sens contraire (pour l'observateur qui regarde de face le rayon). La première modification est appelée *dextrogyre* ou *positive*, la seconde, *lévogyre* ou *négative.*

3° Dans les corps solides l'angle de rotation du plan de polarisation φ est directement proportionnel à la longueur d du chemin parcouru par le rayon lumineux dans le corps:

$$\varphi = \alpha d,$$

où α est le *pouvoir rotatoire (rotation spécifique)* dépendant de la nature de la substance, de la température et de la longueur d'onde.

Cette formule reste valable également pour un cristal biréfringent si la lumière se propage dans celui-ci le long de l'axe optique; les valeurs de α dans un biaxe peuvent être différentes suivant les axes optiques. Les pouvoirs rotatoires des modifications lévo et dextrogyres sont égaux en valeur.

4° Pour les solutions l'angle de rotation du plan de polarisation s'exprime par

$$\varphi = [\alpha]\, cd = [\alpha]\, \rho\, Kd,$$

où $[\alpha]$ est le pouvoir rotatoire, c la concentration d'une substance optiquement active dans la solution (le rapport de la masse de cette substance au volume de la solution), ρ la densité de la solution et $K = c/\rho$ le rapport de la masse de la substance optiquement active à la masse de toute la solution.

La grandeur $[\alpha]$ dépend de la nature de la substance optiquement active et du solvant, de la température et de la longueur d'onde de la lumière. On appelle *polarimétrie* la méthode très sensible pour déterminer la concentration c ou K, qui est fondée sur cette corrélation.

5° La théorie de Fresnel représente la lumière polarisée rectilignement avant son entrée dans une substance optiquement active comme l'association de deux ondes polarisées circulairement avec les mêmes fréquences et amplitudes et explique la rotation de son plan de polarisation par l'existence de deux vitesses de phase de la lumière dans la substance optiquement active correspondant à ses polarisations circulaires dextro et lévogyre. Si dans la substance les vitesses de phase pour les ondes polarisées de cette manière sont égales respectivement à v_d (l'indice de réfraction est n_d) et v_l (l'indice de réfraction est n), alors, le chemin d dans la substance étant passé, l'angle de rotation du plan de polarisation (fig. V.7.11) est égal à

$$\varphi = \frac{\varphi_d - \varphi_l}{2} = \frac{\pi d}{\lambda}\left(n_l - n_d\right),$$

où λ est la longueur d'onde de la lumière dans le vide. Dextrogyres sont les substances pour lesquelles $n_l > n_d$, lévogyres, celles pour lesquelles $n_l < n_d$.

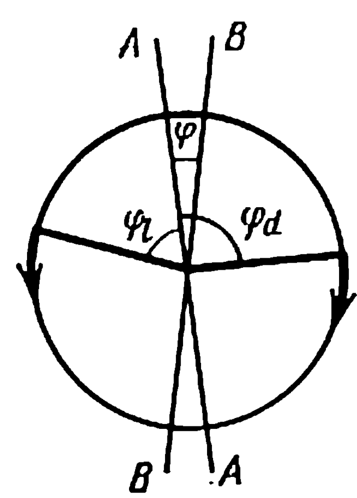


FIG. V.7.11.

6° Sous l'action du champ magnétique les substances optiquement non actives acquièrent le pouvoir de faire tourner le plan de polarisation de la lumière se propageant dans

la direction du champ. Ce phénomène est appelé *effet Faraday* (rotation magnétique). L'angle de rotation du plan de polarisation est égal à

$$\varphi = V\ dB,$$

où B est l'induction du champ magnétique uniforme (p. 442), d la longueur du chemin parcouru par la lumière dans la substance, V la *constante de Verdet* dépendant de la nature de la substance, de la température et de la longueur d'onde de la lumière. Le sens de rotation du plan de polarisation dépend uniquement de la nature de la substance et de la direction du champ magnétique. Le sens de rotation est défini pour l'observateur regardant le long du champ magnétique. La plupart des substances sont douées d'une rotation dextrogyre: tous les diamagnétiques (p. 490) et quelques paramagnétiques (p. 490) possèdent une rotation dextrogyre; certains paramagnétiques sont doués d'une rotation lévogyre.

7° L'activité optique naturelle de la substance à l'état non cristallin est due à l'asymétrie des molécules. Dans les corps cristallins l'activité optique peut être due aux particularités de la disposition des particules dans le réseau.

La rotation magnétique du plan de polarisation est conditionnée par l'asymétrie des propriétés optiques de la substance, apparue sous l'action du champ magnétique.

8° La dépendance de la rotation du plan de polarisation de la longueur d'onde de la lumière est appelée *dispersion rotatoire*. En première approximation, dans le domaine d'ondes suffisamment longues éloigné des bandes d'absorption de la lumière par la substance (p. 709), l'angle de rotation du plan de polarisation est inversement proportionnel au carré de la longueur d'onde *(loi de Biot)*:

$$\varphi \sim \lambda^{-2}.$$

CHAPITRE 8

Optique moléculaire

1. Dispersion de la lumière

1° On appelle *dispersion de la lumière* le phénomène de dépendance de l'indice de réfraction absolu n de la substance vis-à-vis de la fréquence ν de la lumière (ou de la longueur d'onde dans le vide $\lambda = c/\nu$):

$$n = f(\lambda) = \varphi(\omega),$$

où $\omega = 2\pi\nu$ est la pulsation de l'onde lumineuse. La dispersion de la lumière est dite *normale* dans le cas où l'indice de réfraction augmente de façon monotone avec l'accroissement de la fréquence (diminue avec l'accroissement de la longueur d'onde); dans le cas contraire la dispersion de la lumière est dite *anomale* (fig. V.8.1). La dispersion normale de la lumière est observée loin des bandes ou des raies d'absorption de la lumière par la substance (p. 709), la dispersion anomale dans les bandes ou les raies d'absorption.

2° D'après la théorie électronique classique, la dispersion de la lumière est due à l'interaction de la lumière avec les particules chargées de la substance qui effectuent des oscillations forcées dans le champ électromagnétique variable de l'onde. Pour la lumière visible la fréquence est tellement grande ($\nu \sim 10^{15}$ Hz) que

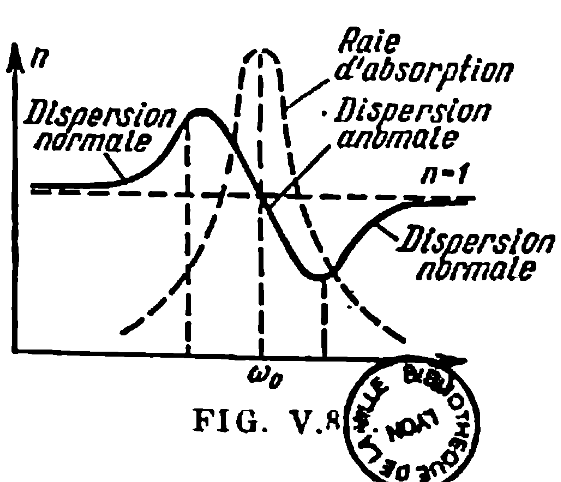


FIG. V.8

seules les oscillations forcées des électrons extérieurs (le plus faiblement liés) des atomes, des molécules ou des ions ont une importance. Ces électrons sont appelés *électrons optiques*. Au cours des oscillations forcées des électrons optiques dans le champ d'une onde monochromatique de fréquence ν, les moments électriques dipolaires des molécules varient périodiquement et ces molécules émettent des ondes électromagnétiques secondaires de même fréquence ν.

Les distances moyennes entre les molécules sont très inférieures à l'étendue d'un train d'ondes. C'est pourquoi les ondelettes émises par une grande quantité de molécules voisines d'un milieu optiquement homogène sont cohérentes aussi bien entre elles qu'avec l'onde primaire. Lors de leur superposition elles interfèrent et le résultat de l'interférence dépend du rapport de leurs amplitudes et de leurs phases initiales. Dans un milieu optiquement homogène et isotrope il se forme alors une onde transmise dont la vitesse de phase dépend de la fréquence et dont la direction de propagation coïncide avec la direction de propagation de l'onde primaire.

3° Pour un milieu isotrope

$$n'^2 = \varepsilon' = 1 + \varkappa'_e \qquad \text{(en u. SI)},$$

$$n'^2 = \varepsilon' = 1 + 4\,\pi\varkappa'_e \qquad \text{(en u. du système de Gauss)},$$

où $n' = n(1 - i\varkappa)$ est l'indice de réfraction complexe du milieu (p. 619), ε' la constante diélectrique relative complexe et $\varkappa'_e$ la susceptibilité diélectrique complexe du milieu. La complexité de $\varkappa'_e$ et ε' est due à ce que dans un milieu absorbant les vecteurs polarisation $\mathbf{P}_e$ et intensité $\mathbf{E}$ du champ électrique oscillent avec un décalage de phase. Dans un milieu non absorbant ce décalage de phase est nul. C'est pourquoi un tel milieu est caractérisé par des valeurs réelles de $\varkappa_e$, ε et n ($\varkappa = 0$).

Si N_0 est le nombre de molécules par unité de volume, on a:

$$n'^2 = 1 + \frac{N_0}{\varepsilon_0}\,\frac{p_e}{E} \qquad \text{(en u. SI)},$$

$$n'^2 = 1 + 4\pi\,N_0\,\frac{p_e}{E} \qquad \text{(en u. du système de Gauss)},$$

où ε_0 est la constante diélectrique, p_e le moment dipolaire induit d'une molécule dans le champ d'une onde d'intensité $\mathbf{E}$.

4° En théorie électronique classique, chaque molécule est considérée comme un ensemble d'oscillateurs linéaires (p. 119), c'est-à-dire comme un ensemble de particules de charges q_k et

de masses m_k. Les pulsations propres des oscillateurs ω_{0k} correspondent à un ensemble de pulsations d'absorption de la lumière par la substance considérée. L'équation différentielle des oscillations forcées de l'oscillateur est:

$$\ddot{s}_k + 2\,\delta_k\,\dot{s}_k + \omega_{0k}^2\,s_k = \frac{q_k}{m_k}\,E_{ef}$$

où s_k est le déplacement de la charge q_k de sa position d'équilibre, δ_k le coefficient d'amortissement des oscillations libres de la charge, E_{eff} le champ efficace (p. 380). Dans les gaz, aux conditions normales, E_{eff} coïncide pratiquement avec le champ E de l'onde lumineuse. Pour une lumière monochromatique $E = E_0 e^{i\omega t}$ et dans les gaz

$$p_e = \sum_k q_k\,s_k = \sum_k \frac{q_k^2 E}{m_k}\,\frac{1}{\omega_{0k}^2 - \omega^2 + i\,2\,\delta_k\omega} =$$

$$= \frac{e^2 E}{m} \sum_k \frac{f_k}{\omega_{0k}^2 - \omega^2 + i\,2\,\delta_k\omega},$$

où m et e sont la masse et la valeur absolue de la charge de l'électron, et

$$f_k = \left(\frac{q_k}{e}\right)^2 \frac{m}{m_k}$$

la force du k-ième oscillateur. Il en découle que pour les gaz

$$\left.\begin{aligned} n^2(1 - \varkappa^2) &= 1 + \frac{N_0 e^2}{\varepsilon_0 m} \sum_k \frac{(\omega_{0k}^2 - \omega^2)\,f_k}{(\omega_{0k}^2 - \omega^2)^2 + 4\delta_k^2\omega^2}, \\ n^2\varkappa &= \frac{N_0 e^2 \omega}{\varepsilon_0 m} \sum_k \frac{\delta_k\,f_k}{(\omega_{0k}^2 - \omega^2)^2 + 4\delta_k^2\omega^2} \end{aligned}\right\} \text{(en u. SI)},$$

$$\left.\begin{aligned} n^2(1 - \varkappa^2) &= 1 + \frac{4\pi N_0 e^2}{m} \sum_k \frac{(\omega_{0k}^2 - \omega^2)\,f_k}{(\omega_{0k}^2 - \omega^2)^2 + 4\delta_k^2\omega^2}, \\ n^2\varkappa &= \frac{4\pi N_0 e^2 \omega}{m} \sum_k \frac{\delta_k\,f_k}{(\omega_{0k}^2 - \omega^2)^2 + 4\delta_k^2\,\omega^2} \end{aligned}\right\} \text{(en u. du système de Gauss)}.$$

5° L'influence de l'absorption n'est sensible que pour les pulsations proches de ω_{0k}, en dehors de ces domaines de pulsations, $\delta_k^2\omega^2 \ll (\omega_{0k}^2 - \omega^2)^2$ et pour les gaz $(n^2 + 1 \approx 2n)$

$$n \approx 1 + \frac{N_0 e^2}{2\varepsilon_0 m} \sum_k \frac{f_k}{\omega_{0k}^2 - \omega^2} \qquad \text{(en u. SI)},$$

$$n \approx 1 + \frac{2\pi N_0 e^2}{m} \sum_k \frac{f_k}{\omega_{0k}^2 - \omega^2} \qquad \text{(en u. du système de Gauss)}.$$

En théorie classique de la dispersion, les valeurs de f_k et ω_{0k} sont supposées connues par expérience. Leur calcul théorique n'est possible qu'en théorie quantique.

6° Dans un milieu isotrope dont la polarisation dans le champ à haute fréquence d'une onde lumineuse est de nature purement électronique, le champ efficace est:

$$E_{eff} = \frac{\varepsilon' + 2}{3} E = \frac{n'^2 + 2}{3} E,$$

où E est le champ de l'onde. Dans ce cas la *formule de Lorentz-Lorenz* est juste:

$$\frac{n'^2 - 1}{n'^2 + 2} = \frac{N_0 e^2}{3m} \alpha_e \qquad \text{(en u. SI)},$$

$$\frac{n'^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{4\pi N_0 e^2}{3m} \alpha_e \qquad \text{(en u. du système de Gauss)},$$

où α_e est la polarisabilité électronique de la molécule (p. 377).

En l'absence d'absorption cette formule est de la forme:

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{N_0 e^2}{3m\varepsilon_0} \sum_k \frac{f_k}{\omega_{0k}^2 - \omega^2} \qquad \text{(en u. SI)},$$

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{4\pi N_0 e^2}{3m} \sum_k \frac{f_k}{\omega_{0k}^2 - \omega^2} \qquad \text{(en u. du système de Gauss)}.$$

7° La grandeur

$$r = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \frac{1}{\rho},$$

où ρ est la densité, est dite *réfraction spécifique* de la substance. Pour une substance donnée r ne dépend pas de ρ. Les grandeurs $A_i r_i$ et $\Omega = \mu r$, où A_i est le poids atomique, r_i la réfraction spécifique des atomes de i-ième groupe dans la molécule de poids moléculaire μ, sont appelées respectivement *réfraction atomique* et *réfraction mo-*

laire (p. 384). Souvent la réfraction molaire représente la somme des réfractions atomiques: $r = \frac{1}{\mu}\sum_i k_i A_i r_i$, où k_i est le nombre d'atomes de i-ième groupe dans la molécule.

8° En théorie classique de la dispersion de la lumière dans les métaux, on prend en considération aussi bien les électrons libres que les électrons liés dans les ions du métal. Pour les électrons libres $\omega_{0k} = 0$. C'est pourquoi

$$n'^2 - 1 = \frac{e^2}{m\varepsilon_0}\left[\frac{N_e}{2i\delta_e\omega - \omega^2} + N_0 \sum_k \frac{f_k}{\omega_{0k}^2 - \omega^2 + i2\delta_k\omega}\right] \quad \text{(en u. SI)},$$

$$n'^2 - 1 = \frac{4\pi e^2}{m}\left[\frac{N_e}{2i\delta_e\omega - \omega^2} + N_0 \sum_k \frac{f_k}{\omega_{0k}^2 - \omega^2 + i2\delta_k\omega}\right] \quad \text{(en u. du système de Gauss)},$$

où N_e est le nombre d'électrons libres par unité de volume, δ_e un coefficient tenant compte des pertes d'énergie lors des oscillations forcées des électrons libres. Dans le domaine de petites pulsations ($\omega \ll \delta_e$)

$$n'^2 - 1 \approx \frac{e^2}{m\varepsilon_0}\frac{N_e}{2i\delta_e\omega} \quad \text{(en u. SI)}$$

et

$$n^2\varkappa \approx \frac{e^2 N_e}{4m\varepsilon_0\delta_e\omega} \quad \text{(en u. SI)}.$$

La dernière expression coïncide avec celle donnée p. 620 si

$$\delta_e = \frac{e^2 N_e}{2m\gamma} = \frac{1}{\tau},$$

où γ est la conductivité du métal et τ la durée moyenne du parcours libre des électrons dans le métal.

2. Analyse spectrale

1° Tout processus physique périodique dans le temps (dont la dépendance du temps est exprimée par la fonction périodique $\varphi(t)$ de pulsation ω qui satisfait aux conditions de Dirichlet) peut être

représenté comme la superposition d'un nombre infini de processus oscillatoires harmoniques dont les pulsations forment une suite discrète. Cette somme est appelée ***série de Fourier:***

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t),$$

où A_n et B_n sont les coefficients de Fourier:

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \varphi(t)\, dt, \qquad B_0 = 0,$$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \varphi(t) \cos n\omega t\, dt, \quad B_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \varphi(t) \sin n\omega t\, dt,$$

$T = 2\pi/\omega$ et le moment initial t_0 est arbitraire.

La série de Fourier peut être écrite également sous la forme:

$$\varphi(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos (n\omega t - \psi_n).$$

L'ensemble des grandeurs C_n forme le *spectre des amplitudes de la fonction* $\varphi(t)$, et l'ensemble des grandeurs ψ_n, le *spectre des phases initiales;* le *spectre des intensités* est déterminé par l'ensemble des grandeurs C_n^2.

2° Tout processus physique non périodique dans le temps peut être représenté sous forme de série de Fourier (1°) dans l'intervalle de temps (au cours duquel le processus satisfait aux conditions de Dirichlet) $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T$, où t_0 et $T > 0$ sont arbitraires. Cependant, en dehors de l'intervalle de temps indiqué, la série de Fourier n'est pas égale à la fonction qu'elle représente. La représentation d'un processus périodique dans le temps par la série de Fourier est en vigueur en chaque instant.

3° Tout processus physique non périodique dans le temps (dont la dépendance du temps est exprimée par la fonction $f(t)$ satisfaisant aux conditions de Dirichlet dans tout intervalle de temps fini, étant donné que l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt$ converge) peut être repré-

senté comme une somme infinie de processus oscillatoires périodiques dans le temps dont les pulsations ω forment une suite continue. Cette somme est dite ***intégrale de Fourier:***

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}C(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega=\frac{1}{\pi}\operatorname{Re}\int_{-\infty}^{\infty}C(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega,$$

ou bien

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}[A(\omega)\cos\omega t+B(\omega)\sin\omega t]\,d\omega,$$

où

$$C(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)e^{-i\omega\xi}\,d\xi=A(\omega)-iB(\omega),$$

et le symbole Re désigne la partie réelle de l'expression complexe qui le suit. Les grandeurs

$$C=\frac{1}{\pi}C(\omega)\,d\omega$$

représentent les amplitudes complexes infiniment petites des oscillations sinusoïdales (avec des pulsations de ω à $\omega+d\omega$) qui forment $f(t)$. La grandeur $C(\omega)$ est dite ***densité spectrale d'amplitude.*** La grandeur

$$g^2(\omega)=C(\omega)\,C^*(\omega)=|C(\omega)|^2,$$

où $C^*(\omega)=A(\omega)+iB(\omega)$ est une fonction complexe conjuguée de $C(\omega)$, est dite ***densité spectrale d'intensité.*** Elle caractérise la distribution de l'énergie dans le spectre.

4° Comme exemple de processus oscillatoire limité dans le temps peut servir l'émission d'un train d'ondes. La fonction $f(t)$ qui correspond au plus simple train d'ondes représentant un morceau de sinusoïde (fig. V.8.2),

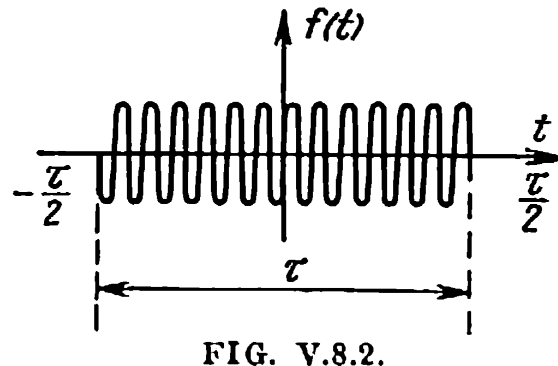


FIG. V.8.2.

émis par une source oscillant avec la pulsation ω^*, est de la forme:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < -\tau/2, \\ a \sin \omega^* t & \text{pour } -\tau/2 \leqslant t \leqslant \tau/2, \\ 0 & \text{pour } t > \tau/2, \end{cases}$$

où τ est la durée de l'émission du train, a son amplitude.

On peut écrire $f(t)$ sous forme d'intégrale de Fourier:

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty B(\omega) \sin \omega t \, d\omega,$$

où

$$B(\omega) = 2a \int_0^{\tau/2} \sin \omega^* \xi \sin \omega \xi \, d\xi =$$

$$= a \left\{ \frac{\sin \left[(\omega^* - \omega) \frac{\tau}{2} \right]}{\omega^* - \omega} - \frac{\sin \left[(\omega^* + \omega) \frac{\tau}{2} \right]}{\omega^* + \omega} \right\}.$$

Dans le cas où $\omega^* \tau \gg 2\pi$, c'est-à-dire lorsque la durée d'émission est très supérieure à la période des oscillations de la source d'ondes, la fonction $g^2(\omega) = [B(\omega)/\pi]^2$, caractérisant la *distribution de l'intensité dans le spectre*, est exprimée à l'aide de la formule approchée:

$$g^2(\omega) = \frac{a}{\pi^2} \left\{ \frac{\sin \left[(\omega^* - \omega) \frac{\tau}{2} \right]}{\omega^* - \omega} \right\}^2.$$

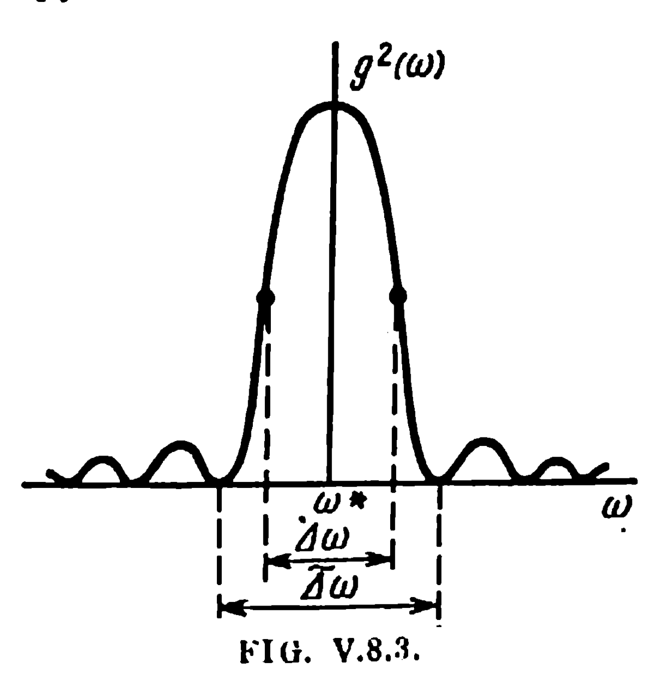


FIG. V.8.3.

Le graphique de cette fonction est montré fig. V.8.3. Le maximum central correspond à $\omega = \omega^*$ et est égal à $(a\tau/2\pi)^2$. La distance $\widetilde{\Delta}\omega$ entre deux valeurs nulles de $g^2(\omega)$ délimitant le maximum central est $4\pi/\tau$. Par conséquent,

$$\widetilde{\Delta}\omega \cdot \tau = 4\pi$$

et

$$\widetilde{\Delta}\omega \cdot \Delta x = 4\pi c,$$

où $\Delta x = \tau \cdot c$ est l'étendue dans l'espace du train d'ondes dans le vide. Plus court est le train, plus large est son spectre, c'est-à-dire plus intensément diffère le train d'une onde monochromatique.

5° Le spectre de l'onde est dit *continu* si la densité spectrale de son intensité $g^2(\omega)$ est une fonction continue de ω, différente de zéro dans un large intervalle de pulsations. La lumière émise par les solides et les liquides incandescents donne un spectre continu. La lumière ayant un spectre continu peut être considérée comme un ensemble d'ondes monochromatiques dont les pulsations forment une suite continue.

Le spectre de l'onde est dit *spectre de raies* si $g^2(\omega)$ n'est pratiquement différente de zéro que dans d'étroits intervalles discrets de pulsations $\omega_i \pm \frac{1}{2}\widetilde{\Delta\omega}_i$ ($\widetilde{\Delta\omega}_i \ll \omega_i$) à chacun desquels correspond sa *raie spectrale*. Les atomes de gaz raréfiés incandescents émettent par exemple une lumière donnant un spectre de raies. En première approximation, une telle lumière peut être considérée comme un ensemble d'ondes monochromatiques de pulsations ω_i.

Le spectre de l'onde est dit *spectre de bandes* si les raies spectrales lui correspondant forment des groupes discrets: *bandes* qui sont constituées d'une multitude de raies très rapprochées.

6° On appelle *largeur (demi-largeur) d'une raie spectrale* l'intervalle de pulsations $\Delta\omega$ (ou de longueurs d'ondes $\Delta\lambda$) compris entre les points de son contour pour lesquels $g^2 = \frac{1}{2} g^2_{max}$ (fig. V.8.3). La *largeur naturelle* des raies spectrales est liée à la durée finie de chaque rayonnement d'un atome ($\tau \sim 10^{-8}$ s), qui dépend des pertes d'énergie sur la radiation *(amortissement de radiation)*:

$$\Delta\omega_{nat} \sim 2\pi \cdot 10^8 \text{ s}^{-1} \quad \text{et} \quad \Delta\lambda_{nat} \sim 10^{-4} \text{ Å}.$$

7° La largeur des raies spectrales, observée dans les expériences, dépasse de beaucoup leur largeur naturelle. Ceci est dû à ce que les atomes émetteurs prenant part à l'agitation thermique chaotique se déplacent par rapport à l'appareil de mesure avec des vitesses de différentes valeurs et directions. Aussi doit-il apparaître par suite de l'effet Doppler (p. 558) un certain élargissement des raies spectrales, qui sera d'autant plus grand que plus intense sera l'agitation thermique, c'est-à-dire que plus élevée sera la température du gaz. Ce phénomène est appelé *élargissement par effet Doppler des raies spectrales.*

La valeur de l'élargissement par effet Doppler est:

$$\Delta\omega_{Dopp} = 2\frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{2kT}{m}\ln 2},$$

où m est la masse de l'atome, k la constante de Boltzmann, T la température absolue, c la vitesse de la lumière dans le vide, ω la pulsation d'une raie spectrale. L'élargissement par effet Doppler est le plus important pour les atomes légers et lors de décharges gazeuses, quand $\sqrt{\frac{2kT}{m}} \sim (10^3 \div 10^4)$ m/s, constitue pour la lumière visible

$$\Delta\omega_{\mathrm{Dopp}} \sim (10^{10} \div 10^{11})\ \mathrm{s}^{-1} \quad \text{et} \quad \Delta\lambda_{\mathrm{Dopp}} \sim (0{,}01 \div 0{,}1)\ \text{Å}.$$

8° La deuxième cause de l'élargissement des raies spectrales est la diminution de la durée τ de l'émission des atomes excités par suite de leur interaction avec d'autres atomes. Ce phénomène est appelé *élargissement par choc des raies spectrales*. Il dépend du type d'interaction des particules, de leur concentration, etc. Lors de la décharge gazeuse l'élargissement par choc est de même ordre que l'élargissement par effet Doppler ou bien supérieur à celui-ci. L'élargissement par choc s'accompagne également de l'apparition d'une certaine asymétrie dans la distribution de l'énergie dans les limites de la raie spectrale, dont le maximum d'intensité se déplace quelque peu du côté des grandes fréquences.

9° Le spectre des ondes électromagnétiques émises par une substance quelconque est dit *spectre d'émission*. Le spectre des ondes électromagnétiques absorbées par une substance quelconque est appelé *spectre d'absorption*.

3. Absorption de la lumière

1° On appelle *absorption de la lumière* le phénomène de diminution de l'énergie de l'onde lumineuse lors de sa propagation dans la substance, qui se produit par suite de la transformation de l'énergie de l'onde en énergie interne de la substance ou en énergie d'émission secondaire ayant autre composition spectrale et autres directions de propagation (photoluminescence, p. 737). L'absorption de la lumière peut produire: le réchauffement de la substance, l'ionisation des atomes ou des molécules, les réactions photochimiques, la photoluminescence, etc. Il ne faut pas confondre l'absorption de la lumière («l'absorption réelle») avec le phénomène de décroissance de l'énergie d'une onde lumineuse transmise dans un milieu optiquement hétérogène par suite de la dispersion de la lumière.

2° L'absorption de la lumière dans la substance est décrite par la *loi de Lambert-Bouguer:*

$$I = I_0 e^{-\mu d},$$

où I_0 et I sont les intensités de l'onde lumineuse monochromatique plane à l'entrée dans une couche d'absorbant d'épaisseur d et à la sortie de celle-ci, μ le *facteur linéaire d'absorption* de la lumière par la substance. Le facteur d'absorption est numériquement égal à l'épaisseur inverse de la couche de substance nécessaire pour réduire l'intensité de la lumière, traversant la couche, de $e = 2{,}718...$ fois. La valeur de μ dépend de la fréquence (de la longueur d'onde) de la lumière, de la nature chimique et de l'état de la substance. La relation entre μ et l'indice de réfraction complexe de la substance absorbante est de la forme:

$$\mu = \frac{4\pi}{\lambda} n\varkappa,$$

où λ est la longueur d'onde dans le vide.

Certaines substances, pour des intensités suffisamment élevées de la lumière, n'obéissent pas à la loi de Lambert-Bouguer: le facteur d'absorption μ diminue avec l'accroissement de I_0. La théorie quantique de l'absorption de la lumière explique ce phénomène. Il est dû à ce qu'aux intensités élevées de la lumière, dans la substance (la durée de vie des molécules excitées de cette substance est suffisamment grande (p. 770)) la quantité de molécules excitées peut être considérable et d'autant plus grande que plus élevée est I_0.

3° La *loi de Beer* est valable dans le cas de solutions diluées d'absorbant dans un solvant non absorbant:

$$\mu = Ac,$$

et la *loi de Lambert-Bouguer-Beer* est de la forme:

$$I = I_0 e^{-Acd},$$

où c est la concentration du soluté, A une constante dépendant des propriétés du soluté et de la fréquence de la lumière.

Aux grandes concentrations la loi de Beer tombe en défaut, étant donné que sous l'influence de l'interaction entre les molécules rapprochées de l'absorbant la grandeur A commence à dépendre de la concentration de la solution.

4° L'aspect du spectre d'absorption de la lumière par la substance est déterminé par le caractère de la dépendance de μ vis-à-vis de la fréquence. Le gaz raréfié constitué d'atomes, se trouvant à des distances moyennes considérables les uns des autres, présente le spectre le plus simple: *spectre de raies d'absorption*. Les fréquences des raies d'absorption coïncident avec les fréquences des raies du spectre d'émission de ce même gaz. Le gaz moléculaire raréfié présente un *spectre de bandes d'absorption*. La structure des bandes d'absorption est déterminée par la structure des niveaux énergétiques des molé-

cules (pp. 823-826). Les diélectriques liquides et solides ont des spectres d'absorption continus qui sont constitués de bandes de fréquences relativement larges pour lesquelles le facteur d'absorption $\mu \neq 0$. En dehors de ces fréquences, les diélectriques sont transparents ($\mu \approx 0$). L'*absorption sélective* explique la teinte de nombreux minéraux et solutions de colorants.

En ce qui concerne l'absorption de la lumière par les métaux, voir p. 619.

4. Diffusion de la lumière

1° On appelle *diffusion de la lumière* le processus de transformation de la lumière dans la substance, s'accompagnant d'une variation de direction de sa propagation et se manifestant en luminescence impropre de la substance. La luminescence impropre est due aux oscillations forcées des électrons dans les atomes, les molécules ou les ions du milieu diffusant, produites par la lumière incidente. La diffusion de la lumière a lieu lors de sa propagation dans un milieu optiquement hétérogène.

2° On appelle *optiquement homogène* le milieu dans lequel l'indice de réfraction ne dépend pas des coordonnées et reste constant dans tout le volume du milieu. Sous l'action de la lumière incidente les électrons optiques des molécules du milieu effectuent des oscillations forcées et émettent des ondelettes. Les portions de volume du milieu, petites devant la longueur d'onde λ mais contenant néanmoins un nombre suffisamment grand de molécules, sont considérées comme des sources d'ondelettes cohérentes (centres de diffusion). Par suite de la distribution uniforme des molécules d'un milieu optiquement homogène, la diffusion de la lumière dans un tel milieu fait défaut: dans toutes les directions, autres que la direction du faisceau lumineux incident, les ondelettes s'éteignent mutuellement par interférence.

3° On appelle *optiquement hétérogène* le milieu dont l'indice de réfraction ne reste pas constant, mais varie de façon irrégulière de point en point du milieu (par exemple, au compte des fluctuations de densité, de la présence de petites particules étrangères dans le milieu, etc.). Les ondelettes ont dans ce cas des composantes incohérentes, qui nous permettent d'observer la diffusion de la lumière. L'apparition d'ondelettes incohérentes est due à ce que la diffusion de la lumière est réalisée sur des hétérogénéités «incohérentes», c'est-à-dire sur des hétérogénéités non liées l'une à l'autre, qui, de plus, se déplacent chaotiquement dans le milieu par agitation thermique. Ceci étant, les différences de marche entre les ondelettes émises par diverses hétérogénéités varient de façon chaotique. Com-

me exemples de milieux optiquement hétérogènes peuvent servir les *milieux troubles:* les aérosols (fumée, brouillard), les émulsions, les solutions colloïdales, etc., qui contiennent de petites particules dont l'indice de réfraction diffère de l'indice de réfraction du milieu.

4° La diffusion de la lumière dans les milieux troubles contenant des hétérogénéités de dimensions non supérieures à $(0,1 \div 0,2)\ \lambda$, où λ est la longueur d'onde de la lumière, est appelée *diffusion Rayleigh* ou *effet Tyndall.* Si les particules du milieu trouble sont électriquement isotropes et n'absorbent pas la lumière, dans le cas de diffusion Rayleigh de la lumière naturelle (p. 678) l'intensité de la lumière diffusée par unité de volume du milieu sous l'angle ϑ par rapport à la propagation de la lumière incidente est:

$$I_\vartheta = a \frac{N_0\ V^2}{R^2 \lambda^4}\ I_0 (1 + \cos^2\vartheta),$$

où V est le volume d'une particule, N_0 le nombre de particules par unité de volume du milieu, R la distance entre le volume diffusant et le point d'observation, λ la longueur d'onde de la lumière, I_0 l'intensité de la lumière incidente, a un coefficient dépendant du degré d'hétérogénéité du milieu trouble, c'est-à-dire des indices de réfraction n et n_0 des particules et du milieu où elles se trouvent (lorsque $n = n_0$, $a = 0$). Il résulte de cette formule que, toutes les autres conditions étant égales, l'intensité de la lumière diffusée est inversement proportionnelle à λ^4 (*loi de Rayleigh*). C'est pourquoi lorsqu'une onde non monochromatique traverse un milieu trouble finement dispersé, dans la lumière diffusée prédomine la radiation de petites longueurs d'onde, dans la lumière transmise la radiation de grandes longueurs d'onde.

La dépendance de l'intensité de la lumière diffusée vis-à-vis de l'angle de diffusion ϑ dans le cas de diffusion Rayleigh de la lumière naturelle par des particules électriquement isotropes est de la forme:

$$I_\vartheta = I_{\pi/2} (1 + \cos^2\vartheta),$$

où $I_{\pi/2}$ est l'intensité de la lumière diffusée sous l'angle $\vartheta = \pi/2$.

La dépendance de I_ϑ vis-à-vis de ϑ, représentée en coordonnées sphériques, est appelée *indicatrice de diffusion*. L'indicatrice de diffusion Rayleigh est représentée fig V.8.4. Elle a la forme d'une surface de révolution symétrique aussi bien par rapport à la direction du faisceau incident de lumière ($\vartheta = 0$) que par rapport au plan $\vartheta = \pi/2$ passant par l'origine des coordonnées: centre de l'indicatrice. La lumière diffusée sous l'angle $\vartheta = \pi/2$ est entièrement polarisée dans le plan passant par les rayons incident et diffusé.

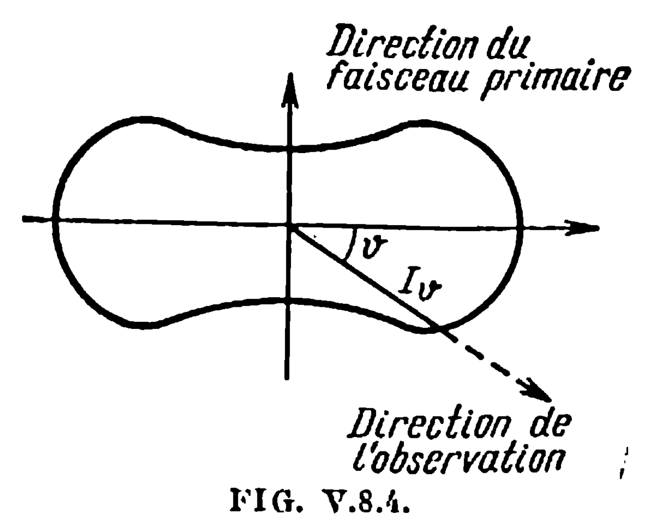


FIG. V.8.4.

5° Si les dimensions linéaires des hétérogénéités sont comparables à la longueur d'onde ou sont supérieures à celle-ci, la dépendance de l'intensité de la lumière diffusée I vis-à-vis de λ devient plus faible: $I \sim \lambda^{-p}$, où $p < 4$, et diminue avec l'augmentation des dimensions des hétérogénéités. A cause de l'interférence de la lumière diffusée par les diverses portions de chaque hétérogénéité la dépendance de I_ϑ vis-à-vis de l'angle ϑ devient plus complexe que dans le cas de diffusion Rayleigh. L'indicatrice n'a qu'un seul axe de symétrie coïncidant avec la direction de la lumière incidente. Avec l'augmentation des dimensions des particules la diffusion en avant (c'est-à-dire dans le domaine des angles aigus ϑ) prédomine de plus en plus sur la diffusion en arrière (c'est-à-dire dans le domaine des angles obtus ϑ).

Ce phénomène est appelé *effet Mie.* La lumière diffusée sous l'angle $\vartheta = \pi/2$ n'est polarisée que partiellement et son degré de polarisation dépend de la forme et des dimensions des particules diffusantes.

6° La diffusion est observée également dans les milieux optiquement purs, c'est-à-dire dans les milieux ne contenant pas de particules étrangères quelconques (par exemple dans les gaz et les liquides, dans les solutions vraies, p. 274). On appelle ce phénomène *diffusion moléculaire de la lumière.* Elle est due aux fluctuations de densité (p. 250) produites par agitation thermique chaotique des molécules. Les fluctuations d'orientation des molécules (fluctuations d'anisotropie) et dans les solutions vraies, de plus, les fluctuations de concentration sont des causes complémentaires de l'apparition d'hétérogénéités optiques dans les milieux purs avec des molécules électriquement anisotropes.

Les fluctuations de densité dans le gaz sont particulièrement grandes au point critique (p. 262). L'intense diffusion moléculaire observée dans ce cas est appelée *opalescence critique.*

7° Selon la théorie statistique des fluctuations (p. 248), les dimensions des diverses parties du milieu correspondant à des fluctuations de densité tant soit peu notables (et par conséquent d'indice de réfraction) sont dans les conditions normales très inférieures aux longueurs

d'onde de la lumière visible. C'est pourquoi la dépendance de l'intensité de la lumière diffusée vis-à-vis de la longueur d'onde λ et de l'angle de diffusion ϑ pour la diffusion moléculaire est la même que pour la diffusion Rayleigh dans les milieux troubles finement dispersés. Pour la diffusion moléculaire de la lumière naturelle, l'intensité I_ϑ de la lumière, diffusée sous l'angle ϑ par unité de volume du milieu dont les molécules sont électriquement isotropes, est:

$$I_\vartheta = \frac{2\pi^2 kT}{R^2\lambda^4}\,\beta\left(\rho n\,\frac{\partial n}{\partial \rho}\right)^2 (1 + \cos^2\vartheta)\,I_0,$$

où k est la constante de Boltzmann, T la température absolue, β le coefficient de compressibilité thermodynamique de la substance du milieu, ρ la densité du milieu, n l'indice de réfraction du milieu pour la longueur d'onde λ, R la distance entre le volume considéré et le point auquel on observe la diffusion de la lumière. En particulier, pour la diffusion moléculaire de la lumière naturelle dans un gaz parfait:

$$I_\vartheta = \frac{2\pi^2 (n-1)^2}{R^2 N_0 \lambda^4}(1 + \cos^2\vartheta) I_0,$$

où n est l'indice de réfraction du gaz, N_0 le nombre de molécules du gaz par unité de volume. La couleur azur du ciel, ainsi que la teinte bleuâtre de la lumière diffusée par un gaz éclairé en lumière blanche s'expliquent par la diffusion intense des ondes lumineuses courtes dans l'atmosphère.

La diffusion de la lumière due aux fluctuations d'anisotropie est beaucoup plus faible que la diffusion de la lumière due aux fluctuations de densité.

8° Lors de la diffusion moléculaire de la lumière naturelle a lieu sa polarisation partielle. Pour un angle de diffusion $\vartheta = \pi/2$ dans le cas de molécules non polaires (p. 377) électriquement isotropes, la lumière diffusée est entièrement polarisée dans le plan passant par les rayons incident et diffusé. Dans le cas de molécules électriquement anisotropes la lumière diffusée sous le même angle de diffusion n'est polarisée que partiellement. Le degré de polarisation de la lumière diffusée est donné par la grandeur

$$\Delta = \frac{2I_\perp}{I_\parallel + I_\perp},$$

où $I_\parallel$ et $I_\perp$ sont les intensités des composantes des ondes diffusées correspondant à la polarisation dans le plan indiqué ci-dessus et dans le plan perpendiculaire à celui-ci.

9° Par suite de la diffusion de la lumière dans un milieu optiquement hétérogène l'intensité de l'onde lumineuse plane décroît

graduellement à mesure que l'onde progresse dans le milieu. Cette dépendance est analogue à la loi de Lambert-Bouguer (p. 709):

$$I = I_0 e^{-hd},$$

où d est l'épaisseur de la couche de milieu diffusant et h le *coefficient d'extinction*. Si, de plus, le milieu diffusant absorbe la lumière, on a:

$$I = I_0 e^{-(\mu+h)d},$$

où μ est le coefficient linéaire d'absorption (p. 709).

On appelle *coefficient de diffusion de la lumière* la grandeur

$$K_\vartheta = \frac{I_\vartheta}{I_0} \frac{R^2}{V},$$

où V est le volume diffusant, R la distance entre le volume et le point d'observation dans lequel l'intensité de la lumière diffusée sous l'angle ϑ est égale à I_ϑ, I_0 l'intensité de la lumière incidente. Pour la diffusion moléculaire due aux fluctuations de densité du milieu avec des molécules électriquement isotropes (le sens des notations voir plus haut, 7°):

$$K_\vartheta = \frac{2\pi^2}{\lambda^4}\left(\rho n \frac{\partial n}{\partial \rho}\right)^2 \beta k T \,(1 + \cos^2 \vartheta) = K_{\pi/2}\,(1 + \cos^2 \vartheta).$$

En particulier, pour un gaz parfait:

$$K_\vartheta = \frac{2\pi^2 (n-1)^2}{N_0 \lambda^4} (1 + \cos^2 \vartheta) = K_{\pi/2}\,(1 + \cos^2 \vartheta).$$

Le coefficient d'extinction est:

$$h = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} K_\vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta = \frac{16}{3} \pi K_{\pi/2}.$$

En ce qui concerne la diffusion combinatoire de la lumière, voir p. 826.

CHAPITRE 9

Rayonnement thermique

1. Rayonnement thermique

1° Les corps réchauffés émettent des ondes électromagnétiques. Ce rayonnement est réalisé par transformation de l'énergie de l'agitation thermique des particules du corps en énergie de rayonnement. Le rayonnement électromagnétique d'un corps en équilibre thermodynamique est appelé *rayonnement thermique* [1]). Un tel rayonnement est réalisé, par exemple, quand le corps émetteur se trouve dans une enceinte fermée aux parois non transparentes dont la température est égale à la température du corps.

Dans un système thermiquement isolé de corps isothermes l'échange de chaleur entre ces corps par émission et absorption de rayonnement thermique ne peut produire la rupture de l'équilibre thermodynamique du système, étant donné que ceci serait contraire au deuxième principe de la thermodynamique. C'est pourquoi le rayonnement thermique des corps suit la *règle de Prévost:* si deux corps absorbent à une même température différentes quantités d'énergie, leur rayonnement thermique à cette température doit être différent.

2° On appelle *pouvoir émissif* du corps la grandeur $E_{\nu,T}$, numériquement égale à la densité superficielle de la puissance du rayonnement thermique du corps pour un intervalle de fréquences de largeur unité:

$$E_{\nu,T} = \frac{dW}{d\nu},$$

[1]) Parfois on comprend sous rayonnement thermique non seulement un rayonnement en équilibre, mais aussi un rayonnement en déséquilibre dû au réchauffement des corps.

où dW est l'énergie du rayonnement thermique émis par unité de surface du corps par unité de temps dans l'intervalle de fréquences compris entre ν et $\nu + d\nu$.

Le pouvoir émissif $E_{\nu,T}$ représente la caractéristique spectrale du rayonnement thermique du corps. Il dépend de la fréquence ν, de la température absolue T du corps, ainsi que du matériau dont le corps est fait, de sa forme et de l'état de sa surface. En u. SI $E_{\nu,T}$ est mesuré en J/m^2.

3° On appelle *pouvoir absorbant* du corps la grandeur $A_{\nu,T}$ montrant quelle portion de l'énergie dW_{inc} transmise par unité de temps à une unité de surface du corps par les ondes électromagnétiques incidentes avec des fréquences entre ν et $\nu + d\nu$ est absorbée par le corps:

$$A_{\nu,T} = \frac{dW_{abs}}{dW_{inc}}.$$

$A_{\nu,T}$ est une grandeur sans dimension. Elle dépend de la fréquence du rayonnement et de la température du corps, ainsi que du matériau dont ce corps est fait, de sa forme et de l'état de sa surface.

4° Un corps est dit *noir* si à n'importe quelle température il absorbe intégralement toutes les ondes électromagnétiques qui lui sont incidentes: $A_{\nu,T}^{noir} \equiv 1$.

Les corps réels ne sont pas noirs, néanmoins certains d'entre eux sont par leurs propriétés optiques proches d'un corps noir (le noir de fumée, la nielle de platine, le velours noir ont, dans le domaine du visible, $A_{\nu,T}$ sensiblement égaux à l'unité). Comme modèle de surface noire parfaite peut servir une petite ouverture faite dans la paroi non transparente d'une enceinte. Pratiquement, le rayonnement électromagnétique venant du dehors dans l'enceinte à travers l'ouverture, après nombreuses réflexions sur la surface intérieure de l'enceinte, est intégralement absorbé par celle-ci, indépendamment du matériau dont les parois de l'enceinte sont faites.

Le corps est dit *gris* si son pouvoir absorbant est le même pour toutes les fréquences ν et dépend uniquement de la température, du matériau et de l'état de la surface du corps $\left(A_{\nu,T}^{gris} = A_T\right)$.

5° Entre les pouvoirs émissif $E_{\nu,T}$ et absorbant $A_{\nu,T}$ de n'importe quel corps non transparent existe la relation suivante *(loi de Kirchhoff sous forme différentielle)*:

$$\frac{E_{\nu,T}}{A_{\nu,T}} = \varepsilon_{\nu,T}.$$

Pour une fréquence et une température arbitraires le rapport du pouvoir émissif au pouvoir absorbant est le même pour tous les corps et égal au pouvoir émissif $\varepsilon_{\nu,T}$ du corps noir, qui représente une fonction de la fréquence et de la température seulement *(fonction de Kirchhoff)*.

Il suit de la loi de Kirchhoff que si un corps n'absorbe pas de rayonnement à la température donnée T dans l'intervalle de fréquences compris entre ν et $\nu + d\nu$ ($A_{\nu,T} = 0$), il ne peut pas de même émettre de rayonnement en équilibre à cette température T dans cet intervalle de fréquences: $E_{\nu,T} = A_{\nu,T}$, $\varepsilon_{\nu,T} = 0$.

6° Le *pouvoir émissif intégral* (ou la *luminance énergétique)* du corps

$$E_T = \int_0^\infty E_{\nu,T}\, d\nu$$

représente la densité superficielle de puissance du rayonnement thermique du corps, autrement dit, l'énergie de rayonnement de toutes les fréquences possibles, émis par unité de surface du corps par unité de temps.

Le pouvoir émissif intégral ε_T du corps noir est:

$$\varepsilon_T = \int_0^\infty \varepsilon_{\nu,T}\, d\nu.$$

La relation entre le pouvoir émissif intégral du corps gris et son pouvoir absorbant A_T est:

$$E_T^{\text{gris}} = A_T \varepsilon_T.$$

Loi de Kirchhoff sous forme intégrale (pour les corps gris): le rapport du pouvoir émissif intégral du corps gris à son pouvoir absorbant est égal au pouvoir émissif intégral du corps noir à la même température.

7° Le pouvoir émissif intégral d'un corps quelconque est:

$$E_T = \int_0^\infty A_{\nu,T}\ \varepsilon_{\nu,T}\, d\nu,$$

ou bien

$$E_T = \alpha \varepsilon_T,$$

où α est le *taux de noirceur* du corps:

$$\alpha = \frac{\int_0^\infty A_{\nu,T}\,\varepsilon_{\nu,T}\,d\nu}{\varepsilon_T} = \frac{\int_0^\infty A_{\nu,T}\,\varepsilon_{\nu,T}\,d\nu}{\int_0^\infty \varepsilon_{\nu,T}\,d\nu};$$

α dépend de la température, du matériau dont le corps est fait et de l'état de sa surface.

Le pouvoir absorbant des corps $A_{\nu,T}$ peut varier dans les limites de 0 à 1. C'est pourquoi $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Pour le corps noir $\alpha = 1$. Les corps non transparents dont le taux de noirceur est $\alpha = 0$ ne rayonnent pas et n'absorbent pas d'ondes électromagnétiques ($E_{\nu,T} = A_{\nu,T} = 0$). Ils réfléchissent entièrement le rayonnement qui leur est incident. Si dans ce cas la réflexion a lieu conformément aux lois de l'optique géométrique, le corps est dit *miroir parfaitement réfléchissant.*

2. Lois du rayonnement du corps noir

1° Les lois du rayonnement du corps noir établissent la dépendance de ε_T et $\varepsilon_{\nu,T}$ vis-à-vis de la fréquence et de la température.

Loi de Stefan-Boltzmann:

$$\varepsilon_T = \sigma T^4.$$

Le pouvoir émissif intégral ε_T du corps noir est proportionnel à la quatrième puissance de sa température absolue.

La grandeur σ est la *constante universelle de Stefan-Boltzmann*, égale à $5{,}67 \cdot 10^{-8}$ W/m²·degré⁴.

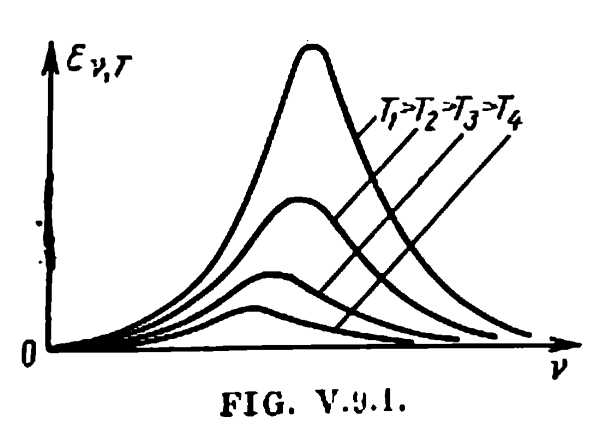


FIG. V.9.1.

2° La distribution de l'énergie dans le spectre de rayonnement du corps noir, autrement dit, les courbes montrant la dépendance de $\varepsilon_{\nu,T}$ vis-à-vis de la fréquence à différentes températures, est donnée fig. V.9.1. Aux petites fréquences $\varepsilon_{\nu,T}$ est proportionnel au produit $\nu^2 T$, dans le domaine des grandes fréquen-

ces $\varepsilon_{\nu,T}$ est proportionnel à $\nu^3 \cdot e^{-\frac{a\nu}{T}}$, où a est une constante.

L'aire S délimitée par la courbe de dépendance de $\varepsilon_{\nu,T}$ par rapport à ν et l'axe d'abscisses est proportionnelle à ε_T:

$$S \backsim \varepsilon_T = \int_0^\infty \varepsilon_{\nu,T}\, d\nu.$$

En vertu de la loi de Stefan-Boltzmann cette aire est proportionnelle à la quatrième puissance de la température absolue.

3° *Loi de Wien:*

$$\varepsilon_{\nu,T} = c\nu^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right),$$

où c est la vitesse de la lumière dans le vide et $f(\nu/T)$ une fonction universelle du rapport de la fréquence de rayonnement du corps noir à sa température.

La fréquence de rayonnement ν_{max}, correspondant à la valeur maximale du pouvoir émissif $\varepsilon_{\nu,T}$ du corps noir, d'après la loi de Wien est égale à

$$\nu_{max} = b_1 T,$$

où b_1 est une grandeur constante dépendant de la fonction $f(\nu/T)$.

Loi du déplacement de Wien: la fréquence correspondant à la valeur maximale du pouvoir émissif $\varepsilon_{\nu,T}$ du corps noir est directement proportionnelle à sa température absolue.

4° La relation entre le pouvoir émissif $\varepsilon_{\nu,T}$ rapporté à l'intervalle de fréquences $d\nu$ et le pouvoir émissif $\varepsilon_{\lambda,T}$ rapporté à l'intervalle de longueurs d'onde $d\lambda$ est:

$$\varepsilon_{\lambda,T} = \frac{c}{\lambda^2}\ \varepsilon_{\nu,T}.$$

Autre forme de la loi de Wien:

$$\varepsilon_{\lambda,T} = \frac{c^4}{\lambda^5} f\left(\frac{c}{\lambda T}\right).$$

La longueur d'onde λ_{max} correspondant à la valeur maximale du pouvoir émissif $\varepsilon_{\lambda,T}$ est:

$$\lambda_{max} = \frac{b}{T}.$$

Autre forme de la loi du déplacement de Wien: la longueur d'onde correspondant à la valeur maximale du pouvoir émissif $\varepsilon_{\lambda,T}$ du corps noir est inversement proportionnelle à sa température absolue. La grandeur b est la *constante de Wien*, égale à 0,002898 m·degré.

La loi du déplacement explique pourquoi lors de l'abaissement de la température des corps réchauffés dans leur spectre prédominent de plus en plus intensément les radiations à ondes longues.

Les valeurs λ_{max} et ν_{max} ne sont pas liées par la formule $\lambda = c/\nu$, les maximums de $\varepsilon_{\nu,T}$ et $\varepsilon_{\lambda,T}$ étant disposés dans différentes parties du spectre.

5° On appelle *rayonnement noir* le rayonnement d'équilibre réalisé dans une enceinte fermée aux parois calorifuges puisqu'indépendamment du matériau des parois de l'enceinte ce rayonnement est identique au rayonnement thermique du corps noir à la même température. Ce rayonnement est isotrope, c'est-à-dire qu'il peut être considéré comme un ensemble d'ondes planes non polarisées et incohérentes avec des fréquences de 0 à ∞, se propageant uniformément dans toutes les directions. La densité volumique d'énergie w du champ du rayonnement noir est la même en tous les points et dépend uniquement de la température:

$$w = \frac{4\varepsilon_T}{c} = \frac{4\sigma}{c} T^4,$$

où ε_T est le pouvoir émissif intégral du corps noir, c la vitesse de la lumière dans le vide, σ la constante de Stefan-Boltzmann.

La densité spectrale de la densité volumique d'énergie du champ du rayonnement noir est:

$$w_\nu = \frac{dw}{d\nu} = \frac{4}{c} \varepsilon_{\nu,T},$$

où dw est la densité volumique d'énergie du champ de rayonnement dans l'intervalle de fréquences entre ν et $\nu + d\nu$, $\varepsilon_{\nu,T}$ le pouvoir émissif du corps absolument noir.

La pression exercée par le rayonnement noir sur les parois de l'enceinte est:

$$p = \frac{w}{3} = \frac{4}{3c} \sigma T^4.$$

6° Du point de vue énergétique, le rayonnement noir est équivalent au rayonnement du système d'un grand nombre d'oscillateurs harmoniques n'interagissant pas entre eux, appelés *oscillateurs*

teurs à radiation. Si $\bar{\varepsilon}(\nu)$ est l'énergie moyenne d'un oscillateur à radiation de fréquence propre ν, on a:

$$w_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\bar{\varepsilon}(\nu) \text{ et } \varepsilon_{\nu,T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2}\bar{\varepsilon}(\nu).$$

En vertu de la loi classique sur l'équipartition de l'énergie entre les degrés de liberté $\bar{\varepsilon}(\nu) = kT$, où k est la constante de Boltzmann, et

$$\varepsilon_{\nu,T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2}kT.$$

Cette relation est appelée *formule de Rayleigh-Jeans.*

Dans le domaine des hautes fréquences elle conduit à une brusque divergence avec l'expérience portant le nom de *«catastrophe ultraviolette»:* $\varepsilon_{\nu,T}$ augmente de façon monotone avec l'accroissement de la fréquence sans avoir de maximum, et le pouvoir émissif intégral du corps noir devient infiniment grand.

7° La cause des difficultés, indiquées ci-dessus, surgissant lors de la recherche de la forme de la fonction de Kirchhoff $\varepsilon_{\nu,T}$ est liée à l'un des principes fondamentaux de la physique classique en vertu duquel l'énergie de n'importe quel système peut varier de façon continue, c'est-à-dire prendre des valeurs aussi proches que possibles.

En vertu de la théorie quantique de Planck, l'énergie de l'oscillateur à radiation de fréquence propre ν ne peut admettre que des valeurs discrètes (quantifiées). Ces valeurs diffèrent l'une de l'autre d'un nombre entier de portions élémentaires appelées *quanta d'énergie:*

$$\varepsilon_0 = h\nu;$$

$h = 6{,}625 \cdot 10^{-34}$ J · s est la *constante de Planck (quantum d'action).* L'émission et l'absorption de l'énergie par les particules du corps émetteur (par les atomes, les molécules ou les ions) échangeant de l'énergie avec les oscillateurs à radiation doivent se produire non de façon continue, mais par portions discrètes (par quanta).

8° L'énergie moyenne de l'oscillateur à radiation est:

$$\bar{\varepsilon}(\nu) = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}.$$

Formule de Planck pour le pouvoir émissif du corps noir:

$$\varepsilon_{\nu,T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}.$$

Autre forme de la formule de Planck:

$$\varepsilon_{\lambda,T} = \frac{2\pi c^2}{\lambda^5} \frac{h}{e^{\frac{hc}{k\lambda T}} - 1}.$$

La formule de Planck concorde bien avec les résultats des expériences se rapportant à la mesure de la répartition de l'énergie dans le spectre du corps noir à différentes températures. La formule de Rayleigh-Jeans est un cas particulier de cette formule (pour $h\nu \ll kT$). Dans le domaine des hautes fréquences ($h\nu \gg kT$) la formule de Planck donne:

$$\varepsilon_{\nu,T} \approx \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} e^{-\frac{h\nu}{kT}}.$$

De la formule de Planck découlent la loi du déplacement de Wien et la loi de Stefan-Boltzmann. La constante de Stefan-Boltzmann peut être exprimée par la constante de Planck:

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15h^3c^2}.$$

On trouve la valeur numérique de la constante de Planck à l'aide des valeurs connues de k, σ et c. On peut l'exprimer également par la constante de Wien b.

3. Notion de pyrométrie optique

1° On appelle *pyrométrie optique* l'ensemble des méthodes de mesures des hautes températures, basées sur l'utilisation de la dépendance entre la température et le pouvoir émissif (intégral et spectral) du corps à étudier. Les appareils utilisés à cet effet sont appelés *pyromètres à radiation*. Dans les pyromètres à radiation on enregistre le rayonnement total du corps réchauffé à étudier et dans les *pyromètres optiques*, son rayonnement dans une ou deux portions étroites du spectre. L'application des pyromètres à radiation pour évaluer la température des corps solides, liquides ou gazeux n'est possible que si l'on peut admettre avec un degré

suffisant de précision que ces corps sont en équilibre thermodynamique (ou dans des états proches de l'équilibre).

2° On appelle *température de rayonnement* T_r d'un corps donné la température du corps noir tel que son rayonnement total corresponde au rayonnement du corps à étudier. La température vraie du corps est:

$$T = \frac{T_r}{\sqrt[4]{\alpha_T}},$$

où $\alpha_{T'} = E_T/\varepsilon_T$ est le taux de noirceur du corps considéré à la température T. Etant donné que $\alpha_T \leqslant 1$, on a $T \geqslant T_r$.

3° On appelle *température de couleur* T_c d'un corps non noir la température T du corps noir dont la répartition spectrale de l'énergie est voisine de celle du corps étudié à une température donnée. Sa mesure revient à la détermination des valeurs des pouvoirs émissif ($E_{\lambda,T}$) et absorbant ($A_{\lambda,T}$) du corps considéré pour deux différentes longueurs d'onde λ_1 et λ_2. Dans ce cas, conformément à la formule simplifiée de Planck:

$$\varepsilon_{\lambda,T} = \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5} e^{-hc/k\lambda T},$$

juste pour $\lambda T \ll \frac{hc}{k}$,

$$\frac{1}{T} - \frac{1}{T_c} = \frac{k}{hc\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)} \ln \frac{A_{\lambda_1,T}}{A_{\lambda_2,T}}.$$

Pour les corps gris $A_{\lambda_1,T} = A_{\lambda_2,T}$ et $T_c = T$. Pour les corps différant fortement des corps gris (doués, par exemple, d'absorption ou d'émission sélective) la notion de température de couleur n'a pas de sens.

4° On appelle *température de luminance* T_l d'un corps la température du corps noir dont la densité spectrale de luminance énergétique pour la longueur d'onde λ_0 (habituellement $\lambda_0 = 660$ nm $=$ $= 0{,}660$ μ) est égale à la densité spectrale de luminance énergétique du corps considéré pour la même longueur d'onde dans la direction de la normale à sa surface.

La densité spectrale de luminance énergétique du corps émetteur à la température T est:

$$b(\lambda, T) = \frac{dB_é}{d\lambda},$$

où $dB_\acute{e}$ est l'énergie émise par unité de surface du corps par unité de temps dans l'intervalle de longueurs d'onde comprises entre λ et $\lambda + d\lambda$ à l'intérieur d'un angle solide unité dans une direction donnée. Pour le corps émetteur obéissant à la loi de Lambert:

$$b(\lambda,\ T) = \frac{1}{\pi} E_{\lambda,\ T},$$

où $E_{\lambda,\ T}$ est le pouvoir émissif du corps. En particulier, pour le corps noir

$$b_0(\lambda,\ T) = \frac{1}{\pi} \varepsilon_{\lambda,\ T}.$$

Si $\lambda_0 T \ll \frac{hc}{k}$ (3°), la température vraie du corps est liée à sa température de luminance (pour $\lambda = \lambda_0$) par la relation

$$\frac{1}{T} - \frac{1}{T_1} = \frac{k\lambda_0}{hc} \ln \frac{b\ (\lambda_0, T)}{b_0(\lambda_0, T)}.$$

En particulier, si le corps étudié obéit à la loi de Lambert, on a:

$$\frac{1}{T} - \frac{1}{T_1} = \frac{k\lambda_0}{hc} \ln\ A_{\lambda_0,\ T},$$

où $A_{\lambda_0, T}$ est le pouvoir absorbant du corps. Pour tous les corps, excepté le corps noir, $T > T_1$.

CHAPITRE 10

Effets de la lumière

1. Effet photoélectrique

1° La lumière présente une double nature: *ondulatoire et corpusculaire*. D'une part, elle jouit de propriétés ondulatoires conditionnant les phénomènes d'interférence, de diffraction, de polarisation et, d'autre part, elle représente un flux de particules: photons possédant une masse au repos nulle et se déplaçant à une vitesse égale à celle de la lumière dans le vide. L'énergie W du photon et son impulsion p pour l'onde électromagnétique lui correspondant de fréquence ν et de longueur d'onde dans le vide sont égales à

$$W = h\nu = \frac{hc}{\lambda}, \quad p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda},$$

où h est la constante de Planck (p. 721).

Le photon possède un spin $\hbar$ (cf. le tableau p. 898). Les photons obéissent à la statistique quantique de Bose-Einstein (p. 236). Aux basses fréquences ν les propriétés ondulatoires de la lumière prédominent et aux hautes fréquences, les propriétés corpusculaires.

Les photons sont émis lors de passages des atomes, molécules, ions et noyaux atomiques des états excités aux états d'énergie moindre. Ils sont émis également par suite de l'accélération et du freinage des particules chargées, lors de la désintégration et de l'annihilation (p. 910) des particules. Au cours des processus d'émission (d'absorption) du photon un certain moment d'impulsion est enlevé au système (est fourni à celui-ci), égal à $m\hbar$ ($m = 1, 2, 3, \ldots$).

2° On appelle *effet photoélectrique* le processus d'interaction du rayonnement électromagnétique avec la substance au cours duquel l'énergie des photons est transmise aux électrons de cette substance. Pour les systèmes condensés (corps solides et liquides)

on distingue l'*effet photoélectrique externe* lors duquel l'absorption de photons s'accompagne d'expulsion d'électrons hors du corps, et l'*effet photoélectrique interne* lors duquel les électrons tout en restant dans le corps subissent un changement de leur état énergétique. Dans les gaz l'effet photoélectrique consiste en l'ionisation des atomes ou des molécules par rayonnement (photo-ionisation, p. 830).

Un type particulier d'effet photoélectrique est l'absorption de photons de rayons gamma durs par des noyaux atomiques, qui s'accompagne de l'émission de nucléons des noyaux (*effet photoélectrique nucléaire*, p. 883).

3° Les électrons expulsés de la substance lors de l'effet photoélectrique externe sont appelés *photoélectrons*. Si l'on crée entre le corps irradié et un certain conducteur (l'anode) un champ électrique de différence de potentiel φ, accélérant les photoélectrons, il surgit un mouvement ordonné de ces électrons appelé *courant photoélectrique*. Pour une certaine valeur de $\varphi > 0$, le courant photoélectrique I atteint sa saturation ($I = I_{sat}$) quand tous les électrons quittant le corps irradié (cathode) atteignent l'anode. Pour faire cesser le courant photoélectrique entre l'anode et la cathode, il faut créer un champ retardateur de différence de potentiel φ_1 égale à

$$\varphi_1 = -\frac{W_{c\,max}}{e} < 0,$$

où e est la valeur absolue de la charge de l'électron, $W_{c\,max}$ l'énergie cinétique maximale des photoélectrons. Pour l'effet photoélectrique engendré par la lumière visible et les rayons ultraviolets, la vitesse initiale maximale des photoélectrons est $v_{max} \ll c$ et $W_{c\,max} = mv_{max}^2/2$, où m est la masse au repos de l'électron.

4° De la loi de la conservation de l'énergie découle l'*équation d'Einstein pour l'effet photoélectrique externe:*

$$h\nu = A + W_{c\,max},$$

où $A = e\varphi_0$ est le travail d'extraction de l'électron de la substance irradiée (p. 422), φ_0 le potentiel de sortie, $h\nu$ l'énergie du photon. Les grandeurs A et φ_0 dépendent de l'état énergétique initial du photoélectron.

Conformément aux lois de la conservation de l'énergie et de l'impulsion, les électrons libres ne peuvent absorber le photon, et l'effet photoélectrique n'est possible que pour les électrons liés des atomes, molécules et ions, ainsi que pour les électrons des solides cristallins.

5° Lois de l'effet photoélectrique externe.

a) La vitesse initiale maximale des photoélectrons ne dépend pas de l'intensité de la lumière mais uniquement de la fréquence.

b) Le nombre de photoélectrons arrachés de la cathode par seconde est proportionnel à l'intensité de la lumière. Le courant photoélectrique de saturation (3°) est proportionnel à l'éclairement énergétique de la cathode. Le nombre de photoélectrons quittant par seconde la cathode est proportionnel au nombre de photons absorbés par la substance pour le même temps. Pour une composition spectrale constante du rayonnement, le temps est proportionnel à l'éclairement énergétique de la cathode.

c) Chaque substance a un *seuil de l'effet photoélectrique*, la fréquence minimale $\nu_0 = \frac{A}{h}$, pour laquelle l'effet photoélectrique externe est encore possible. La grandeur ν_0 dépend de la nature chimique et de l'état de la surface. La longueur d'onde $\lambda_0 = \frac{ch}{A}$, correspondant à la fréquence ν_0, se trouve pour la plupart des métaux dans l'ultraviolet du spectre.

L'effet photoélectrique est pratiquement sans rémanence.

6° Le nombre de photoélectrons rapporté à un photon incident est appelé *rendement quantique* I de l'effet photoélectrique. Le rendement quantique dépend des propriétés de la substance et de la longueur d'onde du rayonnement. Dans les métaux la dépendance du rendement quantique de l'effet photoélectrique externe de l'énergie des photons exprimée en eV est appelée *sensibilité spectrale* de l'effet photoélectrique. Au voisinage du seuil photoélectrique ν_0 (5°) I pour les métaux est de l'ordre de grandeur de 10^{-4} et croît proportionnellement à $(\nu - \nu_0)^2$. Lorsque l'énergie des photons atteint 10 eV, I commence à augmenter brusquement et atteint son maximum, qui est de l'ordre de (0,1÷÷0,15) quand $h\nu \sim 18$ eV. Le maximum du rendement quantique correspond au domaine de fréquences dans lequel est observé le minimum du facteur de réflexion de la lumière par le métal.

7° Le phénomène d'accroissement sensible du rendement quantique (et du courant photoélectrique de saturation) dans des bandes de fréquences déterminées du rayonnement incident est appelé *effet photoélectrique sélectif*. Dans ce cas, le rendement quantique dépend fortement de l'angle d'incidence du rayonnement et de sa polarisation. Dans le cas d'un rayonnement polarisé dans le plan d'incidence l'effet photoélectrique fait défaut. Si le rayonnement est polarisé dans un plan perpendiculaire au plan d'incidence, l'effet photoélectrique sélectif est maximal et dépend de l'angle d'incidence i, croissant lors de son augmentation de 0 à $\pi/2$. Les

particularités indiquées témoignent de l'influence des propriétés ondulatoires de la lumière sur l'effet photoélectrique externe.

8° Dans le cas de *cathodes complexes* (combinaisons de métaux alcalins et d'antimoine ou de bismuth, cathodes à couches semiconductrices) l'effet photoélectrique externe est dû à l'absorption de photons par les électrons se trouvant soit dans la bande remplie, soit aux niveaux d'impuretés (p. 418). Par suite d'un travail d'extraction minimale le rendement quantique des cathodes complexes dans le domaine du visible du spectre dépasse considérablement le rendement quantique des cathodes métalliques.

9° L'effet photoélectrique externe engendré par les photons des rayonnements X ou gamma consiste en l'absorption de l'énergie du photon par l'atome et l'expulsion de l'électron d'une couche interne quelconque de l'atome. L'atome se trouve alors être excité et l'effet photoélectrique s'accompagne d'émission d'un photon du rayonnement X secondaire ou d'un photoélectron complémentaire dans le cas où l'énergie d'excitation de l'atome se transmet à l'un de ses électrons (*effet Auger*, p. 804).

10° Outre l'effet photoélectrique externe, on observe dans les semiconducteurs cristallins et les diélectriques un effet photoélectrique interne (*photoconduction*) consistant en l'augmentation de la conductibilité électrique de ces substances au compte de l'accroissement du nombre de porteurs de courant libres (électrons de conduction et trous) dans celles-ci. Lorsque l'énergie du photon est $h\nu_0 \geqslant W_a$, où W_a est l'énergie d'activation de la conduction dans les substances exemptes d'impuretés (la différence entre les énergies du plus bas niveau de la bande de conduction et du niveau le plus élevé de la bande de valence), il peut y avoir passage de l'électron de la bande de valence remplie dans la bande de conduction (p. 416). ν_0 est appelé ***seuil photoélectrique de la conduction***. Les couples de porteurs de courant de charges opposées (les électrons dans la bande de conduction et les trous dans la bande de valence) peuvent, sous l'action d'un champ électrique extérieur, être soumis à un mouvement ordonné, créant le courant électrique. La conductibilité électrique de la substance est proportionnelle à l'intensité de la lumière monochromatique.

L'introduction d'impuretés dans le semiconducteur produit la baisse de la fréquence ν_0, car les électrons sont alors projetés des niveaux donneurs d'impuretés dans la bande de conduction ou de la bande de valence dans les niveaux accepteurs d'impuretés. La photoconduction d'un semiconducteur électronique (type n, p. 418) a un caractère purement électronique. La photoconduction d'un semiconducteur par trous (type p, p. 419) est purement par trous.

L'absorption intense de la lumière peut provoquer la baisse de la conduction du semiconducteur, étant donné que les photons intensifient les processus de recombinaison des électrons et des trous et font baisser par là même la concentration des charges libres dans les parties voisines du semiconducteur.

11° L'*effet photovoltaïque* (l'effet photoélectrique dans la couche d'arrêt) consiste en l'apparition d'une force électromotrice par suite de l'effet photoélectrique interne au voisinage de la surface de contact entre le métal et le semiconducteur ou entre deux semiconducteurs types p et n. Un tel contact est pourvu d'une conduction unilatérale liée à l'appauvrissement en porteurs de courant des couches de semiconducteurs attenant à la surface de contact. Dans les semiconducteurs l'effet photoélectrique interne perturbe la distribution équilibrée des porteurs de courant dans la région du contact et fait varier la différence de potentiel de contact par rapport à la différence de potentiel d'équilibre, c'est-à-dire fait apparaître une *force photoélectromotrice*. La valeur de la force photoélectromotrice surgissant sous l'action d'une lumière monochromatique est proportionnelle à son intensité. Le seuil de l'effet photovoltaïque est déterminé par la grandeur W_a (10°). L'effet photovoltaïque dans la jonction p-n représente la transformation immédiate de l'énergie du rayonnement électromagnétique en énergie du courant électrique. Ce phénomène est utilisé dans les *sources de courant photoélectriques* (cellules photoélectriques à silicium, germanium, etc.).

2. Effet Compton

1° On appelle *effet Compton* le changement de la fréquence ou de la longueur d'onde des photons lors de leur diffusion par les électrons et les nucléons. A la différence de l'effet photoélectrique, dans le cas de l'effet Compton, le photon ne transmet qu'une partie de son énergie aux particules de la substance. La diffusion des rayons X par les couches électroniques des atomes et la diffusion des rayons gamma par les noyaux atomiques sont des cas particuliers de l'effet Compton. Dans le cas le plus simple, l'effet Compton représente la diffusion des rayons X monochromatiques par des substances légères (graphite, paraffine, etc.). Dans l'étude théorique de cet effet l'électron est supposé libre.

2° La diffusion du photon par un électron libre peut être regardée comme un choc élastique. L'étude est effectuée généralement dans un référentiel du laboratoire (p. 755) dans lequel avant

choc l'électron est supposé au repos et après choc, se déplaçant avec la vitesse v, non petite devant la vitesse c du photon incident. De la loi de la conservation de l'énergie:

$$\frac{hc}{\lambda} + m_0c^2 = \frac{hc}{\lambda'} + mc^2,$$

où λ et λ' sont les longueurs d'onde correspondant aux photons incident et diffusé, m_0 la masse au repos, $m = m_0/\sqrt{1 - (v^2/c^2)}$ la masse relativiste de l'électron (p. 551), et de la loi de la conservation de l'impulsion lors d'un choc:

$$(mv)^2 = \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{h}{\lambda'}\right)^2 - \frac{2h^2}{\lambda\lambda'} \cos \theta,$$

où θ est l'angle formé par les directions des photons incident et diffusé (fig. V.10.1), résulte la dépendance suivante pour la variation de la longueur d'onde $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ lors de la diffusion Compton:

$$\Delta\lambda = \frac{2h}{m_0c} \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

La grandeur

$$\lambda_C = \frac{h}{m_0c} = 2{,}426 \cdot 10^{-10} \text{ cm}$$

est appelée *longueur d'onde de Compton* pour l'électron.

La formule de Compton pour la fréquence du photon après diffusion est:

$$\nu' = \frac{\nu}{1 + \varepsilon(1 - \cos\theta)},$$

où $\varepsilon = \frac{h\nu}{m_0c^2}$ est l'énergie du photon incident en unités égales à l'énergie au repos de l'électron; $m_0c^2 = 511$ keV.

3° La variation de la longueur d'onde dans l'effet Compton dépend de l'angle de diffusion θ du photon et admet sa valeur maximale lors de la diffusion inverse ($\theta = 180°$). Lorsque $h\nu \gg m_0c^2$ ($\lambda \ll \lambda_C$), la longueur d'onde λ' d'un rayonnement diffusé en arrière est égale à $2\lambda_C$ indépendamment de la longueur d'onde λ du rayonnement incident. La distribution angulaire d'un rayonnement non polarisé diffusé par un électron libre au repos

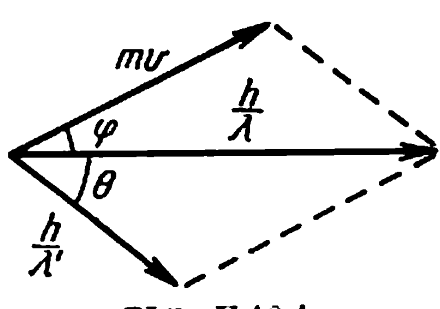


FIG. V.10.1.

est donnée par la *formule de Klein-Nishina-Tamm* (cf. également p. 869):

$$d\sigma(\theta) = \frac{r_e^2}{2} \frac{1 + \cos^2\theta}{[1 + \varepsilon(1 - \cos\theta)]^2} \left\{ 1 + \frac{\varepsilon^2(1 - \cos\theta)^2}{(1 + \cos^2\theta)[1 + \varepsilon(1 - \cos\theta)]} \right\} d\Omega.$$

Ici $d\sigma(\theta)$ est la section efficace transversale différentielle pour la diffusion d'un photon sous l'angle θ à l'intérieur de l'angle solide élémentaire $d\Omega$, $r_e = \frac{e^2}{m_0 c^2}$ le rayon classique de l'électron (p.936). L'intensité I du rayonnement diffusé à la distance R du centre diffusant est liée à l'intensité I_0 du faisceau incident de la manière suivante:

$$I = \frac{I_0}{R^2} \frac{\nu'}{\nu} \frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega},$$

où le rapport ν'/ν est donné par la formule de Compton (2°). Lorsque $h\nu \gg m_0c^2$, $d\sigma(\theta)$ diminue rapidement avec l'accroissement de θ et le rayonnement diffusé est pratiquement dirigé en avant, suivant le faisceau incident de la lumière. Lorsque $h\nu \ll m_0c^2$, la formule de Klein-Nichina-Tamm se transforme en la formule classique de Thomson pour la diffusion par un électron:

$$d\sigma(\theta) = \frac{r_e^2}{2} (1 + \cos^2\theta) d\Omega$$

(cf. également p. 869). La formule de Klein-Nichina-Tamm est utilisée pour les calculs de la diffusion de la lumière par n'importe quelles particules chargées de spin $\frac{1}{2}\hbar$ et de moment magnétique $\frac{e\hbar}{2Mc}$ (M est la masse de la particule).

4° L'électron diffusé ayant acquis une certaine vitesse lors de son choc avec le photon dans l'effet Compton est appelé *électron de recul*.

La distribution des électrons de recul suivant les angles est:

$$d\sigma_e(\varphi) = 4r_e^2 \frac{(1 + \varepsilon)^2 \cos\varphi}{(1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2 \sin^2\varphi)^2} \left\{ 1 + \right.$$

$$\left. + \frac{2\varepsilon^2 \cos^4\varphi}{(1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2 \sin^2\varphi)[1 + \varepsilon(\varepsilon + 2)\sin^2\varphi]} - \frac{2(1 + \varepsilon)^2 \sin^2\varphi \cos^2\varphi}{[1 + \varepsilon(\varepsilon + 2)\sin^2\varphi]^2} \right\} d\Omega_\varphi,$$

où $d\sigma_e(\varphi)$ est la section efficace transversale différentielle pour la diffusion des électrons sous l'angle φ à l'intérieur de l'angle solide

élémentaire $d\Omega_\varphi$, r_e le rayon classique de l'électron. Cf. le sens de ε plus haut, 2°.

L'énergie cinétique de l'électron de recul est:

$$T = h\nu \frac{2\varepsilon}{1 + 2\varepsilon + (1+\varepsilon)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi},$$

dans ce cas $-\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$ pour tous les angles θ. Des lois de la conservation de l'énergie et de l'impulsion lors de l'effet Compton vient:

$$(1 + \varepsilon) \operatorname{tg} \varphi = -\operatorname{cotg} \frac{\theta}{2}.$$

La valeur maximale $T_{\max}$ est atteinte lorsque $\theta = 180°$ ($\varphi = 0°$):

$$T_{\max} = h\nu \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}.$$

3. Pression de radiation

1° On appelle *pression de radiation* l'action mécanique exercée par les ondes électromagnétiques lors de leur incidence sur une surface quelconque.

2° La théorie électromagnétique de la lumière explique la pression de radiation par l'apparition de forces mécaniques agissant sur les électrons, situés à la surface du corps éclairé, de la part des composantes électrique et magnétique du champ de l'onde lumineuse. Le champ électrique de l'onde lumineuse produit les oscillations des charges dans la couche superficielle du corps éclairé. Le champ magnétique agit sur ces charges avec la force de Lorentz (p. 461) dont la direction coïncide avec celle du vecteur de Poynting de l'onde lumineuse (p. 528). La valeur de la pression de radiation exercée sur une certaine surface par un faisceau lumineux parallèle incidant normalement sur celle-ci est déterminée par la valeur absolue du vecteur de Poynting.

3° Si P est l'énergie du rayonnement électromagnétique qui tombe normalement sur une certaine surface d'aire unité par seconde, c la vitesse de propagation de l'onde lumineuse dans le vide, R le facteur de réflexion de la lumière par la surface (p. 613), la pression p de radiation sur cette surface est égale à

$$p = \frac{P}{c}(1 + R) = w(1 + R).$$

Ici w est la densité volumique d'énergie du rayonnement électromagnétique.

La pression de radiation est:

$$p = \begin{cases} P/c \text{ pour un corps parfaitement absorbant (corps noir) } (R = 0), \\ 2P/c \text{ pour un corps parfaitement réfléchissant } (R = 1). \end{cases}$$

La pression d'un rayonnement isotrope en équilibre (p. 720) emplissant un certain volume est:

$$p = \frac{1}{3} w.$$

4° La théorie quantique de la lumière explique la pression de radiation comme résultat du transport de son impulsion par les photons aux atomes ou aux molécules à la surface du corps. Le faisceau lumineux de fréquence ν transmettant l'énergie P à 1 cm² de surface du corps par seconde est constitué de $N = P/h\nu$ photons, l'impulsion de chaque photon étant égale à $h\nu/c$. Lors de son absorption, le photon cède l'impulsion $h\nu/c$, lors de sa réflexion (diffusion élastique) l'impulsion $2h\nu/c$, étant donné que son impulsion varie alors de $+h\nu/c$ à $-h\nu/c$. L'impulsion totale transmise par les photons pour le facteur de réflexion R est:

$$(1 + R)N \frac{h\nu}{c} = \frac{P}{c} (1 + R).$$

Ainsi, les résultats de la théorie électromagnétique et de la théorie quantique de la lumière pour le calcul de la pression de radiation coïncident.

5° La pression de radiation dont l'existence est démontrée par les expériences de Lébédev est l'une des causes conditionnant l'apparition de queues chez les comètes lors de leur rapprochement considérable du Soleil. Du fait des petites dimensions des particules de la substance dans les comètes, ces particules subissent, sous l'influence de la pression de radiation, une certaine répulsion proportionnelle à l'aire de la surface des particules, qui dépasse leur attraction dans le champ gravitationnel du Soleil proportionnelle au volume des particules.

4. Actions chimiques de la lumière

1° L'action que la lumière exerce sur les substances qui l'absorbent peut provoquer des transformations chimiques de ces substances appelées ***réactions photochimiques***. On distingue une réaction photochimique primaire et des réactions secondaires. A

ces dernières se rapportent la décomposition des molécules complexes, des radicaux, des ions polyatomiques, la formation de molécules complexes à partir de molécules plus simples, ainsi que la polymérisation.

2° La décomposition des molécules complexes en molécules plus simples ou en atomes les constituant sous l'effet de la lumière est appelée ***dissociation photochimique*** (***photodissociation*** ou ***photolyse***). La photodissociation peut conduire à la formation des atomes, des radicaux, des ions-radicaux dans une substance donnée. L'une des particules se trouve alors à l'état excité et accepte la différence entre l'énergie de la lumière absorbée et l'énergie de dissociation. La photodissociation devient possible lorsque la fréquence ν de la lumière vérifie la condition:

$$\nu \geqslant \nu_0 = \frac{D}{h},$$

où ν_0 est la fréquence limite de photodissociation, D l'énergie de photodissociation, qui est généralement plus faible que l'énergie de dissociation de l'état fondamental du système. Comme exemples de réactions photochimiques servent la décomposition de l'anhydride carbonique sous l'action de la lumière solaire:

$$2CO_2 + 2h\nu \rightarrow 2CO + O_2,$$

la dissociation des molécules de chlore exposées à la lumière:

$$Cl_2 + h\nu \rightarrow Cl + Cl,$$

la décomposition du bromure d'argent dans les matériaux photographiques lors de leur éclairement:

$$AgBr + h\nu \rightarrow Ag + Br.$$

La dissociation photochimique peut s'opérer suivant le mécanisme de prédissociation (p. 828).

3° Les réactions photochimiques obéissent à la *loi de l'équivalence photochimique d'Einstein:* un quantum de lumière absorbée est nécessaire pour la réalisation de chaque transformation photochimique. La quantité de molécules ayant réagi est liée à l'énergie des quanta absorbés. Le nombre N de molécules de substance, qui ont subi une transformation photochimique lors de l'absorption d'une unité d'énergie de lumière, est égal à $\sim \frac{1}{h\nu} = \frac{\lambda}{hc}$. La masse de la substance entrant en réaction est $M = Nm$, où m est la masse de la molécule.

Loi de Bunsen-Roscoe (loi de la réciprocité): la quantité de substance m entrant en réaction photochimique est proportionnelle à la puissance de rayonnement Φ et à l'exposition t:

$$m = k\Phi t,$$

où k est le facteur de proportionnalité qui dépend du type de réaction (on suppose que la composition spectrale de la lumière est constante et assure la réaction).

En vertu de la loi de Bunsen-Roscoe, m = const lorsque $(\Phi_1 t_1)_{c=\text{const}} = (\Phi_2 t_2)_{c=\text{const}}$, où c est la concentration du produit formé dans la réaction photochimique. La loi tombe en défaut si la réaction photochimique primaire se complique de réactions secondaires non photochimiques. Dans les couches photographiques d'halogénure d'argent la loi de Bunsen-Roscoe est satisfaite pour des durées d'exposition de $(10^{-2} \div 10^{-1})$ s et 10^{-5} s.

4° Si la fréquence ν de la lumière irradiant la substance est en dehors de la bande d'absorption de la substance, il n'y a pas d'absorption de la lumière et donc de réaction photochimique. Toutefois, celle-ci peut être provoquée par addition à une substance donnée d'une autre substance, appelée *sensibilisateur*, ayant la bande d'absorption dans le domaine de la fréquence ν. Le photon est absorbé par la molécule de sensibilisateur, et l'énergie obtenue est transmise à la molécule de substance considérée lors du choc intermoléculaire. De telles réactions photochimiques sont dites *sensibilisées*. Leur réalisation exige des chocs fréquents entre les molécules de sensibilisateur et de substance à étudier, autrement dit, une pression suffisamment grande.

Comme exemple d'une telle réaction peut servir la formation du peroxyde d'hydrogène H_2O_2 à partir de H_2 et O_2 lors de la sensibilisation par les atomes de mercure et de l'éclairement de leur mélange par une lumière de longueur d'onde de 2 537 Å correspondant à la raie d'absorption des atomes de mercure. La réaction se déroule suivant le schéma possible:

$$Hg + h\nu \rightarrow Hg^*,$$

$$Hg^* + H_2 \rightarrow HgH + H \; (Hg^* + H_2 \rightarrow Hg + 2H),$$

$$2H + O_2 \rightarrow H_2O_2,$$

où Hg^* désigne l'atome de mercure excité. L'excitation de l'atome de mercure est levée lors de transmission de l'énergie d'excitation à la molécule d'hydrogène.

CHAPITRE II

Luminescence

1. Classification des processus de luminescence et leur évolution

1° On appelle *luminescence* le rayonnement lumineux des corps excédentaire sur le rayonnement thermique (p. 715) à la même température et ayant une durée notablement supérieure aux périodes de radiation de la gamme optique du spectre. Ce rayonnement est dû au bombardement de la substance par électrons et autres particules chargées, au passage d'un courant électrique (action non thermique) à travers la substance, à l'éclairement de la substance en lumière visible ou ultraviolette, par les rayons X et gamma, ainsi qu'à certaines réactions chimiques se produisant dans la substance.

2° A la différence du rayonnement thermique en équilibre (p. 715) la luminescence n'est pas équilibrée. Elle est provoquée par une quantité relativement petite d'atomes, de molécules ou d'ions. Sous l'action de la source luminescente ils passent à un état excité, et leur retour à l'état normal ou à un état moins excité s'accompagne d'un rayonnement luminescent. La durée de la luminescence est déterminée par la durée de l'état excité, qui dépend non seulement des propriétés de la substance luminescente, mais aussi du milieu environnant. Si l'état excité est métastable, la durée du maintien de la particule en cet état peut atteindre 10^{-4} s, ce qui prolonge la durée de la luminescence.

3° La luminescence qui cesse presque immédiatement après qu'a disparu l'excitation lumineuse est appelée *fluorescence*. La luminescence qui persiste un temps appréciable après qu'a cessé l'excitation lumineuse est appelée *phosphorescence*.

La fluorescence est due aux passages des atomes, des molécules et des ions d'un état excité à l'état normal. La phosphorescence est conditionnée par l'existence d'états excités métastables des atomes et des molécules tels que le passage de ceux-ci à l'état normal soit rendu difficile par telles ou telles causes (p. 770). Le passage de l'état métastable à l'état normal n'est possible que dans le cas d'une excitation complémentaire (excitation thermique, par exemple). La délimitation entre la fluorescence et la phosphorescence est assez conventionnelle. La luminescence sous l'effet de la lumière est dite *photoluminescence*, sous l'effet du bombardement par électrons *luminescence cathodique*, sous l'action du champ électrique *électroluminescence*, sous l'action de transformations chimiques *chimiluminescence*. Les substances luminescentes sont dites *luminophores*.

4° Suivant le caractère des processus élémentaires produisant le rayonnement luminescent on distingue les processus de luminescence spontanés, forcés et de recombinaison, ainsi que la fluorescence de résonance. On observe la *fluorescence de résonance* dans la vapeur d'atomes. Elle consiste en l'émission lumineuse spontanée s'opérant à partir du même niveau énergétique sur lequel s'est trouvé l'atome émetteur ayant absorbé d'énergie de la source luminescente. Lors de l'excitation de la fluorescence de résonance par la lumière un *rayonnement de résonance* a lieu, qui se transforme en *diffusion de résonance* avec l'augmentation de la densité de la vapeur. La *luminescence spontanée* consiste en ce que sous l'action de la source luminescente s'opère d'abord l'excitation des atomes (molécules ou ions) passant à des niveaux énergétiques excités intermédiaires. Ensuite à partir de ces niveaux ont lieu des transitions, le plus souvent non radiatives, vers des niveaux à partir desquels est émise la luminescence. Un tel genre de luminescence est observé dans les molécules complexes de la vapeur et des solutions, dans les centres d'impuretés des corps solides. Elle est observée également lors de transitions à partir d'états excitoniques.

La *luminescence forcée (métastable)* se distingue en ce que sous l'action de la source luminescente a lieu un passage à un niveau métastable, suivi de transition vers un niveau radiatif de luminescence. La phosphorescence des substances organiques en est un exemple. La *luminescence de recombinaison* est le rayonnement qui se produit au cours de la recombinaison des particules qui étaient séparées lors de l'absorption d'énergie de la source luminescente (dans les gaz, les radicaux ou les ions; dans les cristaux, les électrons ou les trous).

La luminescence de recombinaison peut avoir lieu dans les centres d'impuretés *(centres luminogènes)* lorsque le trou est cap-

turé sur le niveau fondamental du centre et l'électron, sur son niveau excité.

5° Lors de l'excitation de la luminescence par les électrons, l'énergie des électrons bombardiers est transmise aux électrons des atomes (ou des molécules, des ions) et les excite. Le transport d'énergie n'est possible que si l'énergie cinétique de l'électron bombardier est:

$$T = \frac{mv^2}{2} \geqslant E_e - E_n,$$

où E_n et E_e sont l'énergie totale de l'atome (de la molécule, de l'ion) à l'état normal et à l'état excité le plus proche. L'atome (la molécule, l'ion) revient de l'état excité à l'état normal en émettant un quantum de lumière (photon) de fréquence ν:

$$h\nu = E_e - E_n.$$

Pour des énergies d'excitation suffisamment grandes le retour de l'atome (de la molécule, de l'ion) de l'état excité à l'état normal peut s'opérer en plusieurs étapes, en passant par des états de moins en moins excités. A ce phénomène correspond l'émission de quelques photons de différentes fréquences et leur énergie totale est alors égale à l'énergie d'excitation initiale.

6° La photoluminescence provient d'une excitation lumineuse dans le domaine du visible ou de l'ultraviolet du spectre. Pour les substances luminescentes complexes (molécules complexes, milieux condensés) la composition spectrale de la photoluminescence ne dépend pas de la longueur d'onde de la lumière excitatrice et obéit à la règle de Stokes (p. 739).

La photoluminescence donne des spectres de raies, de bandes et continus. Le caractère de la photoluminescence dépend essentiellement de l'état d'agrégation de la substance. Le rendement quantique (p. 740) de certains cristaux phosphorescents s'élève avec l'augmentation de la fréquence de la lumière excitatrice si $h\nu > 2\Delta W$, où ΔW est la largeur de la bande interdite (multiplication photonique dans la photoluminescence).

7° L'électroluminescence dans les gaz provient d'une décharge électrique. Ici l'énergie d'excitation est transmise aux molécules gazeuses par choc électronique ou ionique (p. 829). L'état excité dans l'électroluminescence est toujours provoqué par le passage d'un courant quelconque et donc dû à la présence d'un champ électrique. Dans les corps solides on observe l'électroluminescence, en particulier dans la jonction *p-n* des semiconducteurs (p. 431).

8° La chimiluminescence accompagne certaines réactions chimiques exothermiques. Les transformations chimiques dans

la substance s'accompagnent de reconstruction des couches électroniques externes des atomes. L'émission lumineuse conduit à la formation d'un composé chimique avec une configuration électronique (p. 788) plus stable dans l'ambiance donnée et les conditions données. La chimiluminescence accompagne souvent les processus d'oxydation avec formation de produits de combustion plus stables.

La chimiluminescence est provoquée par les molécules (les atomes, les ions) des produits de la réaction se trouvant en états excités électroniques, vibratoires et rotatoires. La luminescence des flammes à températures élevées et à températures basses, la luminescence accompagnant la recombinaison des radicaux peroxydes lors de l'oxydation en chaîne des hydrocarbures liquides sont des exemples de chimiluminescence.

2. Lois de la luminescence

1° *Règle de Stokes:* la longueur d'onde de la photoluminescence est supérieure à la longueur d'onde de la lumière excitatrice. Sous une formulation plus générale cette règle porte: le maximum du spectre de luminescence est toujours déplacé du côté des longues ondes par rapport au maximum du spectre d'absorption. Du point de vue quantique, la règle de Stokes signifie que l'énergie $h\nu$ du quantum de lumière excitatrice est dépensée en partie dans des processus non optiques:

$$h\nu = h\nu_{\text{lum}} + W, \text{ c'est-à-dire } \nu_{\text{lum}} < \nu \text{ ou } \lambda_{\text{lum}} > \lambda,$$

où W est l'énergie dépensée dans différents processus autres que la photoluminescence.

2° Dans certains cas, le spectre de photoluminescence contient des longueurs d'onde inférieures à la longueur d'onde de la lumière excitatrice *(raies anti-Stokes* ou *émission anti-Stokes).* Ce phénomène s'explique par le fait qu'à l'énergie d'excitation du photon peut parfois s'ajouter l'énergie d'agitation thermique des atomes, des molécules ou des ions du luminophore:

$$h\nu_{\text{lum}} = h\nu_{\text{abs}} + akT,$$

où a est un coefficient dépendant de la nature du luminophore, k la constante de Boltzmann et T la température absolue du luminophore. Les raies anti-Stokes s'aperçoivent de plus en plus distinctement à mesure que s'élève la température du luminophore.

3° On appelle *rendement énergétique de luminescence* le rapport de l'énergie de luminescence à l'énergie absorbée dans des condi-

tions stationnaires par le luminophore de la source excitant la luminescence.

On appelle *rendement quantique de photoluminescence* le rapport du nombre de photons émis du rayonnement luminescent au nombre de photons absorbés de la lumière excitatrice (à une énergie fixe de cette dernière). Le rendement énergétique de photoluminescence croît proportionnellement à la longueur d'onde λ du rayonnement absorbé et, ensuite, atteignant dans un certain intervalle de $\lambda \sim \lambda_{max}$ sa valeur maximale, décroît rapidement jusqu'à zéro lors de l'augmentation ultérieure de λ *(loi de Vavilov)*. Avec l'accroissement de la longueur d'onde de la lumière excitatrice croît le nombre de photons d'énergie $h\nu$ contenus dans une énergie donnée du rayonnement primaire. Etant donné que chaque photon peut provoquer l'apparition d'un quantum $h\nu_{lum}$, l'augmentation de la longueur d'onde fait augmenter le rendement énergétique de photoluminescence. La baisse brusque du rendement énergétique, lorsque $\lambda > \lambda_{max}$, s'explique par le fait que l'énergie des photons absorbés devient insuffisante à l'excitation des particules du luminophore.

Selon la loi de Vavilov, le rendement quantique de photoluminescence ne dépend pas de la longueur d'onde de la lumière excitatrice dans le domaine de Stokes ($\nu_{exc} > \nu_{lum}$) (1°) et baisse de façon brusque dans le domaine de raies anti-Stokes (2°) ($\nu_{exc} < \nu_{lum}$).

Les valeurs des rendements quantique et énergétique dépendent sensiblement de la nature du luminophore et des conditions extérieures. Ceci est lié à la possibilité de transitions non radiatives des particules de l'état excité à l'état normal *(extinction de la luminescence)*. Un rôle fondamental dans les processus d'extinction jouent les chocs de seconde espèce par suite desquels l'énergie d'excitation se transforme en énergie interne d'agitation thermique non radiative. Une baisse brusque de l'intensité de la fluorescence a également lieu pour une concentration excessivement grande des molécules du luminophore (*extinction par concentration*). Dans ce cas, du fait de la liaison forte entre ces particules la formation de centres luminogènes n'est pas possible.

4° L'intensité de la luminescence spontanée et métastable (p. 737, 4°) varie dans le temps d'après la loi exponentielle:

$$I_t = I_0 e^{-t/\tau},$$

où I_t est l'intensité de la luminescence à l'instant t, I_0 l'intensité de la luminescence à l'instant auquel cesse l'excitation luminescente, τ la durée moyenne de l'état excité des atomes ou des

molécules du luminophore. La grandeur τ est habituellement de l'ordre de 10^{-9}—10^{-8} s. En l'absence de processus extincteurs, τ dépend faiblement des conditions et est déterminé principalement par les processus intramoléculaires.

5° L'intensité de la luminescence de recombinaison (p. 737, 4°) varie avec le temps d'après la loi hyperbolique:

$$I_t = \frac{I_0}{(1 + at)^n},$$

où a et n sont des constantes; la grandeur a est comprise dans les limites de fractions de s^{-1} à plusieurs milliers de s^{-1}; $a \sim \sqrt{I_0}$, où I_0 est l'intensité de la luminescence de recombinaison à l'instant de son excitation; n est compris dans les limites de 1 à 2.

SIXIÈME PARTIE

Physique atomique et nucléaire

CHAPITRE PREMIER

Eléments de mécanique quantique non relativiste

1. Propriétés ondulatoires des particules. Fonction d'onde

1° On appelle *mécanique quantique (ondulatoire)* la section de physique théorique qui étudie les lois du mouvement des particules dans le domaine du micromonde (à des échelles de $10^{-6}-10^{-13}$ cm). Lors du mouvement des particules avec des vitesses $v \ll c$, où c est la vitesse de la lumière dans le vide, c'est la mécanique quantique non relativiste qui est utilisée; lorsque $v \sim c$, elle est remplacée par la mécanique quantique relativiste. La mécanique quantique étudie les cristaux, molécules, atomes, noyaux atomiques et particules élémentaires.

2° La mécanique quantique est fondée sur les concepts de quanta d'énergie avancés par Planck, les concepts de photons avancés par Einstein, les données de l'existence de valeurs discrètes de certaines grandeurs physiques caractérisant l'état des particules du micromonde (l'énergie par exemple, p. 745), l'hypothèse de Louis de Broglie sur les propriétés ondulatoires de la substance.

La *formule de de Broglie* donne:

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{p},$$

où m est la masse de la particule en mouvement, v sa vitesse, h la constante de Planck (p. 721), λ la longueur d'onde associée à la particule matérielle en mouvement, p la quantité de mouvement. Ces ondes sont dites *ondes de de Broglie*. Une autre forme de la relation de de Broglie est:

$$\mathbf{p} = \frac{h}{2\pi}\mathbf{k},$$

où $k = 2\pi n/\lambda$ est le vecteur d'onde, n le vecteur unité dans le sens de propagation de l'onde.

La longueur d'onde broglienne d'un électron accéléré par la différence de potentiel U est:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2meU}} = \sqrt{\frac{150,5}{U}}\ \text{Å} \quad (U \text{ étant exprimée en volts}).$$

Les propriétés ondulatoires des corps macroscopiques ne se manifestent pas, les longueurs d'onde de de Broglie correspondantes étant infiniment petites.

3° La formule de de Broglie permettant d'étendre les notions de la double nature, corpusculaire et ondulatoire, du rayonnement électromagnétique sur les particules matérielles *(dualité corpuscules-ondes* des particules du micromonde) est confirmée par les expériences sur la réflexion et le passage des électrons et autres particules dans les cristaux. On observe dans ces expériences une image de diffraction, preuve du déroulement d'un processus ondulatoire. Cet effet est observé quand la longueur d'onde électronique est de l'ordre de la distance interatomique dans le cristal (p. 647). On appelle *électronographie* la méthode d'étude de la structure de la substance, basée sur la diffraction des électrons.

4° Selon l'interprétation statistique des ondes de de Broglie, les *«ondes de probabilité»* ont un sens physique particulier. On associe une onde plane de de Broglie à chaque électron libre d'un faisceau incident sur un cristal. L'interaction des électrons avec les nœuds du réseau cristallin provoque la diffusion des électrons que l'on peut considérer comme la diffraction d'une onde plane par une structure tridimensionnelle. L'image de diffraction est dans ce cas la manifestation d'une régularité statistique, d'après laquelle les électrons tombent avec une plus grande probabilité en des endroits déterminés de la lame (anneaux sombres) et avec une probabilité moindre en d'autres endroits (anneaux clairs). L'onde plane incidente correspond à une équiprobabilité de trouver l'électron en n'importe quelle région de l'espace. Si le faisceau d'électrons est émis par une source ponctuelle, c'est une onde sphérique divergente qui est associée au faisceau. L'*intensité de l'onde de probabilité* est la mesure de la probabilité de détecter la particule en une région donnée de l'espace.

5° La probabilité de présence d'une particule dans une région donnée de l'espace et en un instant donné est caractérisée par la fonction $\psi(x, y, z, t)$ appelée *fonction d'onde* (ou *fonction* ψ). Cette fonction peut être réelle ou complexe. Seul a un sens physique le carré de son module $I = |\psi|^2 = \psi\psi^*$, où ψ^* est une fonction com-

plexe conjuguée de ψ. La grandeur I a le sens de la *densité de probabilité*. La probabilité $w\ (x,\ y,\ z,\ t)$ de trouver la particule dans le volume $dV = dx\ dy\ dz$ est:

$$w(x,\ y,\ z,\ t) = |\psi(x,\ y,\ z,\ t)|^2\ dV.$$

6° En mécanique quantique on introduit la notion de *densité moyenne d'une grandeur physique*. A titre d'exemple la densité moyenne de charge:

$$\rho = e|\psi|^2,$$

la densité moyenne de courant de particules de charge e et de masse m:

$$\mathbf{j} = \frac{ihe}{4\pi m}\quad (\psi \text{ grad } \psi^* - \psi^* \text{ grad } \psi).$$

ρ et $\mathbf{j}$ obéissent à la loi de la conservation de la charge électrique (équation de continuité, p. 527).

7° On associe une particule libre à une onde plane:

$$\psi(\mathbf{r},\ t) = ae^{i[2\pi\nu t\ -\ \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}]},$$

où ν est la fréquence ($\nu = c/\lambda$), $\mathbf{k}$ le vecteur d'onde, $\mathbf{r}$ le rayon vecteur caractérisant la position de la particule dans l'espace, a l'amplitude. La fréquence ν et le rayon vecteur $\mathbf{k}$ sont reliés à l'énergie et à l'impulsion de la particule par la formule de de Broglie:

$$\mathbf{p} = \frac{h\mathbf{k}}{2\pi}$$

et par une expression analogue applicable aux quanta de lumière:

$$E = h\nu.$$

A la différence des ondes électromagnétiques les ondes de de Broglie subissent une dispersion (p. 594), même pour une particule dans le vide. La vitesse de phase des ondes de de Broglie

$$v = \frac{2\pi\nu}{k} = \frac{2\pi E}{hk} = \sqrt{c^2 + \frac{4\pi^2 m_0^2 c^4}{k^2 h^2}} > c$$

est supérieure à la vitesse de la lumière dans le vide et est une fonction de k (dispersion).

La vitesse de groupe des ondes de de Broglie est définie par

$$V = \frac{d\omega}{dk} = \frac{hk}{2\pi m} = \tilde{v},$$

où $\tilde{v}$ est la vitesse de la particule. La dispersion conduit à l'étalement des groupes d'ondes de de Broglie (trains d'ondes, p. 594) avec le

temps. Ceci ne permet pas de représenter les particules sous forme de groupes d'ondes de de Broglie.

2. Equation de Schrödinger

1° L'équation fondamentale de la mécanique quantique, déterminant la forme de la fonction ψ dans différents cas de mouvement et d'interaction des microparticules, est dite ***équation de Schrödinger.*** Pour une particule, en l'absence de champ magnétique, elle est de la forme:

$$\frac{ih}{2\pi}\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{8\pi^2 m}\Delta\psi + U\,(x,\ y,\ z,\ t)\psi,$$

où Δ est l'opérateur de Laplace, $U(x, y, z, t)$ l'énergie potentielle (p. 69) liée à la fonction de forces (p. 66) si les forces agissant sur la particule sont potentielles, m la masse de la particule, $i = \sqrt{-1}$. L'équation de Schrödinger s'écrit également sous la forme:

$$\frac{ih}{2\pi}\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi,$$

où H est l'hamiltonien ou opérateur de Hamilton (p. 101).

2° Dans le cas d'un mouvement libre de la particule ($U = 0$) l'équation de Schrödinger a comme solution

$$\psi(x,\ y,\ z,\ t) = ae^{-\frac{2\pi i}{h}(Et - p_x x - p_y y - p_z z)}$$

décrivant une onde plane.

3° Le cas de $\frac{\partial}{\partial t}|\psi|^2 = 0$ correspond aux *états de mouvement stationnaires* (invariables dans le temps) des particules. L'équation de Schrödinger est dans ce cas:

$$\Delta\psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2}[E - U\,(x,\ y,\ z)]\psi = 0,$$

ou bien

$$H\psi = E\psi,$$

où H est l'hamiltonien coïncidant avec l'opérateur de l'énergie totale. Les solutions de cette équation, dites *fonctions propres*, existent seulement pour des valeurs déterminées de E, appelées *valeurs propres*. L'ensemble des valeurs propres de E est appelé *spectre énergétique* d'une particule (ou d'un système de particules). Si U est une

fonction monotone et $U \to 0$ à l'infini, dans le domaine de $E < 0$ les valeurs propres forment un spectre discret.

Le problème fondamental de la mécanique quantique est la recherche des valeurs propres et des fonctions propres d'une particule (ou d'un système de particules).

4° Les fonctions propres sont normées par la condition que la probabilité de détecter la particule dans tout l'espace est égale à l'unité en tant que probabilité d'un événement certain:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi|^2 \, dV = 1.$$

8. Relations d'incertitude de Heisenberg

1° On ne peut que d'une façon limitée appliquer aux microparticules douées de propriétés ondulatoires les notions de la mécanique classique, par exemple les notions de coordonnées et d'impulsion d'une particule. La notion de «coordonnée d'une onde» étant dénuée de sens physique, en mécanique quantique la notion de trajectoire d'une particule est également dénuée de sens physique. En mécanique classique, à chaque valeur déterminée d'une coordonnée de la particule correspond une valeur précise de son impulsion. En mécanique quantique, on observe des indéterminations de principe lors de la détermination simultanée de la position spatiale et de l'impulsion d'une particule, liées à la nature non classique des microparticules.

2° L'indétermination Δx sur la coordonnée x d'une particule est liée à l'indétermination Δp_x sur la projection p_x de son impulsion par la *relation de Heisenberg:*

$$\Delta x \Delta p_x \geqslant \frac{h}{4\pi}.$$

De façon analogue $\Delta y \ \Delta p_y \geqslant \frac{h}{4\pi}$ et $\Delta z \Delta p_z \geqslant \frac{h}{4\pi}$.

D'autant plus précisément sont déterminées les coordonnées d'une particule (autrement dit, d'autant plus petites sont Δx, Δy et Δz), d'autant moins précisément sont déterminées les valeurs des projections de son impulsion (autrement dit, d'autant plus grandes sont Δp_x, Δp_y et Δp_z). Aux coordonnées d'une particule déterminées de façon précise correspond une imprécision complète des valeurs des projections de son impulsion.

Dans aucun cas il n'est possible de mesurer simultanément de façon précise les coordonnées et les impulsions des particules.

3° Pour évaluer l'écart des grandeurs x et p_x de leurs valeurs moyennes à l'aide des écarts quadratiques moyens (p. 248) $\overline{\Delta x^2}$ et $\overline{\Delta p_x^2}$, la relation de Heisenberg s'écrit sous la forme:

$$\overline{\Delta p_x^2}\,\overline{\Delta x^2} \geqslant \frac{h^2}{16\pi^2}.$$

4° Le quantum d'action h étant une quantité finie, chaque tentative de mesurer une certaine grandeur physique caractérisant un microobjet conduit, en vertu de la relation de Heisenberg, à la variation d'une autre grandeur déterminée également par cette relation et caractérisant, elle aussi, cet objet. La relation de Heisenberg est vraie pour n'importe quel couple de grandeurs conjuguées canoniques (p. 110). Pour l'énergie et le temps cette relation s'exprime de la sorte:

$$\Delta E\,\Delta t \geqslant \frac{h}{2\pi}.$$

L'énergie d'une particule en un état quelconque peut être déterminée d'autant plus précisément que plus longtemps se trouve en cet état la particule.

5° Les relations d'incertitude de Heisenberg sont fondées sur le rapport complexe des propriétés corpusculaires et ondulatoires des microparticules, pour la description duquel se trouvent être inadéquates les notions de coordonnées et d'impulsions des particules empruntées à la mécanique classique.

On aurait pu décrire les propriétés corpusculaires des particules à l'aide de notions classiques si à ces propriétés n'étaient pas superposées des propriétés ondulatoires inséparables. La dualité corpuscules-ondes des particules du micromonde est la manifestation d'une corrélation plus générale de deux formes fondamentales de la matière, étudiées par la physique: substance et champ (p. 910).

6° En mécanique quantique, la notion de mesure et d'instrument de mesure subit une modification essentielle (par rapport à la mécanique classique). Le processus de mesure dans le micromonde est inévitablement lié à l'influence considérable de l'instrument sur le cours du phénomène à mesurer. Ainsi, pour déterminer la position de l'électron, on doit «l'éclairer» d'un quantum de courte longueur d'onde. Mais la diminution de la longueur d'onde du quantum fait augmenter sa fréquence et son énergie, alors la collision du quantum avec l'électron fait varier considérablement l'impulsion de ce dernier, mais d'une valeur indéterminée (de l'ordre de $h/2\pi\Delta x$).

7° Les relations de Heisenberg ne signifient pas du tout que nos connaissances du micromonde sont limitées. Elles traduisent seulement l'application limitée des conceptions de la physique classique au micromonde.

4. Les problèmes les plus simples de mécanique quantique

La fonction d'onde $\psi(\mathbf{r}, t)$ décrivant un état arbitraire d'une microparticule, dont l'hamiltonien ne dépend pas explicitement du temps, peut être représentée sous forme de la superposition d'un ensemble complet de fonctions d'onde d'états stationnaires:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sum_n c_n \psi_n (\mathbf{r}, t)$$

ou encore

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sum_n c_n \psi_n (\mathbf{r}) e^{-\frac{2\pi i E_n}{h}},$$

où c_n sont des coefficients constants, $\psi_n (\mathbf{r})$ les fonctions d'onde d'états stationnaires représentant les solutions de l'équation stationnaire de Schrödinger, E_n les valeurs propres donnant le spectre énergétique des états de la particule ou du système de particules. La sommation est étendue à tous les états stationnaires. La recherche du spectre des valeurs propres $E_1, \ldots, E_n$ constitue le problème fondamental de la mécanique quantique.

A. OSCILLATEUR HARMONIQUE

1° On appelle *oscillateur harmonique linéaire* une particule de masse m oscillant avec une pulsation propre ω_0 (p. 121), sollicitée par une force élastique (p. 120) dans une certaine direction.

L'énergie potentielle de l'oscillateur oscillant le long de l'axe des x est:

$$U = \frac{m\omega_0^2}{2} x^2.$$

L'équation de Schrödinger pour un oscillateur harmonique linéaire est:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}\left(E - \frac{m\omega_0^2}{2} x^2\right)\psi = 0.$$

2° L'ensemble des niveaux énergétiques est donné par

$$E_n = h\nu_0\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$$

où $\nu_0 = \omega_0/2\pi$. Les niveaux E_n sont équidistants.

L'énergie minimum

$$E_{\min} = E_0 = \frac{h\nu_0}{2},$$

que peut accepter l'oscillateur linéaire, est dite *énergie du point zéro.* Cette énergie ne peut être diminuée qu'en modifiant les propriétés de l'oscillateur lui-même, autrement dit, en diminuant ω_0, ce qu'il est impossible de réaliser par aucune action extérieure. E_0 ne devient nulle à aucune température, y compris $T = 0$ °K. Le schéma des niveaux énergétiques et la variation de l'énergie potentielle de l'oscillateur harmonique sont montrés fig. VI.1.1.

3° Les fonctions (d'onde) propres sont:

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x_0}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) H_n(\xi), \quad \xi = \frac{x}{x_0},$$

où $x_0 = \sqrt{h/2\pi m\omega_0}$, H_n est le polynôme de Tchébychev-Hermite de n-ième ordre:

$$H_n(\xi) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} e^{\xi^2} \frac{d^n e^{-\xi^2}}{d\xi^n}.$$

Pour $n = 0,\ 1,\ 2$:

$$\psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{x_0\sqrt{\pi}}} e^{-x^2/2x_0^2},$$

$$\psi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2x_0\sqrt{\pi}}} \frac{2x}{x_0} e^{-x^2/2x_0^2},$$

$$\psi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{8x_0\sqrt{\pi}}}\left(\frac{4x^2}{x_0^2} - 2\right) e^{-x^2/2x_0^2}.$$

Le nombre de nœuds de la fonction ψ_n, autrement dit, le nombre de ses valeurs nulles, est égal au nombre quantique n (p. 753).

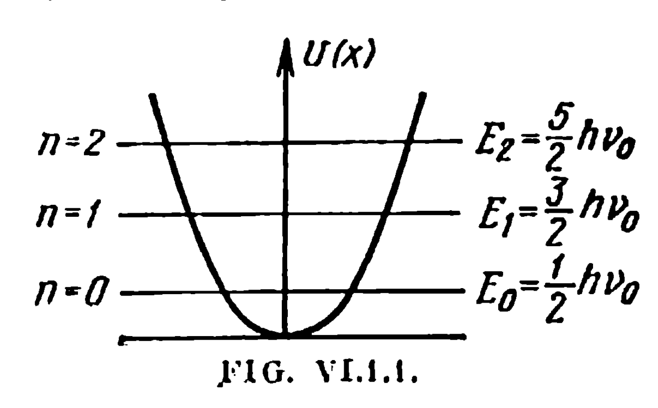


FIG. VI.1.1.

4° Les densités de probabilités de présence d'une particule, oscillant avec l'amplitude a autour de la posi-

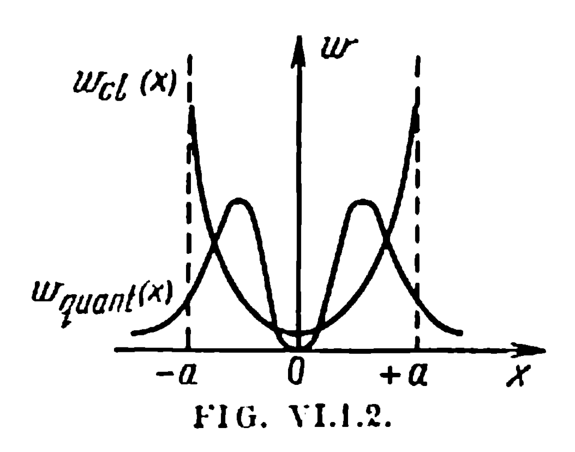


FIG. VI.1.2.

tion d'équilibre suivant une loi harmonique, calculées par la mécanique quantique (pour $n = 1$) et par la mécanique classique sont comparées fig VI.1.2. Les maxima de la fonction d'onde sont disposés au voisinage des points d'écart maximal, mais diffèrent de ceux-ci ($\sqrt{h/2\pi\omega_0 m}$ au lieu de $\sqrt{3\pi/2\pi\omega_0 m}$ pour le cas classique). En mécanique quantique la probabilité de trouver la particule pour $x > a$, c'est-à-dire dans le domaine où l'énergie potentielle de la particule est supérieure à son énergie totale, n'est pas nulle. Ceci ne contredit pas la loi de la conservation de l'énergie, puisque, en vertu des relations de Heisenberg, les valeurs des énergies cinétique et potentielle d'une particule (ainsi que d'un oscillateur harmonique) ne peuvent être simultanément mesurées de façon précise; étant donné que l'énergie cinétique dépend de la vitesse ou de l'impulsion, alors que l'énergie potentielle est fonction des coordonnées de la particule.

5° Avec l'augmentation du nombre quantique n les densités quantiques de probabilités de l'oscillateur harmonique linéaire se rapprochent de plus de leurs densités classiques. C'est en ceci que consiste le *principe de correspondance* établi par Bohr: pour des nombres quantiques importants les déductions et les résultats de la mécanique quantique reviennent aux résultats classiques. Sous une formulation plus générale, le principe de correspondance exige qu'entre toute théorie représentant le développement d'une théorie classique et la théorie classique première existe une relation régulière (dans certains cas limites la nouvelle théorie se transforme en l'ancienne). Ainsi, lorsque $\lambda \to 0$, où λ est la longueur d'onde, l'optique ondulatoire se transforme en optique géométrique, les formules de la cinématique et dynamique relativistes reviennent aux formules de la mécanique classique pour de faibles vitesses de mouvement v telles que $\left(\frac{v}{c}\right)^2 \to 0$, où c est la vitesse de la lumière dans le vide.

6° Pour l'état correspondant à l'énergie $E = E_0$ (oscillations nulles) la probabilité classique de trouver la particule est égale à l'unité lorsque $x = 0$ (l'oscillateur est à l'état d'équilibre), alors que

la probabilité quantique tient un maximum lorsque $x = 0$, décroissant graduellement de part et d'autre et ne devenant nulle que dans l'infini.

A. ROTATEUR

1° On appelle *rotateur* rigide un point matériel de masse m en rotation dans l'espace autour d'un centre fixe à une distance constante.

On représente la fonction d'onde du rotateur sous forme du produit des fonctions radiale $R_{nl}(r)$ et sphérique $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$

$$\psi_n(r, \vartheta, \varphi) = R_{nl}(r) Y_{lm}(\vartheta, \varphi),$$

on comprend sous r, ϑ et φ les coordonnées d'un système sphérique.

L'équation de Schrödinger pour une fonction radiale $u(r) = rR(r)$ lorsque $U = 0$, est:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}\left[E - \frac{h^2 l(l+1)}{8\pi^2 mr^2}\right] u = 0.$$

Les équations pour les fonctions azimutale et orbitale sont:

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \Theta(\vartheta)\Phi(\varphi),$$

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{d\Theta}{d\vartheta}\right) + \left(\lambda - \frac{m_l^2}{\sin^2\vartheta}\right)\Theta = 0,$$

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + m_l^2\Phi = 0,$$

où λ est une grandeur constante.

2° Le spectre énergétique du rotateur s'exprime par

$$E_l = \frac{h^2 l(l+1)}{8\pi^2 I_l} = \frac{p_l^2}{2I_l},$$

où I_l est le moment d'inertie du rotateur, l le nombre quantique orbital qui coïncide avec l'expression classique de l'énergie cinétique du mouvement de rotation (p. 67). Le moment d'impulsion p_l est différent suivant les nombres quantiques l. Les distances entre les niveaux énergétiques augmentent avec l'accroissement de l. Les niveaux énergétiques du rotateur sont montrés fig. VI.1.3.

3° Les fonctions d'onde orbitale et azimutale du rotateur sont les suivantes:

$$\Theta(\vartheta) = c(1 - x^2)^{|m_l|/2} \frac{d^{l+|m_l|}}{dx^{l+|m_l|}} (x^2 - 1)^l,$$

$$x = \cos\vartheta,$$

$$\Phi = e^{im_l\varphi},$$

FIG. VI.1.3

où c=const, m_l est un nombre entier appelé nombre quantique magnétique (p. 792), $-l < m_l < l$, de sorte qu'à chaque état avec un nombre l donné correspond $2l + 1$ sous-états avec $m = \pm l$, $\pm(l-1)$, $\pm(l-2)$, ..., ± 1, 0.

C. MOUVEMENT D'UN ÉLECTRON DANS LE CHAMP COULOMBIEN DU NOYAU (SYSTÈMES HYDROGÉNOÏDES)

1° L'énergie potentielle d'interaction coulombienne (p. 366) d'un électron unique $-e$ et du noyau $+Ze$ d'un système hydrogénoïde (p. 832) est définie par

$$U(r) = -\frac{Ze^2}{r},$$

où r est la distance entre l'électron et le centre du noyau, Z le nombre atomique du noyau (p. 832).

En u. SI:

$$U(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r},$$

où ε_0 est la constante diélectrique.

2° L'équation de Schrödinger pour la partie radiale $u(r) = rR(r)$ de la fonction d'onde complète $\psi(r, \vartheta, \varphi)$ est

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}\left[E - \frac{h^2 l(l+1)}{8\pi^2 mr^2} + \frac{Ze^2}{r}\right] u = 0 \text{ (en u. du système de Gauss).}$$

En u. SI varie seulement la forme de $U(r)$ (cf. 1°).

L'équation de Schrödinger présente un spectre discret de valeurs propres (de niveaux énergétiques) lorsque $E < 0$ et un spectre continu de niveaux énergétiques lorsque $E > 0$. $E = 0$ correspond à l'onisation de l'atome, $E > 0$ à l'électron libre.

3° Pour $E < 0$, les solutions continues finies et univoques $u(r)$ ou $R(r)$ de l'équation de Schrödinger n'existent que pour les valeurs propres de E_n:

$$E_n = -\frac{Z^2e^4m}{8h^2\varepsilon_0^2}\frac{1}{n^2} = -\frac{Z^2Rh}{n^2} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$E_n = -\frac{2\pi^2Z^2e^4m}{h^2}\frac{1}{n^2} = -\frac{RhZ^2}{n^2} \quad \text{(en u. du système de Gauss)}$$

qui forment le spectre énergétique d'un système hydrogénoïde. Ici $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ est le *nombre quantique principal*, R la *constante de Rydberg* (p. 773). L'énergie d'un système hydrogénoïde ne dépend pas du nombre quantique orbital qui prend les valeurs $l = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ (p. 777), autrement dit, tous les états avec différentes valeurs de l pour la même valeur de n sont dégénérés.

La prise en considération des effets relativistes et du spin de l'électron (p. 486) conduit à la structure multiplet des niveaux énergétiques du système hydrogénoïde. L'énergie complémentaire liée à ces effets donne la formule de la structure fine:

$$E_{nj} = -\frac{RhZ^2}{n^2}\left[1 + \frac{Z^2\alpha^2}{n^2}\left(\frac{n}{j + {}^1/_2} - \frac{3}{4}\right)\right],$$

où $j = l \pm 1/2$ est le nombre quantique interne (p. 786), $\alpha = \frac{2\pi e^2}{hc} \approx$ $\approx \frac{1}{137}$ la *constante de structure fine.*

Les effets relativistes et l'interaction spin-orbitale (p. 787) éliminent la dégénérescence des niveaux énergétiques.

4° Les fonctions d'onde radiales R_{nl} sont:

$$R_{nl}(\xi) = N_{nl}e^{-\xi/2}\,\xi^l L_{n+l}^{2l+1}(\xi),$$

où $\xi = 2Z\rho/n = 2Zr/na_0$, a_0 est le rayon de la première orbite de l'électron dans l'atome d'hydrogène (voir ci-après):

$$L_{n+l}^{2l+1}(\xi) = \frac{d^{2l+1}}{d\xi^{2l+1}}\left[e^{\xi}\frac{d^{n+l}}{d\xi^{n+l}}\left(e^{-\xi}\xi^{n+l}\right)\right]$$

sont les polynômes associés de Laguerre. Le facteur N_{nl} est déterminé par la condition de normalisation:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R_{nl}^2\, r^2\, dr = 1.$$

5° Les équations pour les fonctions d'onde orbitale et azimutale sont analogues aux équations pour ces fonctions dans le cas du rotateur (p. 751). Les fonctions d'onde pour différentes valeurs de n et l sont:

$n = 1$, $l = 0$ (sous-groupe $1s$, p. 797)

$$\psi_{10} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} e^{-Zr/a_0};$$

$n = 2$, $l = 0$ (sous-groupe $2s$)

$$\psi_{20} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2}\left(2 - \frac{Zr}{a_0}\right) e^{-Zr/2a_0};$$

$n = 2$, $l = 1$, $m_l = 0$ (sous-groupe $2p$)

$$\psi_{210} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{5/2} re^{-Zr/2a_0} \cos\vartheta;$$

$n = 2$, $l = 1$, $m_l = \pm 1$ (sous-groupe $2p$)

$$\psi_{21\pm 1} = \frac{1}{8\sqrt{\pi}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{5/2} re^{-Zr/2a_0} \sin\vartheta\, e^{\pm i\varphi},$$

où $a_0 = h^2/4\pi^2 me^2$ est le *premier rayon de Bohr* dans le système de Gauss et m_l le nombre quantique magnétique (p. 792).

En u. SI:

$$a_0 = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi me^2}.$$

D. DIFFUSION DES PARTICULES DANS LE CHAMP D'UNE FORCE CENTRALE

1° On appelle *diffusion dans un champ de forces* de symétrie centrale la déviation des particules de leur direction initiale de mouvement par suite d'interaction avec un *centre diffusant*. En particulier, ce centre peut être un atome ou un ion.

Le nombre de particules diffusées par seconde sous l'angle θ par rapport à la direction z de leur mouvement initial dans l'angle solide $d\Omega$ est égal à

$$dN = \sigma(\theta)n\ d\Omega,$$

où n est le nombre de particules passant par seconde à travers 1 cm² de la section transversale d'un faisceau incident de particules *(intensité du faisceau)*.

La grandeur σ, ayant une dimension d'aire, est dite *section efficace transversale différentielle de diffusion* dans l'angle solide $d\Omega$. La grandeur

$$\tilde{\sigma} = \int_0^{4\pi} \sigma\,(\theta)\,d\Omega = 2\pi \int_0^{\pi} \sigma\,(\theta)\,\sin\,\theta\,d\theta$$

est dite *section efficace totale de diffusion* des particules. Parfois on désigne par $d\sigma$ la section transversale différentielle et par σ la section totale. La section efficace totale est définie comme le nombre global de particules du faisceau incident d'intensité diffusées par seconde.

Si la diffusion a lieu sans que la particule perde d'énergie cinétique, elle est *élastique*, dans le cas contraire, elle est *inélastique*.

2° Si le centre diffusant n'est pas fixe, la collision est considérée dans l'un des deux systèmes de coordonnées suivants: *système de référence du laboratoire (s.r.l.)*, par rapport auquel sont considérés les mouvements de la particule diffusante et de la particule diffusée, ou *système du centre de masses (système c)* des particules en collision.

Si dans le s.r.l. le centre diffusant de masse M est au repos avant collision et la particule qui le frappe possède la masse m et la vitesse v_0, l'énergie cinétique des deux particules est définie par

$$E_0 = \frac{mv_0^2}{2},$$

et la vitesse dont est animé le centre de masses des particules par rapport au s.r.l. est:

$$v_c = \frac{\sqrt{2mE_0}}{M + m}.$$

Dans le système c l'énergie cinétique du mouvement relatif des deux particules est:

$$E = E_0 \frac{M}{M + m} \quad \text{et si} \quad M = m, \quad E = \frac{1}{2} E_0.$$

Dans le s.r.l. l'énergie d'une particule après diffusion est liée à son énergie avant diffusion par la relation suivante:

$$\frac{E_1}{E_0} = \frac{M^2 + m^2 + 2Mm \cos \theta}{(M + m)^2};$$

$E_{1\,\min} = \dfrac{(M - m)^2}{(M + m)^2} E_0$ quand $\theta = 180°$, c'est-à-dire lors d'un choc central (θ est l'angle de diffusion). Entre les angles de diffusion d'une

particule m dans le système c (θ) et dans le s.r.l. (ϑ) existent les relations suivantes:

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{M \sin \theta}{m + M \cos \theta}, \quad \cos \vartheta = \frac{m + M \cos \theta}{\sqrt{m^2 + M^2 + 2mM \cos \theta}}.$$

3° Si le potentiel U du centre diffusant présente une symétrie sphérique, le faisceau de particules diffusées est représenté sous forme d'onde sphérique divergente:

$$\psi = a(\theta) \frac{e^{ikr}}{r},$$

où $a(\theta)$ est l'*amplitude de diffusion*; $|a(\theta)|^2 = \sigma(\theta)$.

4° L'équation de Schrödinger pour la diffusion dans le champ d'un centre de forces des particules de masse m est de la forme indiquée p. 752. On considère les solutions pour $E>0$ correspondant au mouvement libre des particules (p. 752). Le potentiel des forces dans ce cas est supposé décroissant suffisamment vite avec la diminution de r (non moins rapidement que $1/r$).

5° L'amplitude de diffusion pour les chocs élastiques est:

$$a(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1) \left(e^{2i\eta_l} - 1\right) P_l (\cos \theta),$$

$a(\theta)$ est une fonction complexe. L'intensité de la diffusion $I(\theta)$ est déterminée par le carré du module de $a(\theta)$:

$$I(\theta) = A^2 + B^2,$$

où

$$A = \frac{1}{2k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1) (\cos 2\eta_l - 1) P_l (\cos \theta),$$

$$B = \frac{1}{2k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1) \sin 2\eta_l \cdot P_l (\cos \theta).$$

La section efficace totale est:

$$\tilde{\sigma} = 2\pi \int_0^{\pi} |a(\theta)|^2 \sin \theta \, d\theta = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1) \sin^2 \eta_l,$$

où $k^2 = 8\pi^2 mE/h^2$ est le carré du nombre d'onde de la particule incidente, l le nombre quantique déterminant le moment cinétique des particules, P_l (cos θ) les polynômes de Legendre, η_l les *phases*

de diffusion dépendant des propriétés du champ diffusant. Les termes de la série sont appelés ***sections efficaces partielles de diffusion*** σ_l. La section partielle maximale est:

$$\tilde{\sigma}_{l\ \max} = \frac{4\pi^2}{k^2}(2l+1).$$

La diffusion présente une symétrie sphérique quand $l = 0$, une symétrie dipolaire quand $l = 1$, une symétrie quadripolaire quand $l = 2$, etc.

Les sections efficaces de diffusion inélastique ont une forme complexe qui dépend de la structure des particules, se manifestant lors de leur collision, ainsi que de leur énergie.

6° Si l'on peut considérer U comme une faible perturbation modifiant peu le mouvement initial des particules (dans ce cas toutes les phases de diffusion sont petites $\eta_l \ll \pi/2$), c'est la *formule de Born* qui est appliquée pour déterminer $\sigma(\theta)$ dans les chocs élastiques:

$$d\sigma = \frac{64\pi^4 m^2}{h^4}\left|\int_0^\infty U(r)\frac{\sin Kr}{Kr}r^2\,dr\right|^2 d\Omega,$$

où $K = 2k\sin\frac{\theta}{2}$ est le module du vecteur reliant les impulsions des particules diffusées et des particules frappant le centre, $d\Omega$ l'angle solide.

L'approximation de Born en théorie des collisions est vraie pour toutes les vitesses v de la particule diffusée par un centre de forces à condition que $|U(a)| \ll \frac{h^2}{4\pi^2 ma^2}$, où a sont les dimensions linéaires de la région où se fait sentir l'action du centre sur la particule. Si cette condition n'est pas remplie, la formule de Born n'est juste que pour des particules rapides satisfaisant à la condition $\frac{hv}{2\pi a} \gg$ $\gg |U(a)|$. Pour les particules rapides $\left(v \gg \frac{h}{2\pi ma}\right)$ la section efficace totale $\tilde{\sigma}$ (p. 755) est inversement proportionnelle à l'énergie de la particule incidente.

7° La section efficace différentielle transversale pour la diffusion élastique de particules suffisamment rapides, de masse m, vitesse v et charge e_1, par un atome dont le noyau possède une charge

Ze et une densité volumique ρ de charge électrique de l'essaim électronique s'exprime par

$$\sigma(\theta) = \frac{e_1^2 e^2}{4m^2 v^4}[Z - F(\theta)]^2 \operatorname{cosec}^4 \frac{\theta}{2},$$

où

$$F(\theta) = 4\pi \int_0^\infty \frac{\sin Kr}{Kr} r^2 \, dr$$

est le *facteur atomique de diffusion*, θ l'angle de diffusion dans le système c (p. 755). Si ρ décroît exponentiellement avec l'augmentation de la distance du centre de l'atome:

$$\rho = \rho_0 e^{-r/a},$$

où a a le sens indiqué 6°, c'est-à-dire représente le «rayon» de l'atome, on a:

$$F(\theta) = \frac{Z}{\left(1 + 4k^2a^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)^2}$$

et

$$\sigma(\theta) = \frac{e_1^2 e^2 Z^2}{4m^2v^4}\left[1 - \frac{1}{\left(1 + 4k^2a^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)^2}\right]^2 \operatorname{cosec}^4 \frac{\theta}{2}.$$

Pour les particules rapides ($ka \gg 1$) et les angles de diffusion non trop petits c'est la *formule de Rutherford* qui est juste:

$$\sigma(\theta) = \frac{Z^2 e_1^2 e^2}{4m^2v^4} \operatorname{cosec}^4 \frac{\theta}{2}.$$

E. PASSAGE DES PARTICULES À TRAVERS UNE BARRIÈRE DE POTENTIEL

1° Lors des interactions de deux particules, dans lesquelles agissent deux sortes de forces: forces de répulsion à grande distance et forces d'attraction à courte distance, le potentiel des forces d'interaction résultantes a la forme indiquée fig. VI.1. 4 (un tel potentiel correspond, par exemple, à l'interaction d'une particule α avec le noyau d'un atome, p. 852).

2° On appelle *puits de potentiel* la région ($r < r_{max}$) située autour du centre attractif dans laquelle l'énergie potentielle de la parti-

cule $U < U_{max}$ (fig. VI.1.4). L'énergie totale d'une particule située dans un puits de potentiel $E < U_{max}$ et les niveaux énergétiques de cette particule sont discrets. La région sous la courbe de potentiel est appelée ***barrière de potentiel.*** Sa hauteur h et sa largeur a dépendent de l'énergie E de la particule dans le puits de potentiel. Pour que la particule puisse sortir du puits de potentiel ou pénétrer dans celui-ci du dehors, il faut, en accord avec la mécanique classique, lui fournir une certaine énergie égale ou supérieure à la différence entre la hauteur de la barrière et son énergie ($|U_{max} - E| = h$).

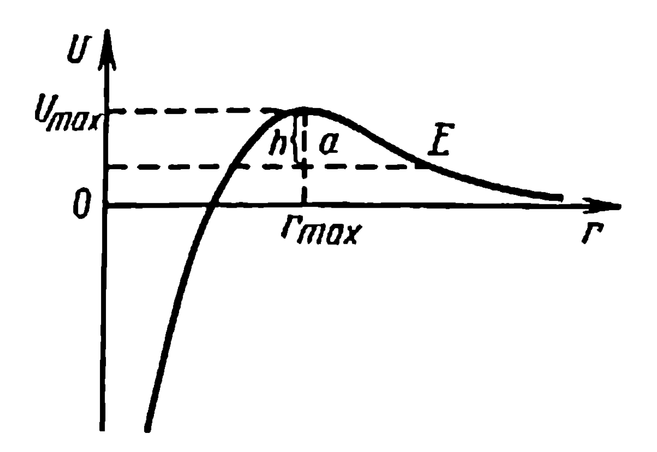


FIG. VI.1.4.

3° Le comportement d'une particule dans le puits de potentiel est décrit par l'équation stationnaire de Schrödinger pour $E < U_{max}$ avec une énergie potentielle $U(r)$ dépendant de la forme du puits de potentiel. La particule dans le puits peut être soumise, en plus d'un mouvement de translation, à un mouvement d'oscillation, à un mouvement de rotation ou à la combinaison de ces mouvements. Tous ces mouvements ne sont pas libres et ont lieu dans le champ du centre attractif.

4° La fonction d'onde d'une particule $\psi(x)$, située dans un puits de potentiel unidimensionnel dans le cas où le puits est limité par une barrière de hauteur et de largeur finies, ne devient pas nulle sur les parois de la barrière de potentiel et en dehors de celle-ci. Contrairement à ce qu'on pourrait attendre de la physique classique, il existe en mécanique quantique une probabilité, différente de zéro, de présence de la particule en dehors du puits de potentiel même dans le cas où l'énergie de la particule dans le puits n'est pas suffisante pour franchir cette barrière. Si la barrière de potentiel sépare deux puits de potentiel, la probabilité de franchir la barrière n'est pas nulle seulement dans le cas où il y a de l'autre côté de la barrière un niveau ou une série de niveaux de la même ou de moindre énergie. Le passage à travers la barrière à un niveau d'égale énergie est appelé *transition de résonance.*

FIG. VI.1.5.

5° Dans le cas élémentaire d'une barrière de potentiel unidimensionnelle de forme rectangulaire la dépendance entre le potentiel et les coordonnées (fig. VI.1.5) est de la forme:

$$-\infty < x < 0 \qquad U = 0 \text{ (région } I\text{)},$$
$$0 < x < a \qquad U = U_0 \text{ (région } II\text{)},$$
$$a < x < +\infty \qquad U = 0 \text{ (région } III\text{)}.$$

La condition $U_I = -aU$, $U_{II} = 0$, $U_{III} = -bU$ (fig. VI.1.6) est relative à une barrière entre deux puits de différente profondeur. On peut considérer une particule frappant la barrière au cours de son mouvement libre et une particule frappant la barrière de l'intérieur du puits. Le premier cas correspond à la pénétration de la particule dans le puits, le second cas, à la libération du puits.

6° Conformément aux trois régions de U, l'équation de Schrödinger pour le problème sur le franchissement d'une barrière a trois différentes solutions. Pour un flux de particules libres heurtant la barrière, la solution donne non seulement une onde réfléchie tenant compte de la réflexion par la barrière des particules avec une énergie inférieure à sa hauteur, mais aussi une onde transmise («réfractée») correspondant au passage des particules à travers la barrière.

7° La grandeur

$$D = \frac{I_{\text{trans}}}{I_{\text{inc}}}$$

est appelée *transparence de la barrière de potentiel*, où I_{inc} et I_{trans} sont les intensités des ondes incidente et transmise (p. 743).

8° La transparence d'une barrière rectangulaire:

$$D = D_0 e^{-\frac{4\pi}{h}\sqrt{2m(U_0 - E)}\,a},$$

où a est la largeur, U_0 la hauteur de la barrière de potentiel, E l'énergie de la particule (ces deux grandeurs sont comptées à partir d'une même origine correspondant au fond du puits de potentiel), m la masse de la particule et D_0 un coefficient proche de 1. Si la barrière n'est pas rectangulaire, mais a une forme complexe:

$$D = D_0 e^{-\frac{4\pi}{h}\int\limits_{x_1}^{x_2}\sqrt{2m(U(x) - E)}\,dx},$$

où x_1 et x_2 sont les coordonnées des points du début et de la fin de la barrière pour une valeur

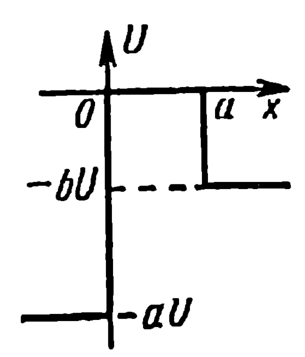


FIG. VI.1.6.

donnée de E. La transparence d'une barrière rectangulaire devient considérable quand

$$\frac{4\pi}{h}\sqrt{2m(U-E)}\,a \approx 1.$$

9° Le phénomène de passage («d'infiltration») des particules à travers les barrières de potentiel est appelé *effet tunnel*. En vertu de la physique classique, les particules ne peuvent passer que par-dessus les barrières, c'est-à-dire lorsque leur énergie $E > U_0$. Etant donné que $E = T + U = p^2/2m + U$, dans la région où $U(x) > E$, il se trouve être que $p^2/2m < 0$, autrement dit, que l'impulsion de la particule devient une grandeur imaginaire. L'absurdité de ce fait signifie l'impossibilité classique pour la particule de franchir la barrière lorsque $U(x) > E$. La grandeur D pour $h \to 0$ (passage à la physique classique) devient nulle quand $U > E$, autrement dit, la barrière devient impénétrable pour les particules.

L'effet tunnel est un phénomène purement quantique, lié à l'impossibilité de déterminer simultanément les énergies cinétique et potentielle de la particule (p. 750). A l'indétermination $\overline{\Delta x^2}$ sur la coordonnée de la particule franchissant la barrière ($\overline{\Delta x^2} \ll a^2$, où a est la largeur de la barrière) correspond une indétermination sur l'impulsion de la particule $\overline{\Delta p_x^2}$ telle que $\overline{\Delta p_x^2}/2m \geqslant U - E$, autrement dit, la variation de l'énergie cinétique de la particule, engendrée par l'indétermination sur sa coordonnée, excède l'énergie qui manque à la particule pour passer par-dessus cette barrière. En conséquence, la particule obtient la possibilité de passer à travers la barrière par procédé «classique».

F. MOUVEMENT DES ÉLECTRONS DANS LES CHAMPS PÉRIODIQUES

1° La propriété de périodicité du champ potentiel $U(x, y, z)$, possédant une périodicité tridimensionnelle, s'exprime par les égalités suivantes:

$$U(x+a, y, z) = U(x, y, z);$$
$$U(x, y+b, z) = U(x, y, z);$$
$$U(x, y, z+c) = U(x, y, z),$$

où les grandeurs a, b et c caractérisent respectivement la période du champ suivant les axes Ox, Oy, Oz. Un tel champ existe dans les cristaux parfaits où les noyaux des atomes et la charge électrique

moyenne sont distribués périodiquement. Dans ce cas le potentiel du champ électrique est périodiquement tridimensionnel. Le mouvement des électrons dans les cristaux représente un exemple de mouvement dans un champ périodique tridimensionnel. La résolution exacte du problème sur un tel mouvement *(problème multiélectronique)* se trouve être impossible et est remplacée par la résolution d'un problème approché sur le mouvement d'un électron dans un certain champ périodique extérieur du réseau cristallin; cette résolution a beaucoup de particularités essentielles de la résolution du problème exact.

2° Pour le problème à une dimension la fonction d'onde de l'électron est choisie sous forme d'une onde plane dans la représentation p de Fourier:

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} c(k) e^{ikx}\, dk,$$

où $k = k_x = \frac{2\pi p_x}{h}$, $p = p_x$ est l'impulsion de l'électron suivant l'axe Ox et $c(k)$ l'amplitude dans la représentation p. L'énergie potentielle $U(x)$ de l'électron dans le cristal se représente sous forme d'une série de Fourier:

$$U(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} U_n e^{-\frac{2\pi i n x}{a}},$$

où a est un paramètre décrivant la périodicité du champ potentiel dans le cristal suivant l'axe Ox. On recherche les grandeurs $c(k)$ et E_n correspondant à une forme donnée de $U(x)$.

3° Les niveaux énergétiques de l'électron forment des bandes séparées dans le champ périodique:

$$E = E_i(k), \quad i = 1, 2, 3, \ldots,$$

dans lesquelles l'énergie dépend du nombre d'onde (spectre énergétique quasi continu de la bande). Ces bandes sont appelées ***bandes d'énergie permise*** ou ***bandes permises***. Les bandes permises sont séparées l'une de l'autre par des intervalles de valeurs interdites d'énergie *(bandes interdites)*. Avec l'élévation du numéro i de la bande, les bandes interdites se rétrécissent (le recouvrement des bandes permises est également possible) jusqu'à l'apparition d'un spectre continu (quand $i = \infty$). A la limite de la bande l'énergie de l'électron subit une discontinuité. La variation générale de l'énergie dans

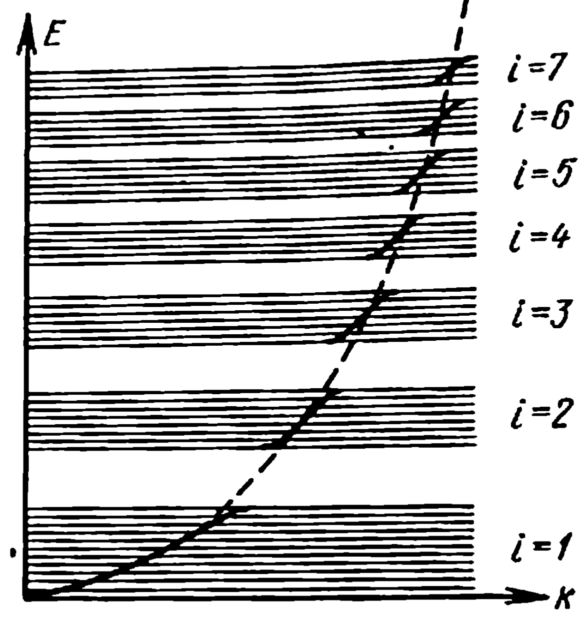


FIG. VI.1.7.

l'ensemble des bandes est montrée fig. VI.1.7.

4° La formation d'un spectre de bandes énergétique des électrons dans le cristal suit des relations d'incertitude (p. 746). Dans un atome isolé, la durée de vie τ de l'électron à l'état excité étant finie ($\tau \approx 10^{-8}$ *s*), la largeur naturelle ΔE du niveau énergétique constitue $\Delta E \approx \frac{h}{2\pi\tau} \approx 10^{-7}$ eV.

Dans le cristal, les électrons de valence des atomes qui sont plus faiblement liés aux noyaux que les électrons internes peuvent passer d'un atome à l'autre par effet tunnel (p. 761) à travers la barrière de potentiel séparant les atomes dans le cristal. Ceci conduit à une diminution notable de τ et à l'élargissement des niveaux énergétiques de tels électrons en bandes de valeurs permises d'énergie.

La fréquence ν d'infiltration de l'électron à travers la barrière de potentiel de forme rectangulaire exprimée par le produit

$$\nu = \frac{v}{d} D,$$

où v est la vitesse de l'électron dans l'atome, d la dimension linéaire de l'atome, D la transparence de la barrière, conduit à la valeur τ de la durée de vie moyenne de l'électron dans un atome donné, $\tau \approx \approx 10^{-15}$ s, d'où en vertu des relations d'incertitude $\Delta E \approx 1$ eV.

Donc, au lieu de la largeur naturelle $\Delta E \approx 10^{-7}$ eV du niveau énergétique électronique dans un atome isolé, il apparaît dans le cristal une bande de valeurs permises d'énergie avec une largeur de l'ordre d'unités d'électron-volts.

Les fonctions d'onde de l'électron se mouvant dans un champ périodique unidimensionnel sont les suivantes:

$$\psi_{jk}(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_j\left(k + \frac{2\pi n}{a}\right) \frac{e^{i(k+2\pi n/a)x}}{\sqrt{2\pi}} =$$

$$= e^{ikx} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_j(k') \frac{e^{i\frac{2\pi n}{a}x}}{\sqrt{2\pi}},$$

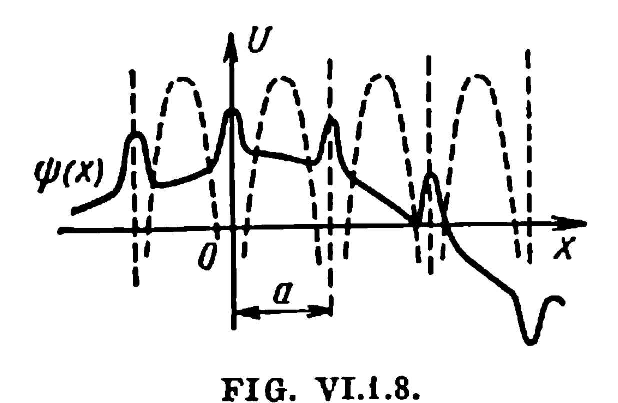


FIG. VI.1.8.

où $k' = k + 2\pi n/a$ correspondent aux ondes planes modulées avec la même périodicité que le potentiel (avec la période a). La forme de la partie réelle de $\psi(x)$ est montrée fig. VI.1.8 par une ligne continue. Au voisinage des valeurs de x, correspondant aux positions des ions dans le réseau, $\psi(x)$ ressemble aux fonctions d'onde des électrons atomiques.

5° L'énergie de l'électron dans le cristal est une fonction périodique de k et peut être représentée par une série de Fourier:

$$E_j(k) = \sum_{m=0}^{\infty} E_{jm} \cos(mak),$$

où les coefficients E_{jm} dépendent de la forme de l'énergie potentielle $U(x)$. Si l'on se limite dans cette série aux deux premiers termes ($m = 0$ et $m = 1$), on a:

$$E_j(k) = E_{j_0} + E_{j_1} \cos(ka).$$

Au centre de la bande, quand $k \approx 0$, on peut développer $E_j(k)$ suivant les puissances de k:

$$E_j(k) = E_{j_0} + E_{j_1}\left(1 - \frac{k^2a^2}{2} + \ldots\right)$$

et représenter sous la forme:

$$E_j(k) = \text{const} + \frac{h^2k^2}{8\pi^2 m^*}.$$

Comparant avec l'énergie du mouvement libre de l'électron

$$E_k = \text{const} + \frac{h^2k^2}{8\pi^2 m^*}$$

on voit que la différence entre le mouvement de l'électron dans le cristal et son mouvement libre est prise en considération par introduction de la *masse efficace* de l'électron au lieu de sa masse élémentaire m. Les masses efficaces de l'électron au milieu et au «plafond» de la bande sont de signes contraires. Habituellement, au centre de la bande $m^* > 0$, tandis qu'à son «plafond» $m^* < 0$. L'impulsion de l'électron dans le cristal:

$$\mathbf{p} = \frac{h}{2\pi}\frac{m}{m^*}\mathbf{k}$$

diffère de l'impulsion de l'électron libre par le coefficient $\frac{m}{m^*}$. Sous l'action du champ électrique appliqué au cristal l'électron possédant l'énergie relative à la limite de la bande commence à se mouvoir comme s'il possédait la charge *effective* e^*:

$$e^* = e\frac{m}{m^*}.$$

Le signe de la charge effective est contraire à celui de la charge élémentaire (puisque $\frac{m}{m^*} < 0$).

6° La *théorie des bandes des corps solides*, fondée sur les régularités exposées, explique nombreuses particularités des métaux et des cristaux non métalliques (des semiconducteurs et des isolants). La modulation d'une onde plane par le potentiel périodique du champ du réseau cristallin fait varier la densité de probabilité (p. 744) $|\psi|^2$ des électrons dans le réseau par rapport au mouvement des électrons libres. Par suite de la perturbation de la périodicité rigoureuse du potentiel du champ du réseau due aux vibrations anharmoniques thermiques de ses atomes (p. 283) et aux défauts de structure du réseau, il apparaît une *diffusion des ondes électroniques*, qui fait varier dans une direction donnée la grandeur $|\psi|^2$ et la densité de courant des électrons $\mathbf{j}$ (p. 744). La diffusion des ondes électroniques conditionne la résistance au courant électrique (p. 396). L'intensité de cette diffusion est proportionnelle à la valeur et au nombre de fluctuations de la périodicité du potentiel, l'augmentation de l'amplitude des vibrations des atomes (par l'élévation de température) et la croissance du nombre de défauts de structure du réseau (dus aux impuretés par exemple) provoquent l'accroissement de la résistance électrique. Au voisinage du zéro absolu la diffusion thermique des ondes électroniques tend vers zéro, mais la partie de la diffusion conditionnée par les défauts du réseau ne diminue pas et donne une *résistance rémanente* dépendant des propriétés individuelles du cristal. La résistance due à la diffusion thermique des ondes électroniques ne dépend pas des propriétés du cristal.

7° Les bandes énergétiques dans les cristaux se divisent en

a) bande saturée en électrons *(bande de valence)* formée des niveaux énergétiques électroniques des couches intérieures des atomes libres;

b) bande partiellement ou entièrement vide d'électrons *(bande de conduction)* dans laquelle les niveaux énergétiques correspondent aux énergies des électrons périphériques mis en commun des atomes (ou des ions) isolés. L'électron passe d'une bande à l'autre en

absorbant ou en produisant d'énergie suffisante pour franchir la bande interdite.

8° Dans les métaux, à température ambiante ($T \sim 300$ °K) les niveaux énergétiques de la bande de conduction ne sont pas entièrement remplis (p. 393), ce qui conditionne la bonne conductibilité électrique des métaux. Dans les isolants la première bande non occupée (de conduction) est séparée de la bande inférieure saturée (de valence) par une large bande interdite. Le claquage de l'isolant n'est donc possible que dans des champs électriques intenses.

Les semiconducteurs cristallins appartiennent au type de corps solides dans lesquels, à la différence des isolants, la bande interdite entre la bande saturée (de valence) et la première bande non occupée (de conduction) n'est pas très large, de sorte qu'est possible le déplacement des électrons par excitation thermique. C'est pourquoi, le passage du courant a lieu dans ceux-ci lorsque T est suffisamment grande et la bande supérieure se trouve être une bande de conduction.

On appelle *exciton* l'excitation élémentaire électriquement neutre ayant le caractère de quasi-particule dans les semiconducteurs et les diélectriques. L'exciton apparaît lors de la formation d'un couple électron-trou dans les cristaux, lors du passage des électrons de la bande de valence dans la bande de conduction. Si l'énergie d'excitation est un peu inférieure à la largeur de la bande interdite, l'électron et le trou ne peuvent indépendamment l'un de l'autre se déplacer dans le cristal et se trouvent à l'état lié d'une quasi-particule électriquement neutre: l'exciton. En se déplaçant dans le cristal, l'exciton transporte une certaine énergie. On lui attribue des nombres quantiques déterminés et il possède un spectre de bandes énergétique (p. 763). Les excitons ont un spin entier (en unités de $\hbar$), autrement dit, ils sont des bosons (p. 236).

9° Lorsqu'un métal (ou un semiconducteur) est soumis à un champ magnétique uniforme, les électrons se trouvant dans la bande de conduction de la substance commencent à décrire des cercles dans le plan perpendiculaire à la direction du champ magnétique (ou bien des spirales si les vitesses des électrons ont des composantes le long du champ magnétique). La fréquence de révolution suivant un cercle (ou une spirale) est égale à

$$\nu_c = \frac{eB}{2\pi m^*} \quad \text{(en u. SI)},$$

où e est la charge de l'électron, m^* la masse efficace de l'électron (p. 764), B l'induction du champ magnétique dans la substance,

ν_c la fréquence de Larmor des électrons dans le métal ou le semiconducteur. Si l'on soumet simultanément la substance à un champ électrique variable, une intense absorption sélective de l'énergie du champ est observée à la fréquence ν_c appelée ***résonance cyclotron*** (étant donné la ressemblance des trajectoires des électrons d'une substance soumise à un champ magnétique avec leurs trajectoires dans un cyclotron). A l'aide de la résonance cyclotron il est possible de déterminer les masses efficaces m^* des électrons dans les semiconducteurs et les métaux, les parcours libres moyens des électrons (p. 394), etc.

5. Transitions quantiques

1° La variation de l'état d'une microparticule ou d'un système de microparticules sous l'action de causes internes ou externes quelconques est appelée ***transition quantique*** de la particule ou du système de son état initial A (à l'instant $t = 0$) vers son état final (à l'instant $t = T$). La transition quantique est généralement liée à une variation d'énergie de la particule (ou du système de particules).

2° La variation de l'état d'un système est caractérisée par la grandeur P_{BA}, appelée ***probabilité de transition*** de l'état A à l'état B. On calcule les probabilités de transition dans un spectre continu ou un spectre discret, ainsi que les probabilités de transition d'un spectre continu à un spectre discret et inversement.

3° Le calcul des probabilités de transitions quantiques peut être réalisé quand la cause provoquant la variation de l'état du système agit au cours d'un intervalle fini de temps. La résolution de l'équation de Schrödinger (p. 745), déterminant la fonction d'onde $\psi(x, y, z, t)$ d'après la fonction d'onde à l'instant initial $t = 0$, $\psi(x, y, z, 0)$, présente de grandes difficultés et peut être obtenue dans les seuls cas où la transition du système est due aux interactions faibles devant les forces agissant à l'intérieur du système. Dans ces cas les faibles actions exercées sur le système sont considérées comme de ***faibles perturbations***.

4° En théorie des perturbations, l'hamiltonien du système (p. 101) est représenté sous la forme de la somme de l'hamiltonien du système non perturbé H^0 et du terme de perturbation $W(\mathbf{r}, t)$. Notons que $W \ll H^0$. Le problème se résout par approximations successives: on recherche d'abord la solution de l'équation correspondante pour H^0 et on introduit ensuite des corrections relatives à W, d'un ordre de petitesse répondant à la première approximation, etc.

5° L'équation de Schrödinger, considérée en première approximation de la théorie des perturbations pour un mouvement le long de l'axe des x

$$\frac{ih}{2\pi}\frac{\partial\psi}{\partial t} = H^0(x)\psi + W(x, t)\,\psi,$$

à l'aide du développement de $\psi\,(x, t)$ suivant les fonctions d'onde des états stationnaires (p. 748) du système non perturbé:

$$\psi(x, t) = \sum_k c_k(t)\psi_k(x)e^{-\,i2\pi E_k t/h}$$

est réduite à la forme

$$\frac{ih}{2\pi}\frac{dc_m}{dt} = \sum_k W_{mk}(t)e^{i\omega_{mk}t}\,c_k(t),$$

où

$$W_{mk}(t) = \int \psi_m^*(x)W(x, t)\psi_k(x)dx$$

est appelé *élément matriciel de l'énergie de perturbation (élément matriciel de transmission)* et $\omega_{mk} = 2\pi(E_m - E_k)/h$, $\omega_{mk} = 2\pi\nu_{mk}$ fréquence de transition de Bohr $E_m \rightarrow E_k$ pour le type donné de perturbation. Si, pour $t = 0$, le système se trouve à l'état n, les coefficients $c_k(t)$ satisfont à la condition:

$$c_k(0) = \begin{cases} 1 & \text{pour } k = n, \\ 0 & \text{pour } k \neq n. \end{cases}$$

6° La probabilité de trouver le système à l'instant t à l'état m d'énergie E_m est égale à $|c_m(t)|^2$. C'est pourquoi la grandeur

$$P_{mn}(t) = |c_m(t)|^2$$

est appelée probabilité de transition de l'état d'énergie E_n vers l'état d'énergie E_m à l'instant t. En première approximation de la théorie des perturbations (quand $c_m^{(0)} = 0$ pour $t = 0$ et $c_m^{(1)}$ est petit) pour les transitions quantiques dans un spectre discret

$$P_{mn} = \frac{64\pi^4}{h^2}|W_{mn}(\omega_{mn})|^2.$$

La transition n'est possible que si la perturbation contient dans son spectre la fréquence ν_{mn} relative à la transition, P_{mn} étant différente de zéro quand $W_{mn}(\nu_{mn}) \neq 0$ seulement. La formule pour P_{mn} est relative au spectre énergétique discret (E_m, $E_n < 0$) et peut être généralisée aux cas suivants: transitions

dans un spectre continu ($E > 0$), transitions d'un spectre continu dans un spectre discret et inversement et transitions sous l'influence d'une perturbation indépendante du temps.

7° Les interactions des atomes avec le champ électromagnétique sont un exemple de transitions quantiques du système sous l'influence de faibles perturbations. L'absorption des photons par les atomes s'accompagne de la transition des électrons atomiques d'un état d'énergie E_n à un autre état d'énergie E_m. Si l'onde électromagnétique incidant sur l'atome possède dans son spectre la fréquence $\nu_{mn} = (E_m - E_n)/h$ *(condition des fréquences de Bohr)*, c'est à cette fréquence même $\nu = \nu_{mn}$ que se produit la transition.

3° Si la longueur d'onde du rayonnement incidant sur l'atome est très supérieure aux dimensions linéaires de l'atome, l'intensité du champ électrique de l'onde $\mathcal{E}$ dans les limites de l'atome est quasi constante. L'énergie de perturbation est $W = -\mathcal{E}\, er$, où $er = p_e$ est le moment dipolaire de l'électron atomique.

L'élément matriciel de transition est alors:

$$W_{mn}(\omega_{mn}) = -\mathcal{E}(\omega_{mn})\, p_{mn},$$

où

$$p_{mn} = -e \int \psi_m^* \, r \psi_n \, dV$$

est l'*élément matriciel du moment dipolaire.*

La probabilité de transition est:

$$P_{mn} = \frac{64\pi^4}{h^2} |\mathcal{E}(\omega_{mn})|^2 |p_{mn}|^2.$$

La probabilité pour que l'atome passe de l'état E_n à l'état E_m par unité de temps est égale à la probabilité d'absorption du quantum de rayonnement de fréquence ν_{mn} par unité de temps:

$$B_{mn} = \frac{8\pi^3}{3h^2} \sum_{m,n} |p_{mn}|^2,$$

où la sommation est étendue à toutes les différentes combinaisons de E_n et E_m des niveaux dégénérés, donnant une même ν_{mn} en vertu de la condition de Bohr. La grandeur B_{mn} est appelée *coefficient d'Einstein pour l'absorption de la lumière de fréquence* ν_{mn}.

9° La grandeur correspondante pour la transition inverse spontanée $E_n \to E_m$ s'accompagnant de l'émission d'un quantum de lumière de même fréquence est égale à

$$A_{nm} = \frac{64\pi^4 \nu_{mn}^3}{3hc^3} \sum_{m,n} |p_{mn}|^2.$$

A_{nm} est appelé *coefficient d'Einstein pour l'émission spontanée de la lumière de fréquence* ν_{mn}. La relation entre A_{nm} et B_{mn} s'exprime par

$$A_{nm} = \frac{8\pi h \nu_{mn}^3}{c^3} \frac{g_m}{g_n} B_{mn},$$

où g_m et g_n représentent les *poids statistiques des états* m et n (nombres de différents états quantiques d'énergies E_m et E_n).

La grandeur A_{nm} détermine la *durée de vie* τ_{nm} du système à l'état n par rapport à la transition spontanée de cet état vers un autre état m:

$$\tau_{nm} = \frac{1}{A_{nm}}.$$

La valeur de τ_{nm} étant finie, l'énergie d'état, qui lui correspond conformément aux relations de Heisenberg (p. 746), sera connue avec une certaine imprécision:

$$\Delta E_n \geqslant \frac{h}{2\pi\tau_{nm}}.$$

La grandeur $\Delta E_n = \Gamma_n$ est appelée *largeur du niveau* E_n.

La valeur de Γ_n détermine la largeur naturelle d'une raie spectrale (p. 707):

$$\Delta \nu_{nm} = \frac{c}{\lambda_{nm}^2} |\Delta\lambda_{nm}| = \frac{\Gamma_n}{h} \geqslant \frac{1}{2\pi\tau_{nm}}.$$

Tout facteur responsable d'une diminution de τ_{nm} élargit les niveaux relatifs à cet état et les raies spectrales correspondantes.

Pour les interactions électromagnétiques des atomes la grandeur τ_{nm} est de l'ordre de 10^{-8} s. Dans les cas où A_{nm} est peu importante ($\tau_{nm} \gg 10^{-8}$ s), l'état correspondant d'énergie E_n est dit *métastable* (p. 778).

10° Aux états métastables du système correspondent des transitions plus ou moins interdites. Cette interdiction est due à ce que de tout le nombre de transitions virtuelles de l'état E_n à l'état E_m et inversement seules les transitions pour lesquelles l'élément matriciel $W_{mn}(\omega_{mn}) > 0$ peuvent se réaliser. Cette condition conduit aux *règles de sélection* (p. 778) exprimées par les relations entre les nombres quantiques caractérisant les états initial et final du système lors de la transition sous l'action d'une perturbation donnée.

11° L'existence des règles de sélection est liée au fait que l'élément matriciel du moment dipolaire (ou du moment quadripo-

laire) et la probabilité de transition P_{mn} ont leur valeur maximale lorsque au cours de la transition les fonctions d'onde ψ_n et ψ_m des états initial et final du système se superposent considérablement dans une région quelconque de l'espace. Les transitions entre états pour lesquels l'élément matriciel est insignifiant sont dites *interdites* pour le type donné d'élément matriciel (le type donné de perturbation). Cette interdiction cependant n'est pas absolue, elle indique seulement que les transitions interdites ont un élément matriciel et une probabilité très petits devant les transitions *permises* par les règles de sélection.

12° Les fonctions d'onde de l'oscillateur harmonique, par exemple, correspondant à différentes valeurs du nombre quantique n se superposent considérablement dans une région de l'espace, ce qui donne une probabilité notable pour que la transition de l'état de n' quelconque vers l'état de n'' ait lieu, n'' pouvant différer sensiblement de n' (p. 749). Si, au cours de cette transition, à l'oscillateur est communiquée une certaine perturbation complémentaire, modifiant essentiellement $\psi_{n''}$, la transition peut alors devenir très peu probable. Les intensités des raies permises par les règles de sélection seront les plus grandes dans le cas où les causes extérieures modifient peu les états du système à l'instant de la transition *(approximation adiabatique)*. Appliqué aux transitions électroniques dans les molécules dont les noyaux accomplissent un mouvement oscillatoire, ce principe est connu comme *principe de Franck-Condon* (p. 824).

13° L'interaction du champ électromagnétique avec les atomes est à la base de la théorie des spectres d'émission et d'absorption de la lumière par les systèmes atomiques. La forme du spectre (la disposition des raies spectrales) est déterminée à l'aide du schéma des niveaux énergétiques du système quantique. Les longueurs d'onde et les fréquences de transition sont liées par la relation:

$$\lambda_{mn} = \frac{c}{\nu_{mn}},$$

les intensités des raies spectrales sont liées au nombre d'atomes total dans le système rayonnant, à leur distribution statistique entre les états et aux probabilités de transitions correspondantes de la manière suivante:

$$I_{mn} = \alpha_n A_{nm} = \beta_m B_{mn},$$

où α_n, β_m sont certains coefficients, différents pour l'émission et l'absorption du rayonnement (p. 769), ils tiennent compte également des poids statistiques des états (p. 770).

La recherche des valeurs de E_n du système quantique *(schéma des niveaux énergétiques)* suivant la forme du spectre, effectuée par combinaison des différentes valeurs observées de ν_{mn}, est appelée *principe de combinaison de Ritz.*

14° En l'absence d'influences extérieures, le système quantique (un atome par exemple) se trouve à l'état stationnaire d'énergie faible E_m. Lorsqu'on agit sur le système (avec un rayonnement électromagnétique par exemple), il passe à un état plus élevé d'énergie E_n en absorbant des quanta de rayonnement avec une probabilité définie par le coefficient d'Einstein B_{mn} (8°).

De ce niveau plus élevé le système peut descendre au niveau initial soit par transition spontanée avec une probabilité définie par le coefficient A_{nm}, soit par transition stimulée (induite) avec une probabilité dépendant du *coefficient d'émission stimulée* $B_{nm} = B_{mn}$. A l'état d'équilibre les nombres d'absorption et d'émission de quanta $h\nu_{nm}$ par les atomes par seconde sont égaux entre eux (condition du bilan détaillé):

$$N_m B_{mn} \rho_{mn} = N_n (B_{nm} \rho_{nm} + A_{nm}),$$

où N_m et $N_n < N_m$ sont les nombres des atomes occupant les niveaux énergétiques E_m et E_n, $\rho_{nm} = \rho_{mn}$ la densité volumique d'énergie de rayonnement de fréquence ν_{mn}.

Si $\rho_{nm} B_{nm} \gg A_{nm}$, il est possible, à l'aide de méthodes spéciales, de transférer le système dans un état de $N_n > N_m$. Une telle distribution «inverse» suivant les états peut être décrite conventionnellement par la distribution de Boltzmann (p. 235) pour une température absolue négative (p. 154) égale à

$$T = -\frac{E_n - E_m}{k \ln (N_n/N_m)}.$$

En agissant sur un tel système par un champ électromagnétique extérieur de fréquence ν_{mn} ou par l'émission spontanée des atomes voisins, on peut obtenir une émission stimulée d'un grand nombre d'atomes du système en un court intervalle de temps. L'émission stimulée possède une haute cohérence (p. 622), une puissance considérable étant concentrée dans un pinceau étroit.

Les dispositifs qui fonctionnent dans la gamme des ondes radio ultra-courtes sont appelés *masers* et ceux qui fonctionnent dans la gamme optique, *lasers.*

CHAPITRE 2

Atome

1. Les atomes et les ions à un électron de valence

1° On appelle *atome* la plus petite particule d'un élément chimique douée de propriétés chimiques de celui-ci. L'atome comprend un noyau chargé positivement et entouré d'électrons gravitant dans son champ coulombien. La charge du noyau (p. 832) dans l'atome est égale en valeur absolue à la charge totale de tous ses électrons. On appelle *ion* la particule chargée électriquement qui se forme lors de perte ou de gain d'électrons par l'atome.

2° L'atome d'hydrogène représente le système atomique élémentaire, constitué d'un seul électron gravitant dans le champ coulombien du proton. *Hydrogénoïdes* (isoélectroniques à l'hydrogène) sont les ions He^{+}, Li^{2+}, Be^{3+}, B^{4+}, C^{5+}, etc., possédant également un seul électron. On peut compter au nombre des atomes à un électron de valence n'appartenant pas aux enveloppes électroniques remplies (p. 798) les atomes de Li, Na, K, Rb et Cs.

3° Le spectre d'émission de l'atome d'hydrogène est linéaire (discret). Les fréquences des raies de ce spectre se décrivent par la *formule de Balmer-Rydberg:*

$$\nu = cR'\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right) = R\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right),$$

où

$$R = \frac{2\pi^2 e^4 m_e}{h^3} \quad \text{(en u. du système de Gauss)},$$

$$R = \frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^3} \quad \text{(en u. SI)}.$$

Les grandeurs R et R' sont dites *constantes de Rydberg* (en s^{-1} et en cm^{-1} respectivement). La valeur de R est $R = 3{,}288 \cdot 10^{15}\ s^{-1}$;

la valeur de R' est donnée p. 779. Les grandeurs n et m sont les *nombres quantiques principaux* (p. 753). Notons que $m = n + 1$, $n + 2$, etc. Le groupe de raies ayant un même n est appelé *série*. A $n = 1$ correspond la *série de Lyman*, à $n = 2$ la *série de Balmer*, à $n = 3$ la *série de Paschen*, à $n = 4$ la *série de Brackett*, à $n = 5$ la *série de Pfundt*, à $n = 6$ la *série de Humphree*. La première série est découverte dans l'ultraviolet lointain, la seconde dans le visible du spectre, les autres séries dans l'infrarouge. Pour les ions hydrogénoïdes c'est la formule des séries de Balmer-Rydberg qui est applicable:

$$\nu = Z^2 R\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right),$$

où Z est le nombre atomique de l'élément dans le système périodique de Mendéléev (p. 797).

4° La plus haute fréquence pour chaque n dans la formule de Balmer (pour $m = \infty$) correspond à la *limite de la série*. La fréquence correspondant à la limite de la série est dite *terme spectral* et est désignée par T_n:

$$T_n = \frac{R}{n^2} \quad \text{(pour l'hydrogène).}$$

Le terme spectral d'un ion hydrogénoïde est défini par $T_n = Z^2R/n^2$.

5° L'énergie relative au terme d'un ion hydrogénoïde représente:

$$E_n = -\frac{hRZ^2}{n^2}; \qquad T_n = \frac{|E_n|}{h}.$$

La valeur absolue de E_n est appelée *énergie de liaison* de l'électron dans l'atome, qui est en état avec un n donné. La plus petite valeur de E_n,

$$E_{\min} = -hRZ^2,$$

répond à l'*état fondamental* ou *normal* du système. $E_{\max} = 0$ correspond à l'ionisation de l'atome ou de l'ion, c'est-à-dire à l'arrachement de l'électron de celui-ci. L'énergie d'ionisation est égale en valeur absolue à l'énergie de liaison de l'électron dans l'atome ou l'ion. Le potentiel d'ionisation (p. 405) $\varphi = hRZ^2/en^2$, où e est la valeur absolue de la charge de l'électron. Le schéma des niveaux énergétiques dans l'atome d'hydrogène est montré fig. VI.2.1. Les postulats de Bohr donnent l'interprétation du spectre d'hydrogène.

6° *Premier postulat de Bohr (postulat des états stationnaires):* l'atome n'émet pas d'énergie dans les états stationnaires. Aux états stationnaires de l'atome correspondent des orbites stationnaires suivant lesquelles se meuvent les électrons. Au cours de leur mouvement dans les orbites stationnaires les électrons, malgré leur accélération, n'émettent pas de rayonnement électromagnétique (p. 599).

Second postulat de Bohr (règle de quantification des orbites): à l'état stationnaire de l'atome l'électron doit, en se mouvant sur une

orbite circulaire, prendre des valeurs quantifiées du moment cinétique vérifiant la condition:

$$m_e v_n r_n = \frac{nh}{2\pi},$$

où r_n est le rayon de la n-ième orbite, $m_e v_n r_n$ le moment cinétique de l'électron sur cette orbite, n un nombre entier ($n \neq 0$).

Troisième postulat de Bohr (condition des fréquences de Bohr, p. 769): l'atome émet (absorbe) un quantum d'énergie électromagnétique lors du passage de l'électron d'une orbite avec un plus grand (petit) n à une orbite avec un plus petit (grand) n. L'énergie du quantum est égale à la différence des énergies de l'électron sur les orbites avant et après transition:

$$E = h\nu_{mn} = E_m - E_n;$$

la fréquence du quantum (photon) émis ou absorbé lors de la transition est égale à

$$\nu_{mn} = \frac{E_m - E_n}{h}.$$

FIG. VI.2.1.

7° Les postulats de Bohr ne sont déduits d'aucun principe de physique classique et trouvent leur explication en mécanique quantique. Les états stationnaires des électrons, introduits par le premier postulat de Bohr, représentent des états stationnaires de mouvement des électrons dans le champ coulombien, obtenus de la solution de l'équation correspondante de Schrödinger (p. 745). La possibilité d'émission et d'absorption des quanta est liée aux transitions quantiques de l'électron d'un état stationnaire à l'autre

dans l'atome. La probabilité de ces transitions vient de la formule citée p. 769 et la fréquence est déterminée par la condition des fréquences (p. 768), qui coïncide avec l'exigence du troisième postulat de Bohr. La mécanique ondulatoire a permis de calculer les intensités des raies spectrales, ce que n'a pas pu faire la théorie de Bohr.

8° La notion d'*orbite électronique* dans l'atome, introduite par la théorie de Bohr, est conventionnelle, étant donné la nature ondulatoire de l'atome et les relations de Heisenberg, de même que la notion de trajectoire de la microparticule aux propriétés ondulatoires. Les électrons dans l'atome, en accord avec les propriétés générales de leurs fonctions d'onde (p. 743), se représentent sous forme de «nuages chargés» dont la densité de probabilité (p. 744) est maximale aux distances r du noyau, appelées rayons des «orbites». La distance moyenne entre l'électron et le noyau dans un système hydrogénoïde (pour $Z > 1$) pour l'état de l'électron caractérisé par les nombres quantiques n et l (p. 753) est:

$$r_{nl} = \frac{a_0}{2Z}[3n^2 - l(l+1)].$$

Cette formule est approchée, puisqu'elle ne tient pas compte de l'absence de symétrie sphérique des «orbites» avec $l \neq 0$. La grandeur $a_0 = 0{,}529 \cdot 10^{-8}$ cm est appelée rayon de la première orbite de Bohr dans l'atome d'hydrogène.

9° Lors de la recherche des termes spectraux des atomes à un seul électron de valence on admet que l'action des électrons des couches saturées sur l'électron de valence (périphérique) peut être remplacée par le *blindage* de la charge positive du noyau produit par ces couches. On considère le mouvement d'un électron de valence dans le champ de la région centrale (squelette) de l'atome, constituée du noyau et des couches électroniques saturées. Aux états de l'électron avec différentes valeurs de l correspondent, conformément à la mécanique quantique, des nuages électroniques de divers types de symétrie. Par exemple, pour $l = 0$ le «nuage» présente une symétrie sphérique. La forme de l'orbite (du point de vue de la mécanique quantique) dépend de la valeur du nombre quantique orbital l (p. 777). Quand $l = 0$, l'«orbite» tient la forme d'une circonférence, quand $l = 1, 2, 3, \ldots$ elle devient une ellipse d'autant plus allongée que plus grand est l (fig. VI.2.2). Les «orbites» avec $l = 1, 2, 3, \ldots$, pénétrant dans la région de l'espace par où passent les «orbites» des électrons des couches saturées, sont soumises à une interaction complémentaire avec les «orbites» du squelette atomique. Les niveaux énergétiques E_{nl} des atomes à un électron de valence sont calculés à l'aide de la formule approchée:

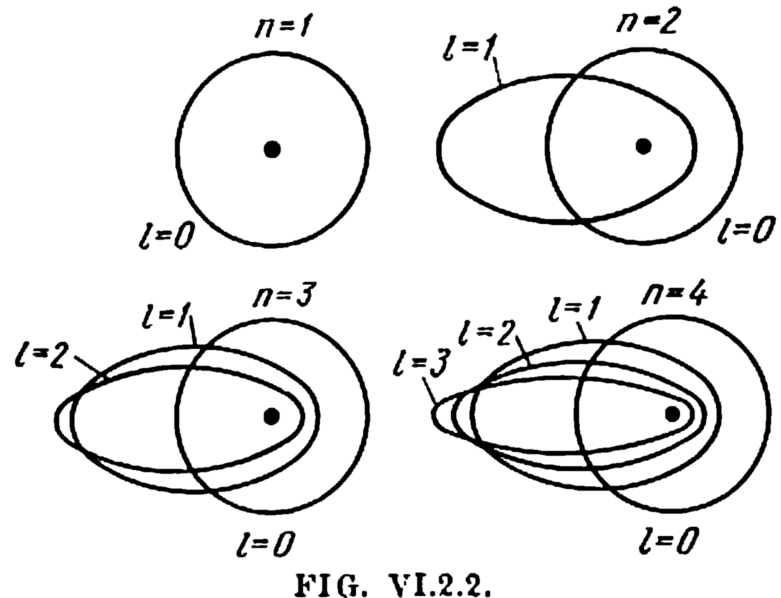


FIG. VI.2.2.

$$E_{nl} = -\frac{hRZ^{*2}}{(n-\Delta)^2},$$

où la *charge effective du noyau* est définie par

$$Z^* = Z - \sigma,$$

σ est la *constante de blindage*, qui augmente avec l'accroissement de Z, et

$$\Delta = \frac{3}{4}\,\frac{\alpha Z^{*2}}{a_0^3}\,\frac{1-\frac{l(l+1)}{3n^2}}{(l-{}^1/_2)l\,(l+{}^1/_2)\,(l+1)\,(l+{}^3/_2)}$$

est appelé *défaut quantique*; ici α est la polarisabilité de l'atome (p. 377), a_0 le premier rayon de Bohr de l'atome d'hydrogène, l les *nombres quantiques orbitaux* liés aux nombres quantiques principaux par la condition

$$l = n-1,\ n-2,\ \ldots,\ 0.$$

10° Les termes auxquels correspondent différents l sont désignés ainsi:

l	0	1	2	3	4
Terme	*s*	*p*	*d*	*f*	*g*

Les lettres *s*, *p*, *d*, *f*, *g* sont les initiales des désignations anglaises des séries spectrales des atomes ayant un seul électron dans la couche externe; *s* vient de *sharp (brusque)*, *p* de *principal (principale)*, *d*

de *diffuse (diffuse)*, *f* de *fundamental* (*fondamentale*), etc. Les *règles de sélection* (p. 770) pour le nombre quantique orbital sont:

$$\Delta l = \pm 1.$$

Les transitions ne sont possibles qu'entre les termes $T_{n,l}$ et $T_{m,l\pm1}$. Il est à noter qu'aux nombres m et n les règles de sélection n'imposent aucune limitation. Aussi seuls les termes s et p, les termes p et d, etc., peuvent-ils se combiner.

11° Tout terme peut être aussi bien initial que final pour la transition. Attendu que

$$|E_{n,l} - E_{m,\,l\pm1}| = |E_{m,l\pm1} - E_{n,l}|,$$

où $E_n \gtrless E_m$, les mêmes fréquences sont obtenues lors de la combinaison pour les spectres d'absorption ($E_m < E_n$) et pour les spectres d'émission ($E_m > E_n$). Dans le cas général, les conditions d'excitation des spectres d'absorption et d'émission étant différentes, les intensités des raies correspondantes des deux spectres ne sont pas égales.

12° On appelle *état excité* l'état dans lequel l'atome a une énergie plus élevée qu'à l'état fondamental (p. 774). Les spectres d'absorption correspondent aux passages de l'atome de l'état fondamental à un état excité, les spectres d'émission aux passages d'un état excité à l'état fondamental ou à un état moins excité. On évalue le degré d'excitation par la différence d'énergie entre les états excité et fondamental. Si en un certain état excité la durée de vie de l'atome est notable, cet état est dit *métastable* (p. 770).

13° L'existence d'états stationnaires excités dans les atomes est démontrée par les expériences de Franck et Hertz dans lesquelles le gaz était bombardé par des électrons d'énergie déterminée. Simultanément, dans ces expériences, étaient mesurées les pertes d'énergie subies par les électrons et observé le spectre luminescent du gaz produit par bombardement. Les expériences faites avec la vapeur de mercure ont démontré que les électrons d'énergie $E < 4{,}9$ eV ne provoquent pas la luminescence du gaz et sont réfléchis élastiquement par ses atomes. L'apparition d'électrons lents, pour $E \geqslant 4{,}9$ eV, indique que les électrons de $E = 4{,}9$ eV transmettent totalement leur énergie aux atomes de mercure. Il apparaît simultanément une raie spectrale de mercure avec $\lambda = 2\,537$ Å, dont la fréquence d'après la règle de Bohr correspond à la différence d'énergie des états excité et normal de l'atome de mercure, ce phénomène signifie que

l'atome de mercure, excité par choc électronique, retourne à l'état fondamental en émettant un quantum de longueur d'onde $\lambda =$ $= 2\,537$ Å.

14° En tenant compte du mouvement de l'électron et du noyau dans l'atome d'hydrogène par rapport à un centre d'inertie commun dans la formule des séries (p. 773), on doit comprendre sous m_e la masse réduite du système électron-noyau:

$$\mu = \frac{Mm_e}{m_e + M} = \frac{m_e}{1 + \frac{m_e}{M}},$$

où M est la masse du noyau, m_e la masse de l'électron. Lorsqu'on tient compte du mouvement dont est animé le noyau, la constante de Rydberg tient sa valeur minimale pour l'atome d'hydrogène, $R'_H = 109\,677{,}6$ cm^{-1}; pour $M = \infty$ elle atteint sa valeur limite $R'_\infty = 109\,737{,}3$ cm^{-1}.

Du fait de la différence des valeurs de R suivant les différents M dans les spectres a lieu l'*effet isotopique* (cf. p. 824) lié à l'existence de plusieurs isotopes d'un même élément chimique (p.832). Pour un mélange d'isotopes cet effet consiste en l'apparition de raies spectrales complémentaires aux raies correspondant aux atomes dont les noyaux appartiennent à l'isotope prédominant dans ce mélange. Les intensités de ces raies sont dans le même rapport que les taux des isotopes dans la substance, et les longueurs d'onde sont décalées l'une par rapport à l'autre pour les isotopes de masses M' et M'' de

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{m_e\,\Delta M}{M^2},$$

où $\Delta M = M'' - M'$ est la différence de masses des isotopes, M la masse moyenne. D'autre part,

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{R_1 - R_2}{R_1},$$

où R_1 et R_2 sont les constantes de Rydberg (p. 773) pour les deux isotopes.

15° Lors de l'interaction des muons négatifs (p. 898) avec la substance, les noyaux atomiques peuvent capturer les muons sur les orbites, formant avec ceux-ci des *atomes mésiques*. Le

comportement des muons dans les atomes diffère peu du comportement des électrons, à l'exception de la courte durée de vie des muons. Le rayon de l'orbite muonique dans l'atome mésique est approximativement 207 fois plus petit que le rayon de l'orbite électronique correspondante, puisque $m_{\mu^-}/m_e \approx 207$ (p. 898). C'est pourquoi les électrons atomiques n'exercent pas d'influence notable sur le mouvement du muon dans l'atome. Le faible rayon de l'orbite muonique et sa décroissance avec l'augmentation de la charge du noyau (p. 776) conduisent au fait que pour $Z \approx 30$ les muons peuvent pénétrer dans le noyau. Les dimensions et la structure du noyau ont donc une certaine influence sur les niveaux énergétiques du muon. Dans ce cas déjà le noyau ne peut plus être admis ponctuel, comme cela se fait lors de la résolution de l'équation de Schrödinger pour l'atome (p. 745).

16° Lors du ralentissement des positons (p. 898) il se forme parfois dans la substance un *positonium:* système constitué d'un positon et d'un électron en mouvement autour d'un centre d'inertie commun. Le positon ne peut être supposé immobile, vu que sa masse est égale à la masse de l'électron. Les rayons des orbites dans le positonium sont deux fois supérieurs aux rayons des orbites correspondantes dans l'atome d'hydrogène et l'énergie de liaison du positonium est deux fois plus faible que celle de l'atome d'hydrogène.

Suivant l'orientation des spins (p. 486) de l'électron et du positon on distingue deux états du positonium: l'orthopositonium pour les spins parallèles et le parapositonium pour les spins antiparallèles (cf. également p. 785). L'orthopositonium a une durée de vie moyenne de $1,4 \cdot 10^{-7}$ s et par annihilation de l'électron et du positon (p. 910) il se transforme en trois photons gamma en raison de la loi de la conservation de la quantité de mouvement et de l'existence de spin $\hbar$ (p. 725) dans le photon. Le parapositonium a une durée de vie moyenne de $1,25 \cdot 10^{-10}$ s et par annihilation il se transforme en deux photons gamma. Le niveau énergétique fondamental de l'orthopositonium (état triplet, p. 798) est situé à $0,84 \cdot 10^{-3}$ eV plus haut que le niveau fondamental du parapositonium (état singulet, p. 798). La transformation de l'orthopositonium en parapositonium devient possible à température ambiante lors de collisions du positonium avec des molécules ayant un nombre impair d'électrons et une faible distance entre les niveaux correspondant aux différentes orientations du spin résultant ($13,6 \cdot 10^{-3}$ eV pour les molécules NO par exemple).

2. Atomes multiélectroniques

1° On appelle *atomes multiélectroniques* les atomes avec deux électrons et plus. L'équation de Schrödinger (p. 745) pour les atomes multiélectroniques est

$$\sum_{i=1}^{N} \Delta_i\psi + \frac{2m}{\hbar^2}\left[E + \sum_{i=1}^{N}\frac{Ze^2}{r_i} - U\right]\psi = 0,$$

où $\Delta_i = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_i^2}$, r_i est la distance entre le i-ième électron et le noyau, $U = \frac{1}{2}\sum_{i\neq k}^{N}\frac{e^2}{r_{ik}}$ l'énergie potentielle d'interaction entre le i-ième électron et tous les électrons restants; pour un atome neutre $N = Z$; Ze^2/r_i est l'énergie potentielle d'interaction du i-ième électron avec le noyau, E l'énergie totale de l'atome (les autres symboles tiennent la signification donnée p. 745).

2° L'équation de Schrödinger pour un atome multiélectronique ne peut être résoute que par des méthodes approximatives, en premier lieu par les méthodes de la théorie des perturbations. Cette résolution est fondée sur la représentation de l'énergie d'interaction entre électrons U comme une faible perturbation en comparaison avec l'énergie d'interaction des électrons avec le noyau. On obtient en tant qu'approximation zéro les valeurs propres de E_n et les fonctions propres ψ_n relatives à la solution $U = 0$:

$$E_n = \sum_{i=1}^{N} E_{ni}, \qquad \psi_n = \prod_{i=1}^{N} \psi_{ni};$$

le signe $\prod_{i=1}^{N}$ signifie le produit de N fonctions d'onde ψ_{ni}. La résolution de l'équation de Schrödinger par les méthodes de la théorie des perturbations n'est pratiquement possible que pour de faibles valeurs de N.

3° Avec l'augmentation de N même la résolution approchée de l'équation de Schrödinger par la méthode de la théorie des perturbations devient difficile. En approximation du champ central de l'atome, on utilise principalement deux méthodes: la méthode de Hartree et la méthode de Thomas-Fermi.

La *méthode de Hartree* est fondée sur la substitution au champ électrique du noyau et à tous les électrons de l'atome, excepté

un quelconque mis à part, d'un certain *champ self-consistent* constant dans le temps, dans lequel se meut l'électron choisi. L'introduction du potentiel de ce champ dans l'équation de Schrödinger permet de trouver pour chaque électron mis à part les valeurs des nombres quantiques n et l et, donc, les états énergétiques des électrons. La méthode de Hartree est rendue plus précise en tenant compte des effets d'échange quantiques *(méthode de Hartree-Fock)*.

La *méthode de Thomas-Fermi* est basée sur le *modèle statistique de l'atome* dans lequel on suppose la distribution continue des charges électriques dans l'atome ayant une densité de charge satisfaisant à l'équation de Poisson (p. 369) pour le potentiel du champ électrique. La densité de charge est calculée indépendamment, à l'aide de la statistique quantique (p. 235) et compte tenu du principe de Pauli (p. 796).

La méthode de Thomas-Fermi est applicable aussi bien à un atome qu'à un ion, mais dans chacun de ces deux cas le potentiel à la limite (de l'atome ou de l'ion) doit être donné d'une façon différente.

Dans le cas d'un atome neutre pour la fonction $\varphi(x)$ liée au potentiel $V(x)$

$$V(x) = \frac{Ze}{r}\,\varphi(x), \quad \text{où} \quad x = \frac{r}{\mu} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{0{,}885\ a_0}{Z^{1/3}}$$

on tire de la théorie statistique de l'atome l'*équation de Thomas-Fermi*

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\varphi^{3/2}}{\sqrt{x}}\ ;$$

ici r est la distance entre le noyau et l'atome, a_0 le premier rayon de Bohr de l'atome d'hydrogène, Ze la charge du noyau. L'équation de Thomas-Fermi décrit très bien la distribution des électrons dans les atomes lourds.

4° L'équation de Schrödinger pour $N = 2$ (atome d'hélium) est la suivante:

$$\Delta_1\Psi + \Delta_2\Psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2}\left(E + \frac{Ze^2}{r_1} + \frac{Ze^2}{r_2} - \frac{e^2}{r_{12}}\right)\Psi = 0,$$

où Δ_1 et Δ_2 sont les opérateurs de Laplace, E l'énergie totale de l'atome, Ze^2/r_1 et Ze^2/r_2 les énergies potentielles d'interaction de chacun des électrons avec le noyau, r_{12} la distance interélectronique, e^2/r_{12} l'énergie d'interaction des électrons.

Les niveaux énergétiques et les fonctions propres en approximation zéro, dans laquelle on néglige l'interaction des électrons, sont:

$$E = E_{n_1} + E_{n_2}, \quad \Psi_n = \psi_{n_1} \psi_{n_2},$$

où $E_n = -2\pi^2 me^4 Z^2/hn^2$ et ψ_n la fonction d'onde hydrogénoïde de l'électron (p. 753).

En première approximation de la théorie des perturbations, l'état normal de l'atome d'hélium est calculé en tenant compte de l'énergie de répulsion réciproque des électrons, décrits par les fonctions d'onde relatives à un état normal de type hydrogénoïde. L'énergie totale relative à l'état fondamental d'un système à deux électrons en approximation zéro est:

$$E_0 = 2\,Z^2 E_{\mathrm{H}}.$$

En première approximation:

$$E_1 = \left(2\,Z^2 - \frac{5}{4}\,Z\right) E_{\mathrm{H}},$$

où E_{H} est l'énergie de l'atome d'hydrogène à l'état normal.

5° Lors de la résolution du problème sur un état arbitraire des électrons dans l'atome d'hélium, on doit prendre en considération l'indiscernabilité des électrons (p. 236). Les deux électrons de l'hélium étant indiscernables, les fonctions propres tiennent deux formes:

$$\Psi = \psi_{n_1}(1)\,\psi_{n_2}(2) \quad \text{et} \quad \Psi = \psi_{n_1}(2)\,\psi_{n_2}(1),$$

où les chiffres entre parenthèses indiquent le numéro de l'électron. Pour autant que l'énergie E_n correspondant à ces deux cas est la même, Ψ décrit un état doublement dégénéré. La dégénérescence des niveaux énergétiques liée à l'indiscernabilité des électrons atomiques (et, en général, de n'importe quelles microparticules identiques) est appelée *dégénérescence d'échange*. Elle est typique des systèmes quantiques.

6° La solution générale de l'équation de Schrödinger pour l'atome d'hélium peut être représentée sous forme de combinaison linéaire (somme ou différence) de ses solutions particulières:

$$\Psi_A = \psi_{n_1}(1)\,\psi_{n_2}(2) - \psi_{n_1}(2)\,\psi_{n_2}(1)$$

ou bien:

$$\Psi_S = \psi_{n_1}(1)\,\psi_{n_2}(2) + \psi_{n_1}(2)\,\psi_{n_2}(1).$$

La fonction d'onde Ψ_A change de signe lors de la permutation des chiffres (des électrons) *1* et *2* et est dite *antisymétrique*. La fonction d'onde Ψ_S dans ce cas ne change pas de signe et est dite *symétrique*.

7° Il se produit, lorsqu'on tient compte de la perturbation e^2/r_{12}, c'est-à-dire de la répulsion réciproque des électrons, la levée de la dégénérescence d'échange, et l'état doublement dégénéré se décompose en deux états d'énergies E_S et E_A. L'énergie moyenne de perturbation ΔE, conditionnée par l'interaction des deux électrons dans l'atome d'hélium:

$$\Delta E = \int\int |\Psi|^2 \frac{e^2}{r_{12}} dV_1 dV_2,$$

la fonction d'onde étant normée (p. 746)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int |\Psi|^2 dV_1 dV_2 = 1,$$

est exprimée par des fonctions d'onde symétrique et antisymétrique:

$$\Delta E = \int\int |\Psi|^2 \frac{e^2}{r_{12}} dV_1 dV_2 \Big/ \int\int |\Psi|^2 dV_1 dV_2 = C \pm A,$$

où

$$|\Psi|^2 = \{ |\psi_{n_1}(1)|^2 |\psi_{n_2}(2)|^2 \pm \psi_{n_1}(1) \psi_{n_2}(1) \psi^*_{n_1}(2) \psi^*_{n_2}(2) \}.$$

La première intégrale au dénominateur est égale à 1 du fait de la normalisation des fonctions d'onde, la seconde à 0 en vertu de leur orthogonalité. Le premier terme de l'intégrale au numérateur correspond à l'interaction coulombienne des électrons, représentant le produit des densités de probabilité pour chacun des électrons; on l'appelle *intégrale coulombienne*. Le second terme n'a pas son analogue en physique classique et est lié à l'interaction d'échange des électrons due à leur indiscernabilité; on l'appelle *intégrale d'échange* (cf. également p. 809).

8° L'existence du spin (p. 486) en tant que nouvelle variable indépendante, décrivant l'état des microparticules, conduit au caractère plus compliqué des fonctions d'onde. Compte tenu du spin on les écrit sous la forme

$$\Psi = \Psi\left(x,\ y,\ z,\ \pm\frac{\hbar}{2},\ t\right),\quad \text{où}\ \hbar = \frac{h}{2\pi}.$$

Généralement on met en facteur la *fonction d'onde de spin* S_α (p_s) dans l'expression de Ψ:

$$\Psi = \psi(x, y, z, t) S_\alpha(p_s),$$

où l'indice $\alpha = \pm 1/2$ et $p_s = \pm \hbar/2$ (p. 486). L'argument de cette fonction a seulement deux valeurs, la fonction elle-même est déterminée de la manière suivante:

$$S_\alpha(p_s) = \begin{cases} 1, \text{ si } \alpha = \pm 1/2 \text{ lorsque } p_s = \pm \hbar/2, \\ 0, \text{ si } \alpha = \pm 1/2 \text{ lorsque } p_s = \pm \hbar/2. \end{cases}$$

La fonction du spin jouit de propriétés de symétrie déterminées. Pour un système à deux électrons 4 fonctions de spin sont possibles:

$$S_S = S_\alpha(1) S_\alpha(2),$$
$$S_S = S_\beta(1) S_\beta(2),$$
$$S_S = S_\alpha(1) S_\beta(2) + S_\alpha(2) S_\beta(1),$$
$$S_A = S_\alpha(1) S_\beta(2) - S_\alpha(2) S_\beta(1),$$

où les indices α et β correspondent aux spins des électrons égaux à $+\hbar/2$ et $-\hbar/2$ et les chiffres désignent le «numéro» des électrons. Les trois premières fonctions sont symétriques et appartiennent à un *état ortho* triplement dégénéré de l'atome se caractérisant par le spin total $S = 1$ (en unités de $\hbar$, p. 785); la dernière fonction est antisymétrique et appartient à un *état para* de spin total $S = 0$ (en unités de $\hbar$).

En accord avec le principe de Pauli (p. 796) les fonctions d'onde complètes correspondant aux systèmes à deux électrons doivent être antisymétriques: $\Psi_A = \psi_S S_A$ (ou $\Psi_A = \psi_A S_S$).

3. Modèle vectoriel de l'atome

1° Pour systématiser les spectres d'atomes multiélectroniques et étudier la structure fine des spectres (p. 788), on utilise le *modèle vectoriel de l'atome.* Dans ce modèle, le moment correspondant au mouvement orbital de chaque électron se représente par un vecteur **l**, le moment correspondant au spin de l'électron par un vecteur **s**.

Les projections des vecteurs **l** et **s** sur une certaine direction (coïncidant avec la direction du champ magnétique extérieur) sont quantifiées et acceptent des valeurs multiples de $\hbar$. Ce fait

est appelé *quantification spatiale* des moments orbital et de spin de l'électron dans l'atome.

La projection du vecteur **l** prend les valeurs (en unités de $\hbar$) l, $l-1$, ..., 0, ..., $-l$, c'est-à-dire en tout $2l+1$ valeurs; la projection du vecteur **s** prend les valeurs $+^1/_2$ et $-^1/_2$ (en unités de $\hbar$). Les modules des vecteurs **l** et **s** sont égaux à $|\mathbf{l}| = \sqrt{l(l+1)}\,\hbar$ et $|\mathbf{s}| = (\sqrt{^3/_2})\,\hbar$.

La somme $\mathbf{j} = \mathbf{l} + \mathbf{s}$, où $|\mathbf{j}| = \sqrt{j(j+1)}\,\hbar$, est appelée *vecteur total du moment cinétique de l'électron*; j est le *nombre quantique interne*, les grandeurs l et s, *nombres quantiques orbital* et *de spin* respectivement.

2° Dans un atome (un ion) à deux électrons et plus les moments orbitaux et de spin de tous ses électrons peuvent se composer suivant deux modes différents. Le premier mode est effectué lorsque l'interaction des moments orbitaux $\mathbf{l}_i$ et $\mathbf{l}_k$ des électrons, ainsi que des moments de spin $\mathbf{s}_i$ et $\mathbf{s}_k$ est plus forte que l'interaction des moments $\mathbf{l}_i$ et $\mathbf{s}_i$. Le couplage des moments orbital et de spin dans ce cas est dit *couplage Russell-Saunders* ou couplage *l-s*. Il est plus fréquent dans les atomes légers. Les vecteurs moments orbital et de spin des électrons s'ajoutent séparément dans ce cas formant le vecteur *moment orbital résultant de l'atome* (fig. VI.2.3):

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{l}_i, \quad |\mathbf{L}| = \sqrt{L(L+1)}\,\hbar$$

et le vecteur *moment de spin résultant de l'atome:*

$$\mathbf{S} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{s}_i, \quad |\mathbf{S}| = \sqrt{S(S+1)}\,\hbar,$$

où N est le nombre d'électrons dans l'atome. Les deux moments totaux se composent en un *moment total résultant de l'atome:*

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}, \quad |\mathbf{J}| = \sqrt{J(J+1)}\,\hbar.$$

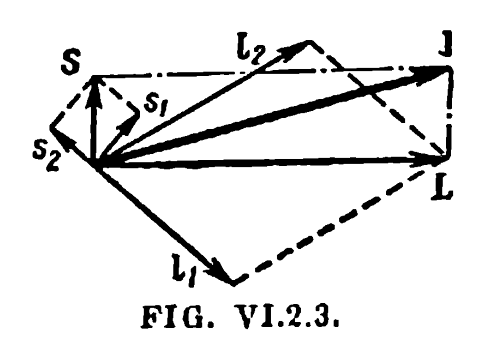


FIG. VI.2.3.

La grandeur J du vecteur **J**, exprimée en unités de $\hbar$, est le *nombre quantique interne total* de l'atome, les grandeurs L et S sont respectivement les *nombres quantiques orbital total* et *de spin total de l'atome*. Vu la possibilité de l'orientation

différente des vecteurs **L** et **S**, le nombre quantique J accepte les valeurs suivantes:

$$J = L + S,\ L + S - 1,\ \dots,\ |L - S|,$$

autrement dit, J admet $2S + 1$ valeurs pour $L \geqslant S$ et $2L + 1$ valeurs pour $L \leqslant S$. A la composition géométrique des vecteurs **L** et **S** répond la somme algébrique de L et S.

3° Le deuxième mode de composition des moments orbitaux et de spin des électrons atomiques est effectué quand l'interaction de $\mathbf{l}_i$ avec $\mathbf{s}_i$ pour chacun des électrons est plus forte que l'interaction séparée des moments orbitaux et de spin de différents électrons. Le couplage des moments dans ce cas est dit *couplage j-j*. Ce couplage a lieu essentiellement dans les atomes lourds. Les vecteurs moments orbital et de spin de chaque électron de l'atome se composent en donnant le vecteur moment total de l'électron (fig. VI.2.4):

$$\mathbf{j}_i = \mathbf{l}_i + \mathbf{s}_i.$$

Le moment total résultant de l'atome se compose des moments totaux de chacun des électrons:

$$\mathbf{J} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{j}_i,\quad |\mathbf{J}| = \sqrt{J(J+1)}\,\hbar.$$

4° Le moment orbital résultant d'un atome à deux électrons extérieurs lors du couplage faible représente:

$\mathbf{L} = \mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2$, c'est-à-dire $L = l_1 + l_2,\ l_1 + l_2 - 1,\ \dots,\ |l_1 - l_2|$;

la valeur maximale de L répond à l'orientation parallèle et la valeur minimale, à l'orientation antiparallèle des moments orbitaux des deux électrons extérieurs dans le modèle vectoriel. Le moment de spin résultant est:

$$\mathbf{S} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2,\ \text{c'est-à-dire}\ S = s_1 \pm s_2 = 1\ \text{ou}\ 0,$$

selon l'orientation parallèle ou antiparallèle des moments de spin.

5° La grandeur $2S + 1$ est appelée *multiplicité du terme spectral* (p.774). Elle montre en combien de composantes est décomposé chaque terme spectral par interaction des moments de spin et orbitaux de l'a-

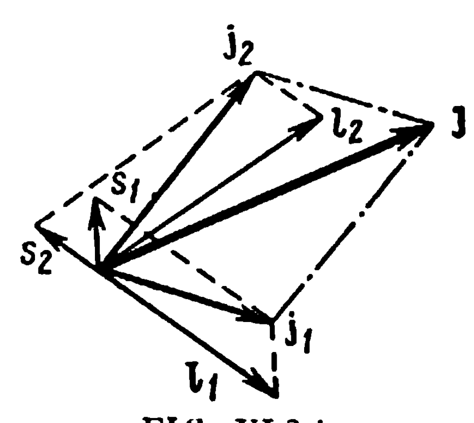


FIG. VI.2.4.

tome *(interaction spin-orbitale)*, complémentaire à l'interaction coulombienne (des électrons avec le noyau et l'un avec l'autre). Ce phénomène fait apparaître la *structure fine des raies spectrales.*

Conformément aux deux valeurs de S pour un atome à deux électrons extérieurs, on obtient deux sortes de multiplets:

singulets (termes spectraux simples) quand $S = 0$,

triplets (termes spectraux triples) quand $S = 1$.

La multiplicité du terme spectral $2S + 1$ coïncide avec la *multiplicité du système* auquel appartient le terme spectral donné dans le seul cas où $L \geqslant S$.

Optiquement permises sont les transitions quantiques (p. 767) entre les termes à S identiques, autrement dit, quand $\Delta S = 0$, et *optiquement interdites*, les transitions entre les termes à différents S *(interdiction intercombinatoire)*.

6° Pour caractériser les termes spectraux d'un atome multiélectronique, on accepte la désignation suivante:

$$(n_1 l_1)^{k_1} (n_2 l_2)^{k_2} \ldots {}^{2S+1}L_j,$$

où sont indiquées en premier les *configurations électroniques* de l'atome correspondant à son terme spectral donné, c'est-à-dire les nombres d'électrons k_1, k_2... dans les états avec les nombres quantiques principal et orbital donnés d'électrons n_i l_i; on indique également la multiplicité du terme spectral $2S + 1$, la désignation du terme L de l'atome et la valeur du nombre quantique total de l'atome J. Pour désigner les grandeurs caractérisant l'état de l'atome, on utilise des symboles en majuscule, pour désigner les électrons isolés, des symboles en minuscule.

7° L'interaction des moments magnétiques des électrons et du noyau atomique provoque l'apparition de la *structure hyperfine* des termes spectraux. Le moment magnétique du noyau, composé des moments magnétiques des nucléons constituant le noyau (p. 832) est de l'ordre de grandeur du magnéton nucléaire (p. 838) $\mu_{noy} = \frac{e\hbar}{2cM_p}$, où M_p est la masse du proton (p. 898). Vu la petitesse du magnéton nucléaire en comparaison du magnéton de Bohr (p. 486), la structure hyperfine des raies spectrales est caractérisée par leur décomposition en raies mille fois plus petites que celles de la structure fine.

L'interaction magnétique des électrons et du noyau, de même que l'interaction des électrons dans le modèle vectoriel de l'atome, est exprimée à l'aide du vecteur moment nucléaire **I** (du spin):

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{J}, \quad |\mathbf{F}| = \sqrt{F(F+1)}\,\hbar,$$

où **J** est le vecteur moment cinétique total résultant des électrons de l'atome, **F** le vecteur moment cinétique total de l'atome (y compris son noyau). Le nombre quantique F correspondant à **F** peut accepter les valeurs (pour un J fixe)

$$F = J + I, \quad J + I - 1, \ldots, |J - I|.$$

La systématisation des raies spectrales de la structure hyperfine ne diffère pas de celle acceptée pour la structure fine dans le cas d'un couplage *l-s*.

En ce qui concerne le modèle vectoriel d'une molécule, cf. p. 812.

4. Effet Zeeman et phénomènes de résonance

1° On appelle *effet Zeeman* la décomposition des niveaux énergétiques et des raies spectrales de la substance rayonnante soumise à l'action d'un champ magnétique extérieur. On distingue les effets Zeeman: *normal* et *anormal*, ainsi que *longitudinal* et *transversal*. L'effet longitudinal est observé dans la direction du champ magnétique, l'effet transversal, dans les directions perpendiculaires à celle du champ magnétique.

2° Dans l'effet Zeeman longitudinal normal chaque raie spectrale se dédouble en deux composantes (*doublet normal de Zeeman*) de fréquences $\nu \pm \Delta\nu$, où ν est la fréquence de la raie en l'absence du champ magnétique. Dans l'effet Zeeman normal transversal on observe, en plus du doublet indiqué, une raie non décalée, c'est-à-dire en tout trois raies *(triplet normal de Zeeman)* de fréquences ν, $\nu \pm \Delta\nu$. Dans l'effet longitudinal la raie de $\nu - \Delta\nu$ possède une polarisation circulaire lévogyre (p. 593), la raie de $\nu + \Delta\nu$, une polarisation circulaire dextrogyre. Dans l'effet transversal aux deux composantes décalées correspond un plan de polarisation (p. 593) parallèle à la direction du champ magnétique extérieur (*composantes* σ), à la raie non décalée, un plan de polarisation perpendiculaire à cette direction (*composante* π). Dans l'effet longitudinal la raie de fréquence $\nu - \Delta\nu$ est dite *rouge*, la raie de fréquence $\nu + \Delta\nu$ *violette* (fig. VI.2.5).

3° L'effet Zeeman observé dans les spectres d'absorption est dit *inverse*. Les lois de l'effet Zeeman inverse sont analogues à celles de l'effet Zeeman direct. Les fréquences des composantes étant proches de la fréquence de la raie fondamentale, il y a dans le milieu dispersant une dispersion de l'indice de réfraction, et ce der-

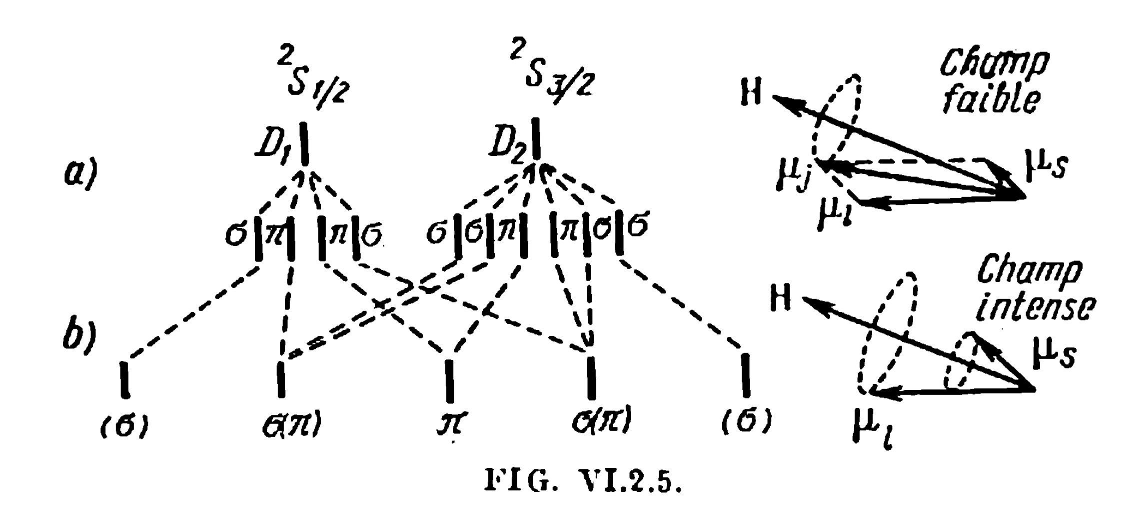


FIG. VI.2.5.

nier admet pour la raie rouge de l'effet longitudinal une valeur autre que pour la raie violette. Ces deux raies étant polarisées circulairement avec le signe contraire, lors de la propagation de la lumière de ces fréquences dans une substance il se produit un retard de phase de l'une d'elles sur l'autre, autrement dit, la rotation du plan de polarisation (p. 697, 5°).

4° En théorie classique de l'effet Zeeman normal, le mouvement de l'électron dans l'atome est considéré comme l'oscillation harmonique d'un oscillateur harmonique linéaire (p. 748).

Toute oscillation polarisée rectilignement de l'électron peut être décomposée en deux oscillations: l'une se produisant le long du champ magnétique, l'autre dans le plan perpendiculaire à la direction de ce champ. Cette dernière peut être dédoublée en deux oscillations polarisées circulairement avec des directions contraires de rotation et ayant la fréquence de précession de Larmor (p. 488). Pour l'oscillation circulaire dont la direction coïncide avec la direction de la précession, la fréquence des oscillations de l'électron émetteur est $\nu + \Delta\nu$ (raie violette), alors que pour l'oscillation ayant une direction de rotation contraire la fréquence est $\nu - \Delta\nu$ (raie rouge). Le long du champ magnétique, l'oscillation polarisée rectilignement de l'électron coïncidant avec la direction du champ ne donne pas de rayonnement, car l'oscillateur harmonique ne rayonne pas le long de son axe (p. 599). De la sorte, dans l'effet Zeeman longitudinal on observe seulement deux oscillations polarisées circulairement et décalées par rapport à la fréquence initiale de $\Delta\nu$. Dans l'effet Zeeman transversal toutes les trois oscillations donnent naissance à des rayonnements polarisés rectilignement de fréquences ν et $\nu \pm \Delta\nu$.

L'intervalle $\Delta\nu$ entre les raies dans l'effet Zeeman normal coïncide avec la fréquence de Larmor:

$$\Delta\nu = \frac{\mu_0 eH}{4\pi m} \quad \text{(en u. SI)},$$

$$\Delta\nu = \frac{1}{4\pi}\frac{eH}{mc} \quad \text{(en u. du système de Gauss)},$$

où e et m sont la charge et la masse de l'électron, H le champ magnétique. La grandeur $\Delta\nu$ est habituellement très petite; $\frac{\Delta\nu}{\nu} \sim$ $\sim 10^{-5}$ quand $H \sim 10^6 \frac{\text{A}}{\text{m}}$. L'effet Zeeman ne peut être observé qu'à l'aide d'appareils avec un pouvoir séparateur élevé (p. 672).

5° L'effet Zeeman normal n'est observé que dans des champs magnétiques intenses. Dans les champs magnétiques faibles c'est l'effet Zeeman anormal qui a lieu. Dans cet effet la décomposition des raies est beaucoup plus complexe que dans l'effet normal. Dans l'effet anormal le nombre de composantes des raies dépasse notablement leur nombre dans l'effet normal et la distribution de l'intensité dans le système de composantes *(multiplet de Zeeman)* se trouve être très complexe. Les intervalles entre les composantes des raies sont déterminés comme auparavant par la valeur du champ magnétique H. La figure VI.2.5. montre les raies correspondant au doublet du sodium dans le cas des effets Zeeman anormal (a) et normal (b), ainsi que la transition du premier au second. La transition de l'effet Zeeman normal à l'effet Zeeman anormal lors de l'augmentation de l'intensité du champ magnétique extérieur est dit *effet Paschen-Back*.

6° La théorie classique ne donne pas d'explication à l'effet Zeeman anormal. La théorie quantique de l'effet Zeeman (normal et anormal) considère celui-ci comme conséquence de la variation des niveaux énergétiques des électrons atomiques par interaction de leurs moments de spin et orbital entre eux et avec le champ magnétique extérieur (couplage j-j, p. 787). Pour décrire cette interaction, on fait appel au modèle vectoriel de l'atome (p. 785) et l'on distingue deux cas: celui d'un champ magnétique intense et celui d'un champ magnétique faible.

7° On appelle *champ magnétique faible* le champ d'intensité H provoquant la décomposition $\mu_0\mu_B H$ des niveaux dans l'effet Zeeman normal et vérifiant la condition:

$$\mu_0\mu_B H \ll |E_i - E_j| \quad \text{(en u. SI)},$$

où μ_B est le magnéton de Bohr (p. 486), E_i et E_j les énergies de deux niveaux voisins en l'absence de champ magnétique. La condition à laquelle satisfait le champ intense dans l'effet Zeeman est la suivante:

$$\mu_0 \mu_B H \gg |E_i - E_j| \qquad \text{(en u. SI).}$$

Dans un champ magnétique faible l'interaction du moment magnétique orbital avec le moment de spin est plus forte que l'interaction de chacun d'eux avec le champ (voir fig. VI.2.5). Cette dernière est considérée comme une faible perturbation, provoquant la variation de l'énergie ΔE de l'atome dans le champ magnétique H:

$$\Delta E = g m \mu_B \mu_0 H \qquad \text{(en u. SI),}$$

où m est le *nombre quantique magnétique*, μ_B le magnéton de Bohr (p. 486), g le *facteur de Landé pour le dédoublement:*

$$g = 1 + \frac{J(J+1) - L(L+1) + S(S+1)}{2J(J+1)}$$

(cf. les notations p. 787). En l'absence de spin ($S = 0$, $J = L$), on a $g = 1$; si $L = 0$, on a $g = 2$. Le nombre de composantes du multiplet dépend des valeurs numériques de L et S.

La valeur du dédoublement des raies dans l'effet Zeeman anormal est donnée par

$$\Delta\nu = (m_1 g_1 - m_2 g_2)\nu_L,$$

où m_1 et m_2 sont les nombres quantiques magnétiques, g_1 et g_2 les facteurs de Landé, $\nu_L = \mu_0 eH/4\pi m$ la fréquence de Larmor. Pour la lumière polarisée rectilignement en direction parallèle au vecteur $\mathbf{H}$, $m_1 = m_2$; pour la lumière polarisée circulairement, en direction perpendiculaire à $\mathbf{H}$, $m_1 = m_2 \pm 1$.

8° Dans un *champ magnétique intense* l'interaction des moments orbital et de spin de l'électron n'existe plus, et chacun de ces moments interagit séparément avec le champ magnétique. Avec l'accroissement de l'intensité du champ la décomposition des raies augmente tant que ne se confondent pas les composantes des multiplets de raies spectrales voisines. En définitive, de toutes les composantes des multiplets seules restent trois raies (pour l'effet Zeeman transversal) ou deux raies (pour l'effet Zeeman longitudinal) de fréquences

$$\nu = \nu_0 + \frac{\mu_0 eH}{4\pi m}(m_1 - m_2) \qquad \text{(en u. SI),}$$

où ν_0 est la fréquence de la raie non décalée, $\mu_0\, eH/4\pi m$ la fréquence de Larmor, m_1 et m_2 les nombres quantiques magnétiques. Ces derniers obéissent à la règle de sélection:

$$m_1 - m_2 = \pm 1, \quad 0,$$

donnant le triplet de Zeeman. Dans les champs intenses les résultats des calculs classique et quantique de l'effet Zeeman coïncident.

9° L'existence du spin fait que chaque niveau énergétique de l'électron dans l'atome est doublement dégénéré. L'introduction d'un champ magnétique élimine cette dégénérescence, et chaque raie spectrale se dédouble en deux raies *(doublet de spin)* au minimum.

10° On appelle ***résonance paramagnétique électronique*** l'absorption sélective du rayonnement électromagnétique par la substance, liée aux transitions de ses électrons atomiques entre les niveaux énergétiques de Zeeman, qui surgissent lorsqu'on introduit la substance dans un champ magnétique constant. Pour les transitions obéissant à la règle de sélection suivant le nombre quantique magnétique (8°) $\Delta m = \pm 1$, la fréquence de résonance est égale à

$$\nu_{\text{R.P.E.}} = \frac{g\mu_B\mu_0 H}{h} \quad \text{(en u. SI)},$$

où g est le facteur de Landé (7°) égal à 2 pour les électrons libres (les électrons de conduction dans les métaux), μ_B le magnéton de Bohr, H le champ magnétique constant appliqué à la substance, h la constante de Planck.

11° Généralement, le champ magnétique appliqué à la substance est suffisamment intense pour éliminer la dégénérescence de spin des sous-niveaux magnétiques (9°). En même temps on applique à la substance un champ électromagnétique faible (dont le vecteur magnétique est perpendiculaire au vecteur du champ magnétique constant) provoquant les transitions.

La valeur de $\nu_{\text{R.P.E.}}$ pour $H \sim 10^{10}\,\frac{\text{A}}{\text{m}}$ est de l'ordre de 10^3 MHz et exige pour son observation l'utilisation des appareilles de mesure radio (dans la gamme d'ondes centimétriques).

12° La forme et l'intensité des raies, observées en résonance paramagnétique électronique, dépendent de l'interaction des spins des électrons atomiques entre eux et avec le réseau du solide.

L'*interaction spin-spin* des atomes est due à la présence d'un moment magnétique de spin total de l'atome (p. 786) non nul. Dans le cas général, elle s'ajoute à l'interaction des atomes avec le champ magnétique extérieur conduisant à l'élargissement des raies de résonance. Cette interaction diminue rapidement avec l'augmentation

de la distance interatomique et peut être rendue insignifiante si l'on dissout la substance paramagnétique dans des solvants non magnétiques.

13° L'*interaction spin-réseau* est due au fait que le moment magnétique orbital de l'atome, lié par couplage L-S (p. 785) au moment de spin de l'atome, est, de plus, lié au moyen de forces électriques au champ intercristallin (le spin, lui, n'interagit pas immédiatement avec le réseau). Cette interaction fait que les spins des atomes s'orientent graduellement et non instantanément dans la direction du champ magnétique extérieur. Ce phénomène est appelé *relaxation spin-réseau* et est caractérisé par la période τ, liée à l'énergie de transition de l'atome par les relations d'incertitude de Heisenberg (p. 747). Le passage de l'atome à un niveau de Zeeman plus élevé (absorption) ou à un niveau de Zeeman plus bas (rayonnement) a lieu non avant que les atomes voisins puissent céder ou gagner un quantum d'énergie $h\nu_{\text{R.P.E.}} = \Delta E$.

Si la relaxation spin-réseau est réalisée par échange de phonons (p. 286) avec le réseau, le temps de relaxation pour les systèmes hydrogénoïdes (ayant un nombre quantique de spin total $S = 1/2$, p. 786) est:

$$\tau \sim \frac{C}{H^4 T^1}.$$

Cette formule est vraie pour $T > \Theta_D$, où Θ_D est la température de Debye du cristal (p. 288).

Si la relaxation spin-réseau est réalisée par diffusion des ondes acoustiques par les atomes dans le réseau, alors

$$\tau \sim \frac{C}{H^4 T^7}.$$

Cette formule est vraie généralement pour $T \ll \Theta_D$. Ici τ est la période de relaxation, H le champ magnétique, C le facteur qui dépend de la force du couplage j-j (p. 787) et de la décomposition des niveaux orbitaux dans le champ intercristallin, T la température absolue de la substance. Ces formules sont justes si l'on néglige l'interaction spin-spin.

14° La résonance électronique dans les substances ferromagnétiques dépend, en plus des facteurs énumérés ci-dessus, de la présence de champs démagnétisants. Dans le cas général, la fréquence de résonance pour la transition avec $\Delta m = \pm 1$ est:

$$\nu_{\text{R.F.E.}} = \frac{g\mu_B}{h}\sqrt{[H_z + (N_y - N_z)\,I_z]\,[H_z + (N_x - N_z)\,I_z]},$$

où N_x, N_y, N_z sont les facteurs démagnétisants pour les axes des x, y, z; I_z l'aimantation de l'échantillon dans la direction du champ

magnétique appliqué H_z. On suppose que la composante magnétique du champ électromagnétique à haute fréquence est dirigée le long de l'axe des x, et aussi que l'échantillon est magnétisé uniformément et que le facteur de Landé g est le même dans tout l'échantillon.

Si le champ magnétique constant et la composante magnétique du champ oscillant sont parallèles à la surface plane de l'échantillon, on a:

$$\nu_{\text{R.F.E.}} = \frac{g\mu_{\text{B}}}{h}\sqrt{BH},$$

où B est l'induction du champ magnétique dans l'échantillon. Si le champ magnétique est perpendiculaire, et le champ oscillant parallèle à la surface plane de l'échantillon, alors

$$\nu_{\text{R.F.E.}} = \frac{g\mu_{\text{B}}}{h}(H - 4\pi I),$$

où I est l'aimantation de l'échantillon.

Pour de petits échantillons sphériques

$$\nu_{\text{R.F.E.}} = \frac{g\mu_{\text{B}}}{h}H.$$

Pour de longs cylindres, quand le champ magnétique constant est dirigé suivant l'axe du cylindre et la composante magnétique du champ à haute fréquence est perpendiculaire à cet axe

$$\nu_{\text{R.F.E.}} = \frac{g\mu_{\text{B}}}{h}(H + 2\pi I).$$

Ces relations sont justes à condition que la profondeur de pénétration du champ à haute fréquence dans l'échantillon à la fréquence de résonance (profondeur de la couche de l'effet pelliculaire, p. 781) soit comparable aux dimensions de l'échantillon. Les formules citées ci-avant (14°) sont données en u. du système de Gauss.

5. Effet Stark dans les systèmes hydrogénoïdes

1° On appelle *effet Stark* la décomposition des raies spectrales de la substance rayonnante soumise à l'action d'un champ électrique extérieur. Les champs électriques extérieurs, même très intenses, étant faibles par comparaison avec les champs intraatomiques, leur action sur le mouvement des électrons atomiques peut être considérée comme une faible perturbation. Ceci étant, la décomposition des raies par effet Stark est insignifiante et il faut pour l'observer des appareils d'un pouvoir séparateur élevé. Les raies se décompo-

sent en une série de composantes *(satellites)* qui, dans le cas de l'hydrogène, sont disposées symétriquement de part et d'autre de la raie fondamentale.

2° En première approximation de la théorie des perturbations (p. 767), dans l'hydrogène et les systèmes hydrogénoïdes a lieu l'effet Stark linéaire, qui élimine partiellement la dégénérescence des niveaux de l'unique électron de l'atome (p. 752). La décomposition (en u. du système de Gauss) est donnée par

$$\Delta \nu_1 = \frac{3}{8\pi^2} \frac{h}{me Z} (n_1 - n_2) n\mathcal{E},$$

où $\mathcal{E}$ est le champ électrique uniforme, n_1 et n_2 les *nombres quantiques paraboliques*, $n_1 + n_2 < n$, où n est le nombre quantique principal (p. 753). L'effet Stark linéaire signifie que le système possède un moment dipolaire moyen

$$p_e = \frac{3}{8\pi^2} \frac{h^2}{m_e e^2 Z} (n_1 - n_2) n,$$

dû à la polarisation du système dans le champ électrique.

3° Après l'élimination partielle de la dégénérescence dans l'effet Stark linéaire reste la dégénérescence des états qui se distinguent par les valeurs du nombre quantique magnétique m. L'élimination ultérieure de la dégénérescence s'effectue dans l'effet de la seconde approximation, c'est-à-dire l'*effet Stark quadratique*. Dans des champs électriques suffisamment intenses pour $\mathcal{E} > 10^5$ V/cm, on observe la décomposition (en u. du système de Gauss):

$$\Delta \nu_2 = B_0 \left(\frac{n}{Z} \right)^4 [17\, n^2 - 3\, (n_1 - n_2)^2 - 9m^2 + 19]\, \mathcal{E}^2,$$

où

$$B_0 = - \frac{h^3}{1024\, \pi^6\, m^3_e e^6},$$

qui dépend de tous les nombres quantiques cités plus haut et aussi du nombre quantique magnétique m. L'effet Stark quadratique est toujours négatif et déplace les niveaux énergétiques du côté des énergies faibles.

6. Principe de Pauli. Système périodique des éléments

1° La mécanique quantique, en partant du principe d'indiscernabilité des particules identiques (p. 236), aboutit à la conclusion qu'il existe deux types de particules, dépendant uniquement de leur nature: a) particules jouissant d'un spin égal à un nombre entier

d'unités de $\hbar$ (les bosons, p. 236), décrites par des fonctions d'onde complètes symétriques Ψ_S (p. 784);

b) particules jouissant d'un spin égal à un nombre demi-entier d'unités de $\hbar$ (les fermions, p. 237), décrites par des fonctions d'onde complètes antisymétriques Ψ_A (p. 785).

2° Pour toutes les particules possédant un spin demi-entier (en unités de $\hbar$, fermions) est juste la règle suivante: deux fermions ne peuvent se trouver dans un état quantique identique dans un système quantique donné. Cette règle est appelée *principe d'exclusion* ou *principe de Pauli*. La formulation quantomécanique du principe de Pauli consiste en l'exigence de l'antisymétrie des fonctions d'onde complètes pour tout système de particules obéissant à ce principe.

3° Appliqué à l'atome dans lequel l'état de l'électron est défini de façon univoque par un système de quatre nombres quantiques: principal n, orbital l, magnétique orbital m_l et magnétique de spin m_s, le principe de Pauli porte: dans l'atome chaque électron possède son jeu de nombres quantiques n, l, m_l, m_s, qui diffère du jeu de ces nombres pour tout autre électron.

4° Le principe de Pauli est à la base de la systématisation du processus d'occupation des états électroniques dans les atomes et explique la périodicité des propriétés des éléments chimiques, autrement dit, le *système périodique des éléments de Mendéléev*.

Le nombre total d'états électroniques dans un atome multiélectronique pour un nombre quantique n donné est égal à

$$2\sum_{l=0}^{n-1}(2l+1) = 2n^2.$$

L'ensemble des électrons qui ont la même valeur du nombre quantique n constitue une *couche électronique*.

Nombre quantique principal n..............	1	2	3	4	5	6	7
Nombre maximal d'états électroniques possibles	2	8	18	32	50	72	98
Symbole de la couche	*K*	*L*	*M*	*N*	*O*	*P*	*Q*

5° Dans chacune des couches les électrons sont répartis en *sous-couches* ou *sous-groupes*, correspondant à une valeur donnée de l ($l < n$, p. 777). Le nombre maximal d'états électroniques dans une sous-couche de l donné est égal à $2(2l + 1)$.

Valeur du nombre quantique orbital l	0	1	2	3	4	....
Nombre d'états électroniques possibles	2	6	10	14	18	....
Symbole du sous-groupe	*s*	*p*	*d*	*f*	*g*	....

6° L'ordre d'occupation des états électroniques dans les couches et, à l'intérieur d'une couche, dans les sous-groupes correspond à l'ordre de disposition des états énergétiques de n et l donnés. En premier lieu sont occupés les états d'énergie minimale, ensuite les états d'énergie plus élevée. Pour les atomes légers cet ordre consiste en ceci: les électrons occupent d'abord les couches de n minimal et ensuite commence l'occupation de la couche suivante. Dans les limites d'une couche sont occupés tout d'abord les états de $l = 0$ et ensuite les états de l plus grand, jusqu'à $l = n - 1$.

7° A partir du potassium ($Z = 19$) cet ordre d'occupation des couches électroniques est souvent perturbé par le fait qu'à certains états électroniques de n plus grand correspond une énergie inférieure à celle des états non encore occupés de n moindre. Ceci est caractéristique des états $(n + 1)s$ et $(n + 1)p$ (comparer avec les états nd et nf). Les éléments dans lesquels les couches précédentes (sous-couches $3d$, $4d$, $4f$, $5d$ et $5f$) s'achèvent de se compléter pour les couches suivantes déjà en partie occupées sont dits *éléments de transition*.

8° Dans le tableau ci-après sont donnés la distribution des électrons entre les couches et les sous-couches dans les atomes des différents éléments chimiques, ainsi que les termes fondamentaux des atomes correspondants.

9° On appelle *électrons périphériques (de valence)* de l'atome les éléctrons entrant dans la composition des sous-groupes s et p de la couche de nombre n maximal pour un atome donné. Ces électrons déterminent les propriétés chimiques et optiques des atomes.

10° Dans le sous-groupe s complet, les moments magnétiques de spin des électrons sont compensés; dans les sous-groupes p, d, f, ... occupés sont compensés également les moments magnétiques orbitaux. C'est pourquoi dans l'atome ayant des sous-groupes complets le moment magnétique est nul, et l'élément correspondant jouit de propriétés diamagnétiques. Dans les atomes ayant des sous-groupes non complets peut exister le moment magnétique non compensé (non nul) qui conditionne le paramagnétisme et, dans une série de cas, le ferro et l'antiferromagnétisme.

11° L'occupation des sous-groupes nd et nf dans les atomes a lieu dans le cas d'une configuration électronique presque invariable des sous-groupes $(n + 1)s$ et $(n + 1)p$; c'est pourquoi elle n'influe presque pas sur les propriétés chimiques des éléments de transition, qui, dans les limites d'un groupe d'éléments donné, sont semblables. L'occupation des sous-groupes nd et nf néanmoins influe considérablement sur les spectres des rayons X des atomes liés aux transitions électroniques dans les couches internes de l'atome.

DISTRIBUTION DES ÉLECTRONS DANS LES ATOMES

Z	Elément	*K*	*L*	*M*	*N*	*O*	*P*	*Q*	Etat normal
		1*s*	2*s* 2*p*	3*s* 3*p* 3*d*	4*s* 4*p* 4*d* 4*f*	5*s* 5*p* 5*d* 5*f*	6*s* 6*p* 6*d*	7*s*	
1	H	1							$^2S_{1/2}$
2	He	2							$^1S_0$
3	Li	2	1						$^2S_{1/2}$
4	Be	2	2						$^1S_0$
5	B	2	2 1						$^2P^0_{1/2}$
6	C	2	2 2						$^3P_0$
7	N	2	2 3						$^4S^0_{3/2}$
8	O	2	2 4						$^3P_2$
9	F	2	2 5						$^2P^0_{3/2}$
10	Ne	2	2 6						$^1S_0$
11	Na	2	2 6	1					$^2S_{1/2}$
12	Mg	2	2 6	2					$^1S_0$
13	Al	2	2 6	2 1					$^2P^0_{1/2}$
14	Si	2	2 6	2 2					$^3P_0$
15	P	2	2 6	2 3					$^4S^0_{3/2}$
16	S	2	2 6	2 4					$^3P_2$
17	Cl	2	2 6	2 5					$^2P^0_{3/2}$
18	Ar	2	2 6	2 6					$^1S_0$
19	K	2	2 6	2 6	1				$^2S_{1/2}$
20	Ca	2	2 6	2 6	2				$^1S_0$
21	Sc	2	2 6	2 6 1	2				$^2D_{3/2}$
22	Ti	2	2 6	2 6 2	2				$^3F_2$
23	V	2	2 6	2 6 3	2				$^4F_{3/2}$
24	Cr	2	2 6	2 6 5	1				$^7S_3$
25	Mn	2	2 6	2 6 5	2				$^6S_{5/2}$
26	Fe	2	2 6	2 6 6	2				$^5D_4$
27	Co	2	2 6	2 6 7	2				$^4F_{9/2}$
28	Ni	2	2 6	2 6 8	2				$^3F_4$
29	Cu	2	2 6	2 6 10	1				$^2S_{1/2}$
30	Zn	2	2 6	2 6 10	2				$^1S_0$

Suite

Z	Elément	K	L	M	N	O	P	Q	Etat normal
		1s	2s 2p	3s 3p 3d	4s 4p 4d 4f	5s 5p 5d 5f	6s 6p 6d	7s	
31	Ga	2	2 6	2 6 10	2 1				$^2P^\circ_{1/2}$
32	Ge	2	2 6	2 6 10	2 2				$^3P_0$
33	As	2	2 6	2 6 10	2 3				$^4S^\circ_{3/2}$
34	Se	2	2 6	2 6 10	2 4				$^3P_2$
35	Br	2	2 6	2 6 10	2 5				$^2P^\circ_{3/2}$
36	Kr	2	2 6	2 6 10	2 6				$^1S_0$
37	Rb	2	2 6	2 6 10	2 6	1			$^2S_{1/2}$
38	Sr	2	2 6	2 6 10	2 6	2			$^1S_0$
39	Y	2	2 6	2 6 10	2 6 1	2			$^2D_{3/2}$
40	Zr	2	2 6	2 6 10	2 6 2	2			$^3F_2$
41	Nb	2	2 6	2 6 10	2 6 4	1			$^6D_{1/2}$
42	Mo	2	2 6	2 6 10	2 6 5	1			$^7S_3$
43	Tc	2	2 6	2 6 10	2 6 5	2			$^6S_{5/2}$
44	Ru	2	2 6	2 6 10	2 6 7	1			$^5F_5$
45	Rh	2	2 6	2 6 10	2 6 8	1			$^4F_{9/2}$
46	Pd	2	2 6	2 6 10	2 6 10				$^1S_0$
47	Ag	2	2 6	2 6 10	2 6 10	1			$^2S_{1/2}$
48	Cd	2	2 6	2 6 10	2 6 10	2			$^1S_0$
49	In	2	2 6	2 6 10	2 6 10	2 1			$^2P^\circ_{1/2}$
50	Sn	2	2 6	2 6 10	2 6 10	2 2			$^3P_0$
51	Sb	2	2 6	2 6 10	2 6 10	2 3			$^4S^\circ_{3/2}$
52	Te	2	2 6	2 6 10	2 6 10	2 4			$^3P_2$
53	I	2	2 6	2 6 10	2 6 10	2 5			$^2P^\circ_{3/2}$
54	Xe	2	2 6	2 6 10	2 6 10	2 6			$^1S_0$
55	Cs	2	2 6	2 6 10	2 6 10	2 6	1		$^2S_{1/2}$
56	Ba	2	2 6	2 6 10	2 6 10	2 6	2		$^1S_0$
57	La	2	2 6	2 6 10	2 6 10	2 6 1	2		$^2D_{3/2}$
58	Ce	2	2 6	2 6 10	2 6 10 2	2 6	2		$^3H_4$
59	Pr	2	2 6	2 6 10	2 6 10 3	2 6	2		$^4I^\circ_{9/2}$
60	Nd	2	2 6	2 6 10	2 6 10 4	2 6	2		$^5I_4$
61	Pm	2	2 6	2 6 10	2 6 10 5	2 6	2		$^6H_{5/2}$
62	Sm	2	2 6	2 6 10	2 6 10 6	2 6	2		$^7F_0$
63	Eu	2	2 6	2 6 10	2 6 10 7	2 6	2		$^8S^\circ_{7/2}$
64	Gd	2	2 6	2 6 10	2 6 10 7	2 6 1	2		$^9D^\circ_2$
65	Tb	2	2 6	2 6 10	2 6 10 8	2 6 1	2		$^8H_{17/2}$
66	Dy	2	2 6	2 6 10	2 6 10 10	2 6	2		$^5I^\circ_8$
67	Ho	2	2 6	2 6 10	2 6 10 11	2 6	2		$^4I^\circ_{15/2}$
68	Er	2	2 6	2 6 10	2 6 10 12	2 6	2		$^3H_6$
69	Tu	2	2 6	2 6 10	2 6 10 13	2 6	2		$^2F^\circ_{7/2}$
70	Yb	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6	2		$^1S_0$

Suite

Z	Elément	K	L	M	N	O	P	Q	Etat normal
		1s	2s 2p	3s 3p 3d	4s 4p 4d 4f	5s 5p 5d 5f	6s 6p 6d	7s	
71	Lu	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 1 1	2		$^2D_{3/2}$
72	Hf	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 2	2		$^3F_2$
73	Ta	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 3	2		$^4F_{3/2}$
74	W	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 4	2		$^5D_0$
75	Re	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 5	2		$^6S_{5/2}$
76	Os	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 6	2		$^5D_4$
77	Ir	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 7	2		$^4F_{9/2}$
78	Pt	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 9	1		$^3D_3$
79	Au	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10	1		$^2S_{1/2}$
80	Hg	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10	2		$^1S_0$
81	Tl	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10	2 1		$^2P^\circ_{1/2}$
82	Pb	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10	2 2		$^3P_0$
83	Bi	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10	2 3		$^4S^\circ_{3/2}$
84	Po	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10	2 4		$^3P_2$
85	At	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10	2 5		$^2P^\circ_{3/2}$
86	Ru	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10	2 6		$^1S_0$
87	Fr	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10	2 6	1	$^2S_{1/2}$
88	Ra	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10	2 6	2	$^1S_0$
89	Ac	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10	2 6 1	2	$^2D_{3/2}$
90	Th	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10	2 6 2	2	$^3F_2$
91	Pa	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 2	2 6 1	2	$^4K_{11/2}$
92	U	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 3	2 6 1	2	$^5L^\circ_6$
93	Np	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 4	2 6 1	2	$^6L_{11/2}$
94	Pu	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 6	2 6	2	$^7F_0$
95	Am	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 7	6	2	$^8S^\circ_{7/2}$
96	Cm	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 7	2 6 1	2	$^9D^\circ_2$
97	Bk	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 8	2 6 1	2	$^8H_{17/2}$
98	Cf	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 10	2 6	2	$^5I_8$
99	Es	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 11	2 6	2	$^4I_{15/2}$
100	Fm	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 12	2 6	2	$^3H_6$
101	Md	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 13	2 6	2	$^2F_{7/2}$
102	No	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 14	2 6	2	$^1S_0$
103	Lw	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 14	2 6 1	2	...
104	Ku	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 14	2 6 2	2	...

12° Le nombre d'électrons total dans le sous-groupe $s + p$ est 8 (p. 797). Le mécanisme de perte ou de gain des électrons de valence est à la base de la plupart des réactions chimiques (cf. également p. 805). Il se trouve être énergétiquement avantageux que les atomes cèdent des électrons dans le cas où moins de la moitié du sous-groupe $s + p$ est occupé ou qu'ils en acquièrent lorsque plus de la moitié de ce sous-groupe est occupé. Les atomes dont la moitié du sous-groupe $s + p$ est remplie peuvent céder ou acquérir des électrons suivant les conditions.

7. Rayons X

1° Il existe deux types de rayons X: *rayons caractéristiques* à spectre de raies (p. 707) et *rayons blancs* à spectre continu (p. 707). Les rayons X blancs sont dus au freinage d'électrons rapides au cours de leur mouvement dans la substance (rayonnement de freinage, p. 605). Les rayons caractéristiques sont liés aux transitions électroniques dans les couches internes des atomes moyens et lourds. Pour ces couches les différences d'énergie $E_m - E_n$ sont notablement supérieures aux différences d'énergie pour les couches externes. C'est pourquoi les fréquences des spectres caractéristiques des rayons X sont de quelques ordres supérieures aux fréquences des spectres optiques.

2° Le rayonnement caractéristique résulte de l'arrachement de l'électron de l'une des couches de l'atome, proches de son noyau. La place vacante est alors occupée par l'électron de couches profondes (couches qui tiennent une valeur plus importante du nombre quantique principal n). Ceci conduit à l'émission d'un photon X de fréquence ν : $\nu = (E_m - E_n)/h$. Si cette ionisation se produit par collisions d'électrons rapides avec les atomes, les rayons X sont alors appelés *primaires*. Les rayons X sont dits *secondaires* ou *fluorescents* s'ils sont obtenus par photo-ionisation des atomes (p. 831) sous l'action de photons X absorbés par ces atomes.

3° Lors de l'arrachement d'un électron quelconque de la couche K deviennent possibles les transitions à cette couche à partir des couches $L(n = 2)$, $M(n = 3)$, etc., suivies de transitions électroniques aux places vacantes de ces couches, tant que ce processus n'aboutira pas à la redistribution complète des électrons suivant les états dans l'atome. Ce sont les photons surgissant lors de ces transitions qui forment les rayons X caractéristiques. La figure VI.2.6 montre le schéma général de ces transitions, vérifiant les règles de sélection suivantes: $|\Delta l| = 1$, $|\Delta j| = 0, 1$ pour le rayonnement dipolaire,

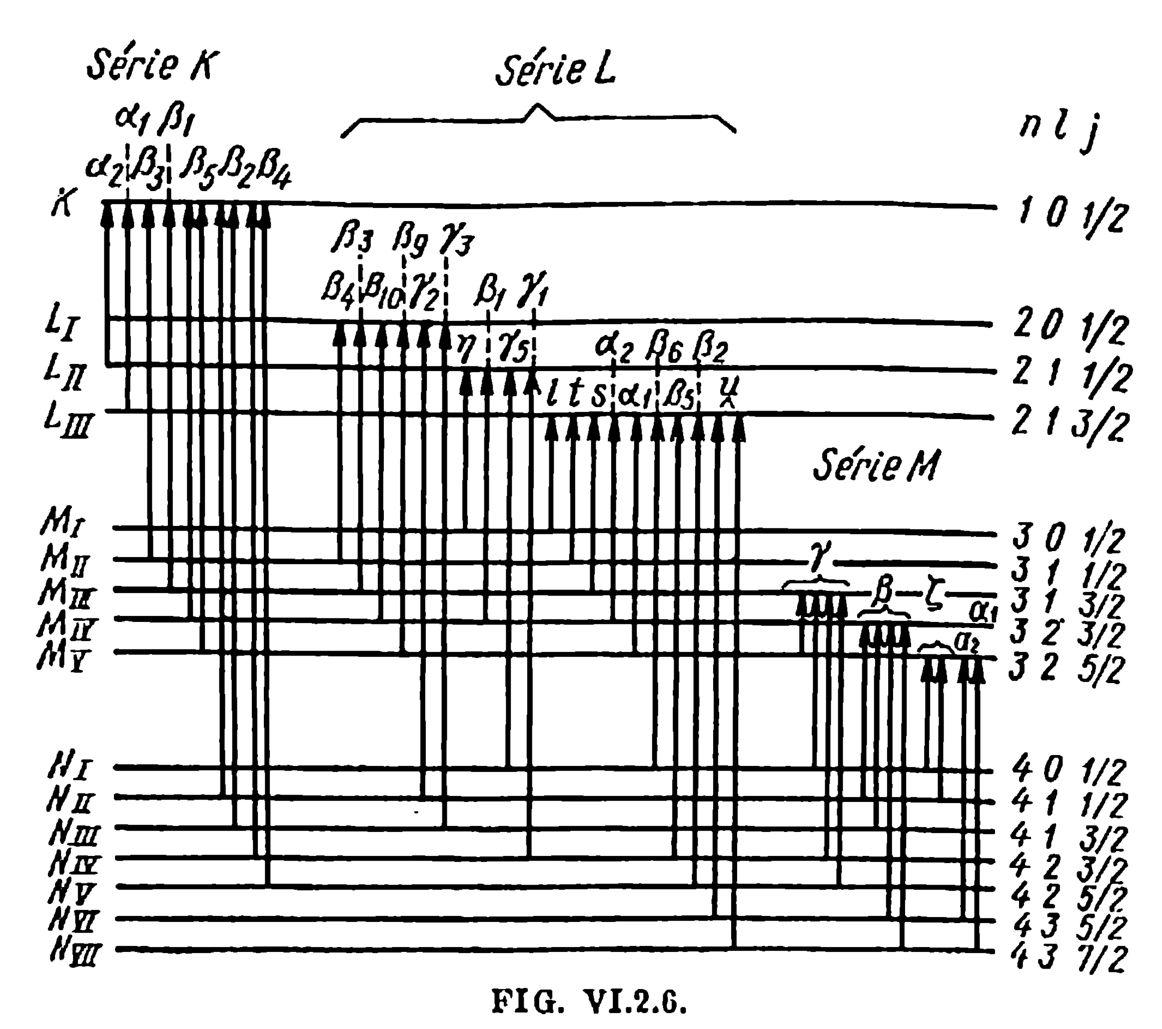


FIG. VI.2.6.

$|\Delta l| = 0, 2$, $|\Delta j| = 0, 1, 2$ pour le rayonnement quadripolaire, notablement plus faible.

Les raies spectrales correspondant aux transitions des électrons aux couches K, L, etc., de l'atome constituent les séries K, L, etc., du *spectre caractéristique*. On désigne généralement les raies de chaque série par des lettres grecques avec des indices bas (par exemple, K_{α_1}, K_{β_2}, L_{α_2}, etc.).

4° *Loi de Moseley* pour les fréquences caractéristiques du spectre:

$$\sqrt{\frac{\nu_n}{R}} = a(Z - \sigma),$$

pour les nombres d'onde:

$$\sqrt{\frac{1}{\lambda R'}} = a(Z - \sigma),$$

où R et R' sont les constantes de Rydberg en s^{-1} et cm^{-1} (p. 773), Z le nombre atomique de l'élément chimique, σ la constante de blindage

(p. 777), a une constante dépendant des nombres quantiques des couches entre lesquelles s'opère la transition.

5° Le spectre X continu du rayonnement de freinage est limité du côté des petites ondes par une certaine longueur d'onde minimale λ_{min}, appelée *limite du spectre continu*. L'apparition de cette limite est liée au fait que l'énergie maximale $h\nu_{max}$ du quantum X, surgissant au compte de l'énergie de l'électron W_c, ne peut dépasser cette dernière:

$$W_c = e\varphi_0 = h\nu_{max},$$

où φ_0 est la différence de potentiel au compte de laquelle est communiquée à l'électron l'énergie W_c.

$$\lambda_{min} = \frac{c}{\nu_{max}} = \frac{ch}{e\varphi_0} = \frac{ch}{W_c}.$$

La mesure de la limite d'ondes courtes du spectre X continu nous donne l'une des plus précises valeurs de h.

6° Les spectres X d'absorption, à la différence des spectres optiques, ne contiennent pas de raies d'absorption isolées. Le facteur d'absorption (p. 871) des rayons X par la substance diminue avec l'augmentation de leur fréquence. Cette variation monotone est discontinue *(sauts d'absorption)* dans les domaines de fréquences auxquelles l'énergie des quanta X devient suffisante pour libérer un électron des couches K, L, M, ...

7° L'absorption d'un quantum X par l'atome peut s'accompagner de l'auto-ionisation de l'atome excité. Ce phénomène, appelé *effet Auger*, est dû à la redistribution interne de l'énergie d'excitation. Il a lieu en deux étapes: en premier lieu, absorption du quantum X et excitation de l'atome avec libération d'un électron de l'une des couches profondes (de la couche K d'ordinaire (p. 797)), ensuite passage d'un électron d'une couche moins profonde (de la couche L, M ou N habituellement) à la place vide. La différence d'énergie ΔE n'apparaît cependant pas sous forme d'un nouveau quantum X, mais provoque l'expulsion d'un électron de l'une des couches externes de l'atome. L'effet Auger non accompagné de radiation est un exemple de *transition non radiative*.

CHAPITRE 3

Molécule

1. Molécules ioniques

1° On appelle *molécule* la plus petite particule stable d'une substance donnée, douée de propriétés caractéristiques de celle-ci et constituée d'atomes identiques ou différents dont la cohésion est assurée par des liaisons chimiques *(forces chimiques)*. Les forces chimiques ont à leur base les diverses interactions des électrons périphériques de l'atome.

2° Une grande classe de molécules est représentée par les *molécules ioniques*, formées d'ions des éléments chimiques constituant la molécule. La somme totale des charges positives et négatives des ions formant la molécule est nulle, et c'est pourquoi les molécules ioniques sont électriquement neutres. Les forces assurant la stabilité de la molécule sont principalement de nature électrique.

3° La formation des molécules ioniques est déterminée par la stabilité élevée du sous-groupe externe $s + p$ à huit électrons (octet) dans les atomes (p. 802). Les atomes dont la couche externe compte plus de quatre électrons tendent à gagner des électrons pour compléter leur couche externe jusqu'à 8 électrons (ils sont doués d'*électronégativité*). La stabilité particulière de la configuration à 8 électrons s'explique par le fait que lors de l'occupation de tous les huit états dans le sous-groupe $s + p$, cette configuration devient peu sensible aux influences extérieures, étant donné que les moments orbitaux et de spin des électrons se compensent complètement (p. 802).

4° La formation d'une molécule ionique lors du rapprochement des atomes est réalisée par passage des électrons périphériques des atomes électropositifs aux atomes électronégatifs en formant des ions positifs et négatifs de ces atomes respectivement. On distingue une *valence positive* de l'élément *(valence par rapport à l'hydrogène)*,

dont la valeur maximale est égale au nombre d'électrons périphériques de l'élément N. Pour cette même cause, les électrons périphériques de l'atome sont dits parfois *électrons de valence.*

La *valence négative* de l'élément *(valence par rapport au fluor)* est définie par le nombre d'atomes de fluor à remplacer ou par le nombre double d'atomes d'oxygène à remplacer *(valence négative par rapport à l'oxygène)*. La valence négative maximale de l'élément est égale à $8 - N$.

5° L'énergie potentielle d'une molécule ionique diatomique du type NaCl, formée d'ions à charge unité A^- et B^+, est:

$$U = -\frac{e^2}{r} + \frac{be^2}{r^9} - \frac{ep_{e_1}}{r^2} - \frac{ep_{e_2}}{r^2} - \frac{2p_{e_1}p_{e_2}}{r^3} + \frac{p_{e_1}^2}{2\alpha_1} + \frac{p_{e_2}^2}{2\alpha_2} \quad \text{(en u. du système de Gauss)},$$

où r est la distance entre les centres des ions, p_{e1} et p_{e2} les moments dipolaires de chacun des ions (p. 377), α_1 et α_2 les polarisabilités des ions (p. 377), b une constante. Lors de la dissociation de la molécule en ions ($r \to \infty$) $U = 0$. Le premier terme de droite tient compte de l'énergie de l'attraction coulombienne des ions de charge contraire, le second terme, de l'énergie de répulsion mutuelle des ions, le troisième et le quatrième terme, de l'énergie d'attraction des charges libres des ions par les dipôles avec les moments dipolaires p_{e1} et p_{e2}, formés par suite de la polarisation mutuelle des couches électroniques des ions, le cinquième terme, de l'interaction des moments dipolaires induits, le sixième et le septième terme, de l'énergie de déformation des dipôles quasi élastiques (énergie quasi élastique).

6° L'énergie potentielle U d'une molécule ionique présente un minimum U_{min} pour $r = r_e$ correspondant à la *distance d'équilibre* entre ions (fig. VI.3.1):

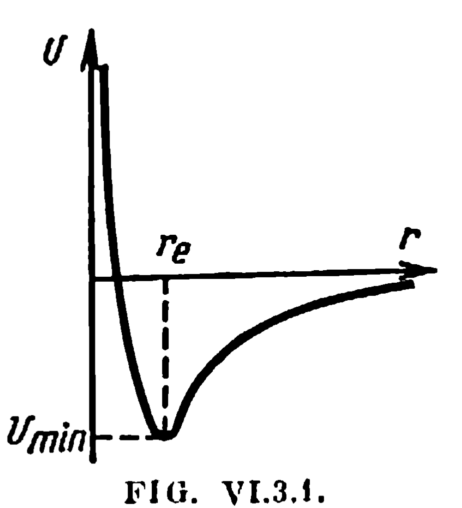


FIG. VI.3.1.

$$U_{min} = -\frac{e^2}{r_e}\left[\frac{8}{9} + \frac{5(\alpha_1 + \alpha_2)}{18r_e^3} + \frac{4\alpha_1\alpha_2}{9r_e^6}\right].$$

On trouve la grandeur r_e de la condition $\left.\frac{dU}{dr}\right|_{r=r_e} = 0$, qui est la condition du minimum de l'énergie potentielle de la molécule. L'équation approchée pour r_e est de la forme (si dans le développement

de p_{e1} et p_{e2} suivant les puissances $1/r$ on néglige les termes avec r supérieurs à r^9):

$$1 + \frac{2(\alpha_1 + \alpha_2)}{r_e^3} + \frac{14\alpha_1 \alpha_2}{r_e^6} = \frac{9b}{r_e^9}.$$

7° La décomposition d'une molécule en ses ions est dite *dissociation moléculaire*. La grandeur U_e et l'énergie de dissociation D_i de la molécule en deux ions sont liées par la relation:

$$D_i = - U_e.$$

L'énergie de dissociation D de la molécule en atomes neutres et la grandeur D_i sont liées par la relation:

$$D_i = D + e\varphi - E,$$

où φ est le potentiel d'ionisation de l'atome électropositif (p. 805), E l'énergie d'affinité électronique de l'atome électronégatif.

8° Comme exemples de molécules ioniques typiques peuvent servir les molécules d'halogénures alcalins, formées d'ions atomiques des éléments des groupes I et VII du système périodique: NaCl (Na^+Cl^-), RbBr, CsI, etc. Les molécules ioniques ne pouvant être formées que d'ions atomiques d'éléments chimiques différents, la liaison des ions dans ces molécules est dite *hétéropolaire* ou, plus souvent, *ionique* ou bien *électrovalente*.

2. Molécules atomiques

1° On appelle *molécules atomiques* les molécules dans lesquelles l'état fondamental correspond aux états normaux (p. 774) des atomes neutres. Les forces assurant la stabilité des molécules atomiques représentent des forces d'échange (p. 784) et ont un caractère quantique. Elles agissent entre les électrons périphériques des atomes dans la molécule.

2° Dans le cas élémentaire d'une molécule d'hydrogène formée de deux atomes identiques, l'équation de Schrödinger (p. 781) est de la forme:

$$\Delta_1\psi + \Delta_2\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0,$$

où

$$U = \frac{e^2}{r_{12}} + \frac{e^2}{r_{\mathrm{I,II}}} - e^2 \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{1}{r_{\mathrm{I}i}} + \frac{1}{r_{\mathrm{II}i}} \right).$$

Le premier terme dans cette dernière équation correspond à l'interaction coulombienne entre les électrons des atomes I et II, le second, à l'interaction coulombienne entre les noyaux des atomes I et II (on suppose approximativement que $r_{I,II}$ = const, c'est-à-dire que les noyaux I et II sont fixes), le troisième tient compte de l'interaction coulombienne de l'électron de l'atome I avec le noyau de l'atome II et de l'électron de l'atome II avec le noyau de l'atome I.

3° Dans la résolution du problème sur la molécule d'hydrogène on admet en approximation zéro que $r_{I,II} = \infty$, autrement dit, on néglige la perturbation dans l'atome I excitée par la présence de l'atome II et inversement. L'équation de Schrödinger est alors décomposée en deux équations pour les atomes isolés de l'hydrogène. Comme solution de ces équations en approximation zéro sert la fonction de la forme

$$\psi_0 = \psi_I(1)\,\psi_{II}(2),$$

correspondant à la liaison de chacun des électrons avec son noyau. Lors du rapprochement des atomes I et II devient possible, du fait de l'indiscernabilité des deux électrons, la fonction d'onde de la forme $\psi' = \psi_I(2)\,\psi_{II}(1)$ répondant à la liaison de chacun des électrons avec un noyau étranger. La fonction d'onde complète est:

$$\psi_{A,S} = N_{A,S}[\psi_I(1)\,\psi_{II}(2) \pm \psi_I(2)\,\psi_{II}(1)],$$

où $N_{A,S}$ est le facteur de normalisation, l'indice A et le signe moins répondent à la fonction d'onde antisymétrique, l'indice S et le signe plus à la fonction d'onde symétrique.

La fonction d'onde $\psi_{A,S}$, représentant la solution exacte de l'équation de Schrödinger pour la molécule d'hydrogène dans le cas des distances interatomiques considérables, est considérée comme solution approchée pour de faibles distances $r_{I,II}$:

$$|\psi_{A,S}|^2 = N_{AS}^2[|\psi_I(1)|^2|\psi_{II}(2)|^2 + |\psi_I(2)|^2|\psi_{II}(1)|^2 \pm$$
$$\pm 2\psi_I(1)\,\psi_{II}(2)\,\psi_I(2)\,\psi_{II}(1)]$$

et donne la distribution de la densité électronique dans la molécule. Les deux premiers termes concernent les électrons situés dans les noyaux correspondants. A ces termes répond la partie électrostatique (coulombienne) de l'énergie d'interaction des atomes. Au troisième terme correspond l'énergie d'échange (cf. également p. 784).

L'interaction d'échange des électrons dans la molécule d'hydrogène peut être comprise en ce sens que l'électron de chacun des atomes passe un certain temps au voisinage du noyau de l'autre atome, réalisant par là même la liaison des deux atomes dans la molécule.

L'énergie potentielle de la molécule d'hydrogène est:

$$U = \frac{C \pm A}{1 \pm S},$$

où

$$S = \iint_{-\infty}^{+\infty} \psi_{\mathrm{I}}(1)\, \psi_{\mathrm{II}}(1)\, \psi_{\mathrm{I}}(2)\, \psi_{\mathrm{II}}(2)\; dV_1\; dV_2,$$

C est l'intégrale coulombienne (p. 784),

$$C = e^2 \iint_{-\infty}^{+\infty} \left[-\frac{1}{r_{\mathrm{II}1}} - \frac{1}{r_{\mathrm{I}2}} + \frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{r_{\mathrm{I\,II}}} \right] =$$

$$= |\psi_{\mathrm{I}}(1)|^2 |\psi_{\mathrm{II}}(2)|^2\, dV_1\; dV_2,$$

A est l'intégrale d'échange (p. 784),

$$A = e^2 \iint_{-\infty}^{+\infty} \left[-\frac{1}{r_{\mathrm{II}1}} - \frac{1}{r_{\mathrm{I}2}} + \frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{r_{\mathrm{I\,II}}} \right] \times$$

$$\times\; \psi_{\mathrm{I}}(1)\; \psi_{\mathrm{II}}(2)\; \psi_{\mathrm{I}}(2)\; \psi_{\mathrm{II}}(1)\; dV_1\; dV_2.$$

4° Les intégrales C et A sont négatives et $|A| > |C|$; l'intégrale $S < 1$. Pour chacun des signes de l'expression de U:

$$U_+ = \frac{C + A}{1 + S} < 0 \quad \text{et} \quad U_- = \frac{C - A}{1 - S} > 0.$$

La grandeur U_+ correspond à l'état stable de la molécule d'hydrogène et la grandeur U_- à son état non stable. La forme de U_+ et U_- en fonction de la distance entre les noyaux des atomes dans la molécule est représentée fig. VI.3.2. La courbe $U_+(r)$ ressemble à la courbe de potentiel des molécules ioniques. La figure VI.3.3 montre les distributions de la densité électronique (les grandeurs $e|\psi|^2$) correspondant aux états stable et non stable de la molécule d'hydrogène. En vertu du principe de Pauli (p. 796), à l'état stable de la molécule les spins des électrons sont antiparallèles et le spin total des deux électrons $S = 0$; la fonction d'onde orbitale est alors symétrique *(état singulet)*. A l'état non stable de la molécule d'hydrogène les spins des électrons sont parallèles et le spin total des deux électrons $S = 1$; la fonction d'onde orbitale est antisymétrique *(état triplet)*.

5° Dans le cas général, à la formation des molécules prennent part les liaisons ionique et atomique. Dans le cas des molécules ioniques du type NaCl, CsI, etc., l'interaction coulombienne des

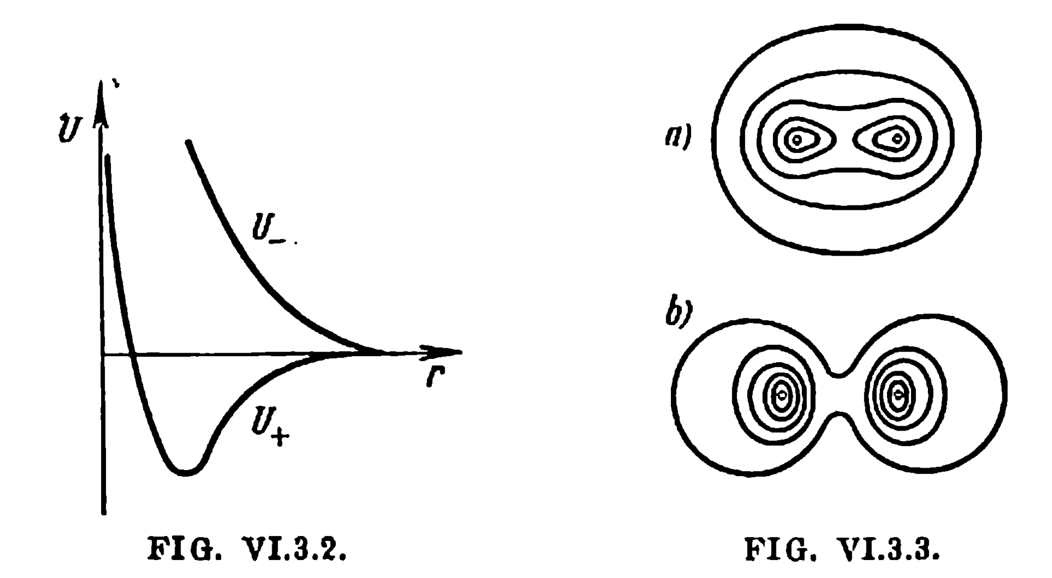


FIG. VI.3.2. FIG. VI.3.3.

ions prédomine; dans le cas des molécules du type H_2, N_2, O_2, etc., c'est l'interaction d'échange des atomes qui joue le rôle principal.

6° Les liaisons chimiques dans les molécules sont réalisées par les électrons des sous-groupes *s* et *p* de la couche de nombre quantique principal *n* maximal (p. 753). Dans la molécule la description individuelle des états des électrons de valence n'existe pas, autrement dit, il est impossible de décrire l'état de chaque électron de valence dans la molécule par la fonction d'onde liée exclusivement à cet état et différente des fonctions d'onde des autres électrons de valence. Les électrons de valence de la molécule occupent non les états *s* ou *p*, mais un état mixte *s-p* qui se décrit par une fonction d'onde représentant la combinaison linéaire des fonctions relatives aux états *s* et *p*. On assiste alors à une *hybridation des liaisons*.

7° Dans le cas d'une liaison chimique simple entre atomes, appelée *liaison sigma (liaison σ)*, la densité électronique des électrons de valence est distribuée symétriquement autour de la ligne réunissant les noyaux des atomes dans la molécule. La liaison sigma peut être réalisée aussi bien par les électrons *s* que par les électrons *p* des atomes. Cette liaison tient lieu dans toutes les molécules à valences saturées. La symétrie de la liaison sigma entraîne la possibilité de la rotation d'une partie de la molécule par rapport à une autre autour d'un axe de rotation coïncidant avec l'axe de symétrie de la liaison. Dans les composés insaturés et benzéniques avec des valences non saturées sont réalisées des *liaisons pi (liaisons π)* formées par les électrons *p* et ne jouissant pas de symétrie axiale.

Par suite du recouvrement mutuel des nuages électroniques de deux électrons π de part et d'autre de la ligne réunissant les noyaux, il se forme deux «ponts» qui donnent une certaine rigidité à la liai-

son π. La liaison double (la liaison des atomes de carbone dans la molécule d'éthylène $H_2C = CH_2$ par exemple) est constituée d'une liaison σ et d'une liaison π (fig. VI.3.4). Le nuage électronique de la liaison π présente deux plans de symétrie passant par la ligne réunissant les noyaux. La rotation des parties de la molécule l'une par rapport à l'autre n'est pas possible à cause de l'asymétrie de la densité électronique dans ces liaisons. Ce fait se manifeste, par exemple, en *isomérie cis-trans*, c'est-à-dire dans l'existence de substances de même composition, mais de différente structure géométrique liée à la diversité de la disposition relative des parties de la molécule. Ce phénomène détermine la diversité des propriétés physico-chimiques des *isomères*.

Les propriétés de symétrie des densités électroniques correspondant aux électrons réalisant les liaisons π déterminent la *directivité des valences*, qui sert de base à la *stéréochimie*, science qui étudie la structure spatiale des combinaisons chimiques. Il est établi que par leur forme géométrique les molécules peuvent être rectilignes, planes, triangulaires, pyramidales, tétraédriques, annulaires, en zigzag, en chaîne, etc. La structure spatiale des molécules conditionnée par la directivité des valences se manifeste dans le cas de molécules à un nombre d'atomes supérieur à deux. Par exemple, la molécule d'eau a la forme d'un triangle isocèle avec l'angle H—O—H, égal à 105°.

8° Les molécules atomiques dans beaucoup de cas sont formées d'atomes identiques. C'est pourquoi la liaison des atomes dans de telles molécules est appelée *homopolaire* ou, plus souvent, *covalente*.

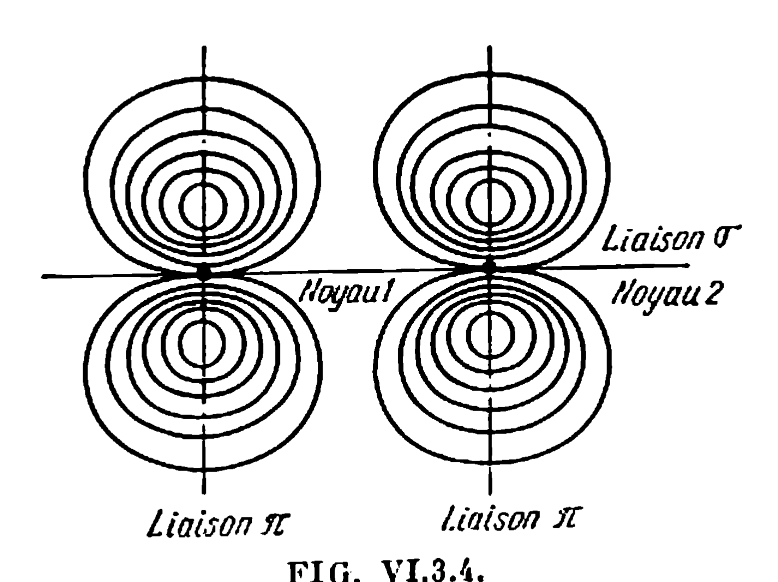


FIG. VI.3.4.

Homopolaires sont les molécules H_2, N_2, O_2, les molécules d'hydrures, LiH, PdH par exemple, les molécules de borures métalliques, etc., formées d'atomes des éléments des groupes I, II et III du système périodique.

3. Spectres électroniques des molécules

1° Conformément aux différents types de mouvement possibles dans la molécule (p. 243), la fonction d'onde d'une molécule peut être approximativement représentée sous forme du produit de trois fonctions d'onde répondant aux mouvements électroniques, aux vibrations et aux rotations de la molécule à condition que ces mouvements soient mutuellement indépendants:

$$\Psi = \psi_{é}\psi_{v}\psi_{r}.$$

Lors de la substitution de Ψ dans l'équation de Schrödinger correspondante, celle-ci peut se décomposer en trois équations dont la solution donne respectivement le spectre énergétique du mouvement: $E_{é}$, E_{v}, E_{r}. L'énergie totale de la molécule est approximativement égale à

$$E = E_{é} + E_{v} + E_{r}.$$

Par ordre de grandeur $E_{é} \gg E_{v} \gg E_{r}$ (cf. également p. 243).

2° Les *termes électroniques des molécules* ne diffèrent pas par leur provenance des termes électroniques des atomes isolés. Le nombre de termes électroniques des molécules est notablement supérieur à celui des atomes. Chaque atome dans la molécule est soumis au champ électrique des atomes restants (*champ électrique intramoléculaire*). Celui-ci provoque la décomposition des niveaux électroniques des atomes dans la molécule, analogue à celle qui a lieu dans les atomes introduits dans un champ électrique. Les niveaux électroniques de la molécule sont formés des niveaux électroniques de ses atomes, décomposés en nombreux sous-niveaux par effet Stark (p. 795) dans le champ intramoléculaire.

3° Les niveaux électroniques énergétiques de la molécule sont déterminés par sa configuration électronique, autrement dit, par l'ensemble des nombres quantiques correspondant aux états de tous les électrons de la molécule. Pour la systématisation de ces niveaux et des spectres des molécules on utilise le *modèle vectoriel de la molécule,* qui représente la généralisation du modèle vectoriel de l'atome (p. 785).

4° Dans la plupart des cas la systématisation des niveaux électroniques des molécules diatomiques et polyatomiques linéaires est basée sur le ***nombre quantique orbital de la molécule:***

$$\Lambda = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i,$$

où la sommation porte sur tous les électrons de la molécule. Le nombre Λ détermine la valeur de la projection du moment orbital total (résultant) de la molécule sur une direction quelconque (sur l'axe de la molécule par exemple). La grandeur λ_i détermine la projection du moment orbital du i-ième électron sur l'axe de la molécule.

Les termes correspondant à $\Lambda = 0, 1, 2, 3, \ldots$ sont désignés par Σ, Π, Δ, etc. Dans les molécules a lieu un couplage l-s (p. 786), de sorte que le vecteur moment cinétique orbital de la molécule $\mathbf{\Lambda}$ est représenté sous la forme:

$$\mathbf{\Lambda} = \sum_{k=1}^{m} \mathbf{L}_k,$$

où $\mathbf{L}_k$ se rapportent aux atomes isolés de la molécule dont le nombre est m.

5° On introduit de façon analogue le ***nombre quantique de spin de la molécule,*** déterminant la projection Σ de son moment de spin total $\mathbf{S}$ sur une certaine direction (sur l'axe de la molécule par exemple):

$$\mathbf{S} = \sum_{k=1}^{m} \mathbf{S}_k,$$

et

$$\Sigma = \sum_{i=1}^{N} s_i.$$

La sommation sur k et i s'effectue comme indiqué plus haut (4°). On introduit également le ***nombre quantique interne de la molécule:***

$$\Omega = \Lambda \pm \Sigma.$$

La systématisation des termes électroniques de la molécule suivant les nombres Ω, Λ, Σ représente la généralisation de la systématisation des termes électroniques de l'atome suivant les nombres

J, L, S. On utilise pour désigner le terme moléculaire le symbole $^{2\Sigma+1}\Lambda_{\Omega}$. Lorsque $\Lambda = 0$ (pour les termes Σ) le spin n'a pas d'orientation par rapport à l'axe de la molécule et les nombres quantiques Σ et Ω perdent leur sens.

6° Le modèle vectoriel de la molécule tient compte également de la rotation de la molécule, qui fait apparaître un champ magnétique intramoléculaire. Lors de la systématisation des termes moléculaires on prend en considération le fait que le champ électrique de la molécule conditionnant la décomposition des termes atomiques correspondants n'est pas toujours suffisamment intense pour perturber le couplage de $\mathbf{L}_i$ et $\mathbf{S}_i$ dans les atomes isolés. Cette généralisation de la systématisation des termes moléculaires conduit à trois types de *termes de Hund* pour une molécule diatomique.

Premier type. L'interaction des moments de spin des atomes dans la molécule ($\mathbf{S}_i$, $\mathbf{S}_k$) et l'interaction des différents $\mathbf{L}_i$ avec le champ ($\mathbf{L}_i$, $\mathscr{E}$) sont très supérieures aux interactions ($\mathbf{L}_i$, $\mathbf{S}_i$), où $\mathscr{E}$ est l'intensité du champ électrique intramoléculaire, qui est considérable. A la combinaison des vecteurs

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{\Lambda} + \mathbf{\Sigma}$$

correspond la systématisation des termes moléculaires indiquée plus haut (4° et 5°). Le vecteur $\mathbf{\Omega}$ s'ajoute au vecteur moment cinétique des noyaux $\mathbf{Y}$ (rotation de la molécule sans tenir compte des spins des noyaux) donnant le vecteur résultant

$$\mathbf{J} = \mathbf{\Omega} + \mathbf{Y}$$

Le nombre quantique J relatif au vecteur $\mathbf{J}$ prend des valeurs entières lorsque Ω et Y sont entiers.

Deuxième type. L'interaction ($\mathbf{L}_i$, $\mathbf{Y}$) est très supérieure à l'interaction ($\mathbf{L}_i$, $\mathbf{S}_i$) et à l'interaction ($\mathbf{S}_i$, $\mathbf{S}_k$). Le nombre quantique Σ et avec lui Ω perdent leur sens. Pour la systématisation c'est le nombre K qui est utilisé à leur place, correspondant au vecteur

$$\mathbf{K} = \mathbf{\Lambda} + \mathbf{Y}.$$

Ce vecteur et le vecteur $\mathbf{S}$ donnent le vecteur moment total de la molécule

$$\mathbf{J} = \mathbf{K} + \mathbf{S}.$$

Pour K suffisamment importants, on introduit le nombre quantique $\mathfrak{S} = \pm S, \pm(S-1), \ldots$ correspondant à la projection du spin des atomes sur l'axe de rotation de la molécule. Lors de l'intensification

de la rotation des noyaux (accroissement de **K**) le type 2 se transforme en type 1.

Troisième type. L'interaction spin-orbitale pour les atomes isolés ($\mathbf{L}_i$, $\mathbf{S}_i$) est très grande par comparaison avec les autres interactions. Ceci a lieu dans un champ électrique faible et correspond au cas du couplage *j-j* dans l'atome (p. 787). Acquièrent un sens le vecteur $\mathbf{J}_i$ du moment atomique total et le nombre Ω déterminant la projection de $\mathbf{J}_i$ sur l'axe de la molécule. Les nombres Λ et Σ, eux, ne sont plus utilisés. La combinaison des vecteurs $\mathbf{\Omega}$ et $\mathbf{Y}$ donne le vecteur total

$$\mathbf{J} = \mathbf{\Omega} + \mathbf{Y}.$$

Les diagrammes vectoriels correspondant aux trois types de termes de Hund de la molécule sont montrés fig. VI.3.5.

7° Les termes électroniques correspondant à un couple donné de niveaux, initial et final, de transition (leur nombre est déterminé par le nombre de combinaisons possibles de L_i pour les atomes isolés donnant le nombre total Λ) sont dits ***positifs*** si la fonction d'onde est symétrique (ψ_+), et ***négatifs*** dans le cas d'une fonction antisymétrique (ψ_-). Suivant la valeur de la somme des nombres quantiques orbitaux $\Sigma\, l_i$ pour chacun des termes atomiques formant les termes moléculaires, ces derniers sont dits ***pairs*** (représentés par le symbole $\{L\}_g$) pour $\Sigma\, l_i = 2n$ et ***impairs*** (représentés par le symbole $\{L\}_u$) pour $\Sigma\, l_i = 2n + 1$, où n est un nombre entier. La décomposition des termes en termes positifs et négatifs correspond à la double dégénérescence des niveaux correspondants. Lors de la rotation de la molécule, le champ magnétique intramoléculaire élimine cette dégénérescence et le nombre de termes total avec $\Lambda > 0$ se double ***(duplication*** Λ).

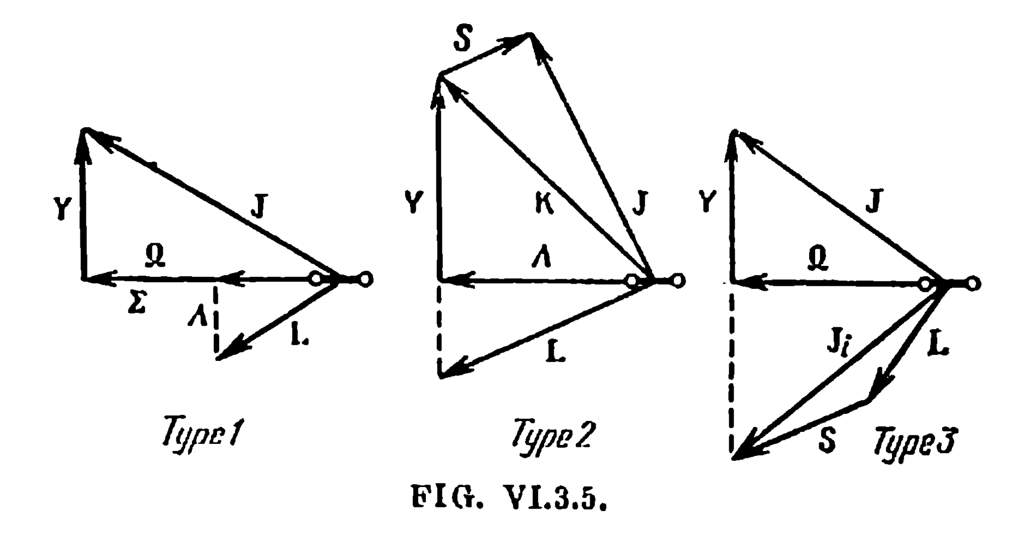


FIG. VI.3.5.

La dégénérescence est également éliminée dans les molécules formées de différents isotopes des mêmes atomes (par exemple, dans les molécules HD, $^{16}O^{18}O$, etc.). Dans le cas de termes moléculaires électroniques provenant des mêmes termes atomiques d'atomes identiques, la duplication Λ du nombre de termes n'a pas lieu.

8° Il existe, pour les spectres électroniques des molécules, des règles de sélection analogues aux règles de sélection pour les spectres atomiques (p. 777):

$$\Delta\Lambda = 0, \pm 1;$$

en accord avec ces règles, seules sont permises les combinaisons de termes $\Sigma \longleftrightarrow \Sigma$, $\Pi \longleftrightarrow \Pi$,... et $\Sigma \longleftrightarrow \Pi$, $\Pi \longleftrightarrow \Delta$,...;

$$\Delta\Sigma = 0,$$

autrement dit, seules sont permises les combinaisons de termes ayant des nombres de spin totaux identiques, et

$$\Delta\Omega = 0, \pm 1.$$

A part des règles indiquées, sont prises en considération l'interdiction intercombinatoire (p. 788):

$$\Delta S = 0,$$

selon laquelle sont interdites les combinaisons entre termes de différentes multiplicités (cette interdiction n'est rigoureusement réalisée que pour les molécules dont les noyaux ont une faible charge totale), ainsi que les règles de sélection liées à la symétrie des termes moléculaires, selon lesquelles seules sont permises les combinaisons de termes positifs avec des termes négatifs et de termes pairs avec des termes impairs.

4. Spectres de vibration des molécules

1° Lorsque les atomes se déplacent de leurs positions d'équilibre, ils peuvent produire dans la molécule des vibrations autour de la position d'équilibre *(vibrations intramoléculaires)*. Ces vibrations peuvent être étudiées par les méthodes de la mécanique analytique (p. 128). En théorie quantique, les vibrations intramoléculaires sont regardées comme le facteur responsable de l'apparition des spectres de vibration des molécules. Les atomes en vibration dans la molécule sont considérés, dans beaucoup de cas, comme des oscillateurs anharmoniques (p. 119).

2° Dans le cas élémentaire d'une molécule diatomique on écrit son énergie potentielle à l'aide du *potentiel de Lennard-Jones:*

$$U(r) = \left(\frac{a}{r^6} - \frac{b}{r_{12}}\right),$$

où a et b sont des constantes, ou bien à l'aide du *potentiel de Morse:*

$$U(\rho) = D(1 - e^{-a\rho})^2,$$

où $\rho = \frac{r - r_e}{r_e}$, a est une constante, r_e la distance d'équilibre entre atomes, correspondant au minimum de $U(r)$; ρ le déplacement relatif des atomes de leurs positions d'équilibre. La grandeur D signifie l'énergie de dissociation de la molécule en atomes (p. 807), $D = U(\infty) - U(0)$. L'équation de Schrödinger pour les vibrations de la molécule est:

$$\frac{d^2\psi}{d\rho^2} + \frac{8\pi^2 I_e}{h^2}[E_v - U(\rho)]\psi = 0,$$

où I_e est le moment d'inertie de la molécule à l'état d'équilibre (p. 819), E_v l'énergie de vibration de la molécule.

3° Lors de faibles vibrations de la molécule $U(\rho) \approx Da^2\rho^2$ et l'équation de Schrödinger se réduit à l'équation de l'oscillateur harmonique (p. 748). Le spectre énergétique de vibration est donné par

$$E_v = h\nu\left(v + \frac{1}{2}\right),$$

où

$$\nu = \frac{a}{2\pi}\sqrt{\frac{2D}{I_e}};$$

ν est la fréquence des vibrations propres de l'oscillateur et $v = 0, 1, 2, 3, \ldots$ est appelé *nombre quantique de vibration* pour lequel a lieu la règle de sélection:

$$\Delta v = \pm 1.$$

La grandeur

$$E_0 = \frac{1}{2}h\nu$$

est appelée *énergie vibrationnelle au point zéro* (p. 749). Les niveaux énergétiques de vibration des molécules considérées sont équidistants.

4° Dans le cas de vibrations anharmoniques d'une molécule diatomique, son spectre énergétique de vibration s'exprime par

$$E_v = h\nu\left(v + \frac{1}{2}\right) - hx\nu\left(v + \frac{1}{2}\right)^2,$$

où

$$x = \frac{h\nu}{4D} \ll 1$$

est la *constante d'anharmonicité.* Le spectre énergétique de vibration d'une molécule diatomique est montré fig. VI.3.6. La distance entre deux niveaux énergétiques voisins

$$\Delta E = h\nu - 2(v + 1)xh\nu$$

décroît avec l'accroissement de v. Dans ce cas il n'y a pas de règles de sélection pour v. L'intensité des raies spectrales diminue rapidement avec l'accroissement de Δv. Les niveaux énergétiques convergent vers la limite $\Delta E = 0$, pour laquelle

$$v_{max} = \frac{1}{2x} - 1$$

et

$$E_{max} = \frac{h\nu}{4x}(1 - x^2) = D(1 - x^2).$$

Etant donné que $x^2 \ll 1$,

$$E_{max} = \frac{h\nu}{4x} = D,$$

autrement dit, l'énergie de vibration maximale de la molécule est égale à son énergie de dissociation D.

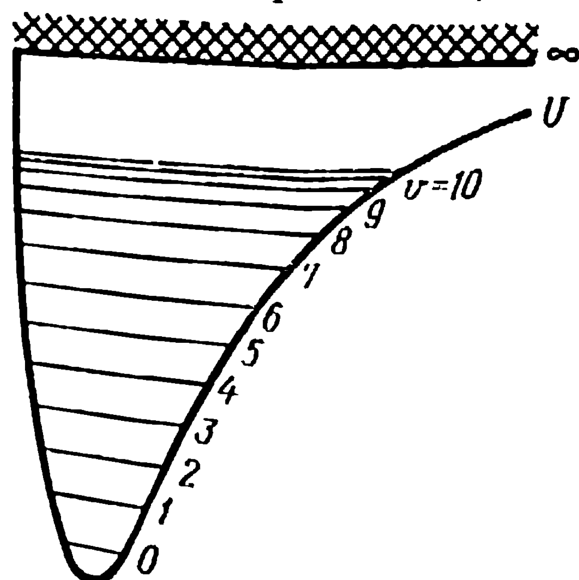


FIG. VI.3.6.

5° Si les différentes positions spatiales des atomes dans la molécule sont séparées par des barrières de potentiel, la rotation interne de la molécule (p. 819) est entièrement freinée et seules sont possibles ses oscillations de torsion (p. 123); le spectre énergétique pour de pe-

tites amplitudes des vibrations de molécules symétriques (C_2H_4, C_2H_6, etc.) est représenté par la formule donnée plus haut (3°) dans laquelle

$$\nu = \frac{n}{\pi} \sqrt{U_0 B},$$

où U_0 est la hauteur de la barrière de potentiel séparant les configurations équilibrées des atomes dans la molécule, n le nombre de minimums identiques de U et B la constante de rotation (p. 244).

5. Spectres de rotation des molécules

1° Deux types fondamentaux de rotation des molécules sont possibles: la rotation de la molécule autour d'une certaine direction ou d'un point et la rotation des parties de la molécule les unes par rapport aux autres *(rotation interne)*. Le phénomène de rotation interne est dû à l'isomérie rotatoire et à toute une série de propriétés physico-chimiques des molécules aux liaisons σ (p. 810).

2° Le caractère de la rotation de la molécule est déterminé par la disposition spatiale des atomes dans la molécule, autrement dit, par la forme de la molécule, qui peut être caractérisée, de même qu'un corps solide, par trois moments principaux d'inertie (p. 78) relatifs aux trois axes principaux de la molécule:

$$I_i = \sum_k m_k r_k^2, \quad i = 1, 2, 3,$$

où m_k est la masse du k-ième atome dans la molécule, et r_k sa distance de l'axe principal correspondant. Les axes principaux des molécules symétriques coïncident avec leurs axes de symétrie, et le plan de symétrie est toujours perpendiculaire à l'un des axes principaux. Si tous les I_i de la molécule sont égaux entre eux, elle est dite alors *toupie sphérique*. Si sont égaux entre eux deux moments d'inertie par rapport aux axes principaux perpendiculaires à l'axe de la molécule, celle-ci est appelée *toupie symétrique*; si tous les trois I_i sont différents, la molécule est dite *toupie asymétrique*. Au premier type se rapportent les molécules P_4, CH_4, CCl_4, etc., au second type, NH_3, PCl_3, BCl_3, etc., au troisième, H_2O, etc.

3° La rotation interne de la molécule est rendue difficile par la présence d'une barrière de potentiel entre différentes positions

d'équilibre lors de la rotation, correspondant à une symétrie déterminée de la molécule. Dans les cas où cette rotation est pratiquement impossible, seule est permise la torsion de la molécule, accompagnée d'oscillations de torsion (p. 123). Si l'énergie des oscillations de torsion est suffisamment grande, la molécule peut franchir la barrière de potentiel et passer à l'état d'équilibre voisin.

4° Le spectre énergétique de rotation d'une molécule diatomique (on suppose que les distances entre les noyaux des atomes sont invariables et égales aux distances d'équilibre r_e) est trouvé par résolution de l'équation de Schrödinger pour le rotateur rigide (p. 751):

$$E_r = \frac{h^2}{8\pi^2 I_e} J(J+1) = hBJ(J+1),$$

où $I_e = Mr_e^2$ est le moment d'inertie de la molécule, B sa *constante de rotation* (p. 214), J le *nombre quantique de rotation*. Le spectre énergétique de rotation des molécules du type d'une toupie sphérique a également le même aspect. La projection du vecteur du moment total **J** sur une direction donnée de rotation de la molécule est déterminée par le nombre quantique

$$M_J = \pm J, \pm (J-1), \ldots, 0,$$

acceptant $2J + 1$ valeur. Si **J** est projeté sur la direction du champ magnétique, M_J prend le sens d'un nombre quantique magnétique (p. 752). Le nombre J obéit à la règle de sélection:

$$\Delta J = 0, \pm 1 \quad \text{quand } \Lambda \neq 0,$$
$$\Delta J = \pm 1 \quad \text{quand } \Lambda = 0.$$

La prise en considération de l'étirement de la molécule (de l'élasticité du rotateur) au cours de sa rotation modifie le spectre énergétique de rotation de la molécule:

$$E_r = hBJ(J+1) + hD_e J^2 (J+1)^2,$$

où $D_e = \text{const} \ll B$ est une constante caractérisant l'élasticité du rotateur.

5° La rotation de la molécule fait apparaître un champ magnétique intramoléculaire. Dans ce champ les termes dégénérés répondant aux valeurs $\pm \Lambda$ se dédoublent en termes positif et négatif. L'élimination de la dégénérescence n'a lieu que lorsque $\Lambda > 0$ (pour $\Lambda = 0$ il n'y a pas de dégénérescence). On l'appelle duplication Λ (p. 81?).

6° Les fonctions d'onde caractérisant les états de rotation correspondant à un état électronique donné dans la molécule

sont représentées sous la forme $\psi = \psi_é \psi_r$, où $\psi_é$ est la fonction d'onde électronique et ψ_r la fonction d'onde de rotation de type correspondant. Chacune des fonctions $\psi_é$ et ψ_r peut être aussi bien positive que négative suivant que change le signe de la fonction $\psi_é$ avec le changement de signe des coordonnées de tous les électrons et noyaux, et le signe de la fonction ψ_r avec le changement de signe des coordonnées des noyaux seulement. Les fonctions ψ_r répondant aux valeurs paires de J sont positives, tandis que celles répondant aux valeurs impaires de J sont négatives. Dans le cas d'une fonction électronique positive $\psi_{é+}$ tous les termes de rotation aux J pairs sont positifs: $\psi_+ = \psi_{é+} \psi_0$, $\psi_{é+} \psi_2$, $\psi_{é+} \psi_4, \ldots$, $\psi_{é+} \psi_{2n}$. Les termes aux J impairs sont négatifs: $\psi_- = \psi_{é+} \psi_1$, $\psi_{é+} \psi_3$, ..., $\psi_{é+} \psi_{2n+1}$. Pour une fonction électronique négative $\psi_{é-}$ aux J pairs correspondent les termes de rotation négatifs: $\psi_- = \psi_{é-} \psi_0$, $\psi_{é-} \psi_2$,..., $\psi_{é-} \psi_{2n}$, aux J impairs, des termes de rotation positifs $\psi_+ = \psi_{é-} \psi_1$, $\psi_{é-} \psi_3$, $\psi_{é-} \psi_5$, ..., $\psi_{é-} \psi_{2n+1}$. Pour une fonction d'onde de rotation donnée ψ_r le signe positif ou négatif du terme dépend de la symétrie de $\psi_é$. Pour les molécules constituées d'atomes identiques on distingue les *termes symétriques* (*s*), auxquels se rapportent tous les termes positifs et pairs, ainsi que les termes négatifs et impairs, et les *termes antisymétriques* (*a*), auxquels se rapportent tous les termes négatifs et pairs, ainsi que les termes positifs et impairs. Seuls peuvent se combiner les termes positifs avec les termes négatifs (p. 816) et aussi les termes symétriques entre eux et les termes antisymétriques entre eux. La combinaison des termes de rotation dans les molécules ayant des noyaux identiques étant impossible, les molecules monoisotopiques de type X_2 n'ont pas de spectre de rotation.

7° En vertu de l'interdiction des combinaisons des termes symétriques avec les termes antisymétriques, les termes de rotation des molécules ayant des noyaux identiques se divisent en deux groupes qui ne se combinent pas entre eux. La prise en considération du spin nucléaire et des propriétés de symétrie de la fonction d'onde complète de la molécule (p. 808) conduit à la formation de deux systèmes de termes, dont l'un correspond aux valeurs paires, l'autre aux valeurs impaires du nombre de rotation J. Comme la grandeur $2J + 1$ détermine le poids statistique d'un état de rotation donné (p. 770) et, donc, l'intensité des raies spectrales (p. 770), les raies se rapportant à chacun des systèmes de termes se distinguent par leur intensité *(alternance des intensités)*. Les termes de valeur plus importante de $2J + 1$ sont dits *termes ortho*, les termes de valeur moindre de $2J + 1$ *termes para*. Par exemple, pour la molécule H_2, les termes para

avec $J = 0$ sont symétriques et les termes ortho avec $J = 1$ sont antisymétriques. Le rapport des intensités des raies spectrales de l'orthohydrogène et du parahydrogène donne:

$$\frac{2\,J_{\text{ortho}} + 1}{2\,J_{\text{para}} + 1} = 3 : 1.$$

8° Dans le cas général, la distribution de l'intensité entre les raies du spectre de rotation est liée à la distribution des molécules suivant les états de rotation caractérisés par les nombres J. Si cette distribution représente la distribution de Boltzmann (p. 234), on a:

$$N(J) = N\,\frac{(2\,J + 1)\,e^{-\frac{hBJ(J+1)}{kT}}}{\sum\limits_{J=0}^{\infty} (2\,J + 1)\,e^{-\frac{hBJ(J+1)}{kT}}},$$

où $N(J)$ est le nombre de molécules occupant le J-ième niveau de rotation, N le nombre de molécules total.

9° Le spectre énergétique d'une molécule du type toupie symétrique est défini par

$$E_r = hBJ(J + 1) + h(A - B)K^2 + h\,\frac{A_1A_2}{A}\left(k_1 - k_2\,\frac{A}{A_1}\right)^2,$$

où

$$A = \frac{h}{4\pi I_{\parallel}},\quad B = \frac{h}{4\pi I_{\perp}},\quad A_1 = \frac{h}{4\pi I_{\parallel}^{(1)}},\quad A_2 = \frac{h}{4\pi I_{\parallel}^{(2)}},$$

$I_{\parallel}$ est le moment d'inertie de la molécule par rapport à son axe, $I_{\parallel}^{(1)}$ et $I_{\parallel}^{(2)}$ les moments d'inertie par rapport à l'axe de la molécule de ses parties en rotation, $I_{\perp}$ le moment d'inertie par rapport aux axes perpendiculaires à l'axe de la molécule, J, K, k_1 et k_2 les nombres quantiques de rotation acceptant les valeurs:

$$J = K,\ K + 1,\ K + 2,\ \ldots;\quad K = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots;$$

$$k_2 = \pm K;\ k_1 = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots$$

Les deux premiers termes de la formule se rapportent à la rotation de la molécule comme un tout, le troisième, à la rotation interne de la molécule (p. 819).

6. Spectres électroniques de vibration des molécules

1° Les *spectres électroniques de vibration des molécules* sont liés aux transitions électroniques dans la molécule dont les atomes oscillent autour de leurs positions d'équilibre. La superposition du spectre de vibration au spectre électronique se manifeste en ce qu'à chaque raie de transition électronique correspond une série de raies de vibration constituant une *bande*.

2° Pour la raie zéro (cf. 3°) de la bande de structure vibratoire du spectre électronique d'une molécule diatomique, l'abstraction étant faite des fréquences de rotation, est vraie la *formule de Deslandres :*

$$\nu_{\acute{e}\,v} = \nu_0 + \nu'\left(v' + \frac{1}{2}\right) - \nu' x'\left(v' + \frac{1}{2}\right)^2 - \nu\left(v + \frac{1}{2}\right) + \nu x\left(v + \frac{1}{2}\right)^2,$$

où l'accent se rapporte au niveau supérieur de la transition, et les grandeurs ν et x sont données par les formules p. 817.

3° Les bandes exprimées par la formule de Deslandres se divisent en séries de bandes transversales et longitudinales. Les fréquences du spectre correspondant à v = const (au niveau inférieur fixé de la transition) constituent la *série transversale de Deslandres*, caractéristique des spectres d'absorption des molécules. Les fréquences correspondant à v' = const (au niveau supérieur fixé de la transition) constituent la *série longitudinale de Deslandres*, caractéristique des spectres d'émission des molécules. La constante caractéristique de chaque série de bandes est la *raie zéro* correspondant à la transition $v = 0 \longleftrightarrow v' = 0$. La fréquence de la raie zéro de la *bande zéro* ne coïncide pas avec la fréquence $\nu_{\acute{e}}$ du fait de la présence d'une énergie vibrationnelle au point zéro de la molécule (p. 817).

4° Dans les spectres électroniques de vibration les bandes correspondant aux différentes valeurs de $\Delta v = v' - v$ ont une intensité de même ordre de grandeur dans une grande gamme de Δv. Ceci est dû à ce que les probabilités de transitions dans les spectres électroniques sont déterminées par la variation de la configuration électronique de la molécule, appelée *moment de transition de la molécule.* Dans le cas d'une transition électronique non interdite toutes valeurs de Δv sont possibles. Les transitions électroniques dans les molécules s'opèrent d'une façon si rapide qu'au cours de ces transitions ne peuvent varier sensiblement ni les

distances entre noyaux des molécules ni leurs impulsions. Les transitions électroniques se produisent pour une distance entre noyaux pratiquement constante. Ce caractère stationnaire des facteurs extérieurs durant la transition s'explique par la grande probabilité de celle-ci, et, donc, par la grande intensité des raies spectrales correspondantes *(principe de Franck-Condon)*.

5° La différence entre les fréquences des vibrations propres et entre les constantes d'anharmonicité (p. 818) des molécules isotopiques est responsable de l'*effet isotopique de vibration* dans les spectres électroniques de vibration des molécules. La différence des moments d'inertie des molécules isotopiques conduit à l'*effet isotopique de rotation*. Pour la bande zéro du spectre électronique de vibration le déplacement isotopique de vibration des raies est égal à

$$\Delta\nu_0 = (y - 1)\left[\nu'\left(v' + \frac{1}{2}\right) - \nu\left(v + \frac{1}{2}\right)\right] -$$
$$- (y^2 - 1)\left[\nu'x'\left(v' + \frac{1}{2}\right)^2 - \nu x\left(v + \frac{1}{2}\right)^2\right],$$

où $y = \sqrt{\mu'/\mu}$, μ', μ sont les masses réduites des molécules de deux compositions isotopiques, $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, m_1 et m_2 sont les masses de chacun des atomes de la molécule (d'une molécule diatomique), x tient la valeur indiquée p. 818. Dans l'expression de ν figure le moment d'inertie $I = \mu R^2$, où R est le rayon réduit de la molécule.

7. Spectres de rotation-vibration

1° Les *spectres de rotation-vibration des molécules* sont obtenus lors de la variation de l'état de vibration s'accompagnant pratiquement toujours de la variation de leur état de rotation. Les fréquences du spectre de rotation sont en ordre de grandeur des centaines et des milliers de fois plus petites que les fréquences du spectre de vibration. Par suite de la superposition des petites fréquences de rotation aux fréquences de vibration, les raies du spectre de vibration se transforment en *bandes*, formant des groupes de raies de rotation. Il en résulte l'apparition d'une structure de raies et de bandes du spectre de rotation-vibration. Etant donné que $E_é \gg E_r$, la rotation de la molécule n'agit pratiquement pas sur le spectre correspondant aux transitions électroniques.

2° La fréquence ν_{rv} du spectre de rotation-vibration, si on néglige l'interaction des vibrations avec la rotation et que l'on

tienne compte de l'invariance de l'énergie électronique de la molécule, est:

$$\nu_{rv} = \nu_r + \nu_v = \frac{E'_r - E_r}{h} + \frac{E'_v - E_v}{h},$$

où par accents sont désignés les états énergétiques supérieurs dans chacune des transitions.

3° Lors de la superposition du spectre de rotation-vibration au spectre électronique, les fréquences $\nu_{r\,v\,é}$ du spectre d'une molécule diatomique, compte tenu de l'anharmonicité de l'oscillateur (p. 818) et de l'élasticité du rotateur (p. 820), sont égales à

$$\nu_{r\,v\,é} = \nu_é + \left[\nu\left(v + \frac{1}{2}\right) - \nu x\left(v + \frac{1}{2}\right)^2\right] + [B_v\,J(J + 1) + \\ + D_v J^2(J + 1)^2],$$

où

$$B_v = B - \alpha_e\left(v + \frac{1}{2}\right) + \gamma_e\left(v + \frac{1}{2}\right)^2,$$

$$D_v = D_e + \beta_e\left(v + \frac{1}{2}\right),$$

α_e, β_e, γ_e sont des constantes empiriques correspondant à l'état d'équilibre de la molécule (cf. les autres notations pp. 818 et 820). Dans ce cas $x \ll 1$, $D_v \ll B_v$, de sorte que l'influence des seconds termes entre crochets n'est importante que pour de très grandes valeurs de v et J.

4° La *structure vibratoire (de bandes)* du spectre de rotation-vibration des molécules diatomiques est caractérisée par les fréquences

$$\nu_{rv}^{v} = \nu(1 - x)(v' - v) - \nu x(v'^2 - v^2),$$

où $v' - v = \Delta v$ est la différence des nombres quantiques de vibration des niveaux supérieur et inférieur de la transition. La structure se présente sous la forme de séries de raies et le numéro de la série est déterminé par la valeur de v pour le niveau initial. Les raies de chaque série convergent vers la fréquence limite ν_{cr} (v_{max}) correspondant à la dissociation moléculaire. L'intensité des raies décroît rapidement avec l'accroissement de Δv.

5° La *structure rotatoire* du spectre de rotation-vibration est caractérisée par les fréquences

$$\nu_{rv}^{r} = \nu_{rv}^{v} + B_0[J'(J' + 1) - J(J + 1)]$$

obtenues à partir de l'expression de l'énergie de rotation

$$E_r = h[B_v J(J+1) - D_v J^2(J+1)^2]$$

en supposant la rigidité de la molécule ($D_v = 0$) et en substituant $B_v = B_0$. Conformément à la règle de sélection $\Delta J = 0, \pm 1$ (p. 820), pour les molécules dont l'état normal est l'état Σ, on obtient les groupes suivants de raies:

$J' = J + 1$, $\nu_{+1} = \nu_v + 2B_0(J+1)$ *branche R* ou *branche positive*;

$J' = J - 1$, $\nu_{-1} = \nu_v - 2B_0J$ *branche P* ou *branche négative* de la bande.

Les raies de cette branche commencent par $J = 1$. Les branches R et P d'une bande donnée constituent une série de raies équidistantes et une raie isolée ν_v, appelée *raie zéro* de la bande. La distance entre raies voisines constitue $\Delta\nu = 2B_0$.

8. Spectres combinatoires des molécules

1° Le *phénomène de diffusion combinatoire*[1]) consiste en ce que dans le spectre de la lumière diffusée par un corps liquide ou solide quelconque sont observées, à côté des fréquences d'émission de la source de lumière, des fréquences décalées. Les raies du spectre auxquelles correspondent $\nu_S = \nu_0 - \nu$ sont dites *raies de Stokes* et les raies avec $\nu_a = \nu_0 + \nu$ *raies anti-Stokes*, où ν_0 est la fréquence initiale de la lumière. Les raies ν_S, ν_a constituent le *spectre combinatoire des molécules*.

2° Une explication simplifiée de l'apparition du phénomène de diffusion combinatoire conduit aux deux schémas suivants de l'interaction d'un quantum avec une molécule diffusante:

$$h\nu_0 + E(1) \rightarrow h\nu_S + E(2),$$
$$h\nu_0 + E(2) \rightarrow h\nu_a + E(1),$$

où $E(1)$ et $E(2)$ sont les énergies des états de vibration de la molécule; il est à noter que $E(1) < E(2)$. Dans le premier cas, au compte de l'énergie du photon $h\nu_0$, la molécule passe à un état énergétique de vibration plus élevé, et il apparaît alors un photon diffusé de fréquence moindre ν_S. Dans le second cas, l'in-

[1]) Ce phénomène fut découvert simultanément et indépendamment par les physiciens soviétiques Mandelchtam et Landsberg et les physiciens hindous Raman et Krishnan. (*N. de R.*)

teraction du quantum avec une molécule excitée fait apparaître un photon diffusé de fréquence plus importante ν_a, égale à

$$\nu_a = \nu_0 + \frac{E(2) - E(1)}{h}$$

et fait passer la molécule à un état de vibration plus bas.

3° On observe les spectres combinatoires de vibration, de rotation, de rotation-vibration. On peut observer également un spectre combinatoire dans lequel la différence des fréquences représente l'énergie d'excitation électronique de la molécule. Dans les spectres combinatoires, à la différence des spectres ordinaires, les règles de sélection ne sont pas obligatoires et sont remplacées par des nouvelles. Ainsi, dans les spectres électroniques on observe parfois des raies combinatoires enfreignant l'interdiction $\Delta\Sigma = 0$. Les spectres de rotation, eux, obéissent à une nouvelle règle de sélection $\Delta J = 0, \pm 2$.

9. Spectres continus et diffus des molécules

1° Les spectres *continus (continus vrais)* sont caractérisés par ce qu'on ne peut les décomposer en raies ou bandes isolées (p. 823) même utilisant des appareils spectroscopiques de pouvoir séparateur élevé. Les spectres continus des molécules sont liés à la transition de la molécule de l'état discret de $E < 0$ à l'état continu de $E > 0$. A cette transition correspond aussi bien l'ionisation de la molécule que sa dissociation en ions ou en atomes neutres. La dissociation moléculaire peut être provoquée par accroissement de l'énergie de vibration de la molécule jusqu'à des limites telles qu'aux transitions vibratoires de la molécule correspondent les nombres quantiques $v \geqslant v_{max}$ (p. 819). Par suite de telles transitions la molécule passant à un état excité non stable ne retourne plus à l'état initial, mais se dissocie. La dissociation de la molécule peut être également provoquée par collision de celle-ci avec une particule suffisamment rapide (avec un neutron par exemple) ainsi que par absorption d'un quantum de rayonnement d'énergie suffisamment grande *(photodissociation)*.

2° L'apparition d'un spectre continu peut être due également à l'échauffement de la substance. A chaud, les molécules acquièrent de plus grandes vitesses de mouvement. Il se produit alors un élargissement par effet Doppler des fréquences des raies spectrales (p. 707) qui conduit à la superposition des raies et même à la fusion de certaines raies en bandes. Une autre cause de la

transformation du spectre discret de la molécule en spectre continu est l'élargissement par choc des raies (p. 708). Ce phénomène se manifeste surtout dans les spectres de rotation et est dû à une réduction notable de la vie de la molécule excitée et à une augmentation correspondante de la largeur des raies. Par suite de l'élargissement par choc les raies de rotation dans la bande peuvent se recouvrir à un tel point que disparaisse la structure rotatoire de celle-ci, et sous pressions et températures encore plus élevées de la substance l'élargissement par choc peut conduire au recouvrement de bandes isolées.

3° Les *spectres diffus des molécules* sont caractérisés par le flou des bandes dû à l'élargissement intense des raies de rotation même sous pressions et températures ordinaires. Les durées de vie de la molécule excitée correspondant à cet élargissement sont d'un ou de deux ordres inférieures à la période de rotation de la molécule. Ceci étant, disparaissent la quantification de la rotation et donc la structure rotatoire discrète des bandes du spectre. Ce phénomène est provoqué par la *prédissociation de la molécule*. Elle se distingue de la dissociation par le fait que cette dernière se produit immédiatement d'un état discret stable de la molécule à un état non stable caractérisé par la partie de la courbe potentielle (p. 806) correspondant à la répulsion des atomes dans la molécule, alors que la prédissociation surgit d'un état excité de la molécule. La prédissociation s'opère en deux étapes: en premier lieu, la transition de la molécule de l'état normal à l'état excité et, ensuite, la transition de la molécule de l'état excité à un état non stable (mais non à l'état normal).

Les probabilités de transition de la molécule à l'état normal avec émission d'un quantum de rayonnement et de transition par prédissociation à un état non stable déterminent la durée de vie de la molécule excitée. Pour la grande probabilité d'une transition non radiative, la vie de la molécule excitée se trouve être courte et la largeur correspondante des raies spectrales, grande.

10. Spectroscopie moléculaire

1° L'étude des spectres électroniques des molécules donne l'information du même caractère que celle des spectres atomiques. Cependant on obtient, de plus, les renseignements sur les niveaux électroniques, sur la distribution de la densité électronique et la nature des liaisons chimiques dans les molécules. L'étude des spectres de vibration et de rotation des molécules présente un intérêt particulier pour l'étude de la structure des molécules.

2° Les spectres de vibration et de rotation des molécules fournissent l'information sur la disposition spatiale des atomes dans les molécules, sur la distribution des molécules suivant ces configurations. La connaissance de la forme des molécules permet de comprendre la nature des liaisons de valence dans celles-ci et, par conséquent, d'éclaircir les aptitudes réactionnelles des molécules. Les spectres de rotation se trouvent généralement dans l'infrarouge, leurs détection et étude exigent des appareils spéciaux de spectroscopie infrarouge.

3° Grâce à la simplicité des méthodes, la spectroscopie de diffusion combinatoire présente toute une série d'avantages sur la spectroscopie infrarouge. On détermine par l'analyse des spectres combinatoires les fréquences des vibrations propres des molécules (d'après les spectres de vibration), les moments d'inertie et la forme des molécules (d'après les spectres de rotation) ainsi que les variations structurales que subissent les molécules lors de modifications de l'état d'agrégation de la substance.

4° La *radiospectroscopie* représente un nouveau domaine de la spectroscopie moléculaire. Elle est basée sur l'effet Zeeman (p. 789). La radiospectroscopie étudie, à la différence de la spectroscopie optique, non des raies spectrales dues aux transitions d'un niveau quelconque au sous-niveau d'un autre niveau, mais des raies spectrales engendrées par les transitions entre ces mêmes sous-niveaux. Les fréquences de ces raies spectrales (p. 790) se trouvent dans le domaine des ondes ultra-courtes (à partir de dizaines de MHz). La figure spectrale des radiospectres moléculaires se trouve être beaucoup plus simple que celle des spectres optiques, ce qui est d'une importance majeure dans l'analyse des spectres moléculaires complexes, qui dans la région optique sont constitués parfois de plusieurs milliers de raies. Ce fait, de même que la haute sensibilité des méthodes radiospectroscopiques, très supérieure à la sensibilité des méthodes optiques, assure à la radiospectroscopie de grands avantages dans le domaine des spectres moléculaires.

11. Ionisation des atomes et des molécules

1° L'ionisation, c'est-à-dire l'arrachement des électrons des atomes ou des molécules, est provoquée par nombreuses causes. *L'ionisation thermique* est due à l'accroissement de l'énergie de l'agitation thermique des atomes ou des molécules et a lieu lors de l'échauffement de la substance par suite des collisions des atomes ou des molécules possédant une énergie suffisante. *L'ioni-*

sation par choc électronique ou *ionique* se produit dans les champs électriques intenses. Les ions ou les électrons y acquièrent une énergie suffisante pour l'ionisation, lors de la décharge électrique par exemple (p. 406). A ce même type se rapporte l'ionisation provoquée par les radiations corpusculaires (par les particules alpha, les protons, les deutons, etc., au cours de leur passage à travers la substance). La *photo-ionisation* est due à l'absorption de quanta de rayonnement électromagnétique d'énergie suffisante par les molécules et les atomes.

2° L'énergie d'ionisation de l'atome dépend de la charge de son noyau et de la couche à partir de laquelle est arraché l'électron; elle augmente à peu près quadratiquement avec l'accroissement du nombre atomique Z et diminue à mesure qu'augmente le nombre n de la couche. L'énergie d'ionisation est numériquement égale à l'énergie de liaison de l'électron avec l'atome à un niveau donné (p. 774).

3° Au cours de l'ionisation thermique, observée le plus souvent dans les flammes, par suite des collisions des atomes ou des molécules, l'énergie cinétique de leur mouvement relatif se transforme en travail d'ionisation:

$$\frac{mv^2}{2} = e\varphi,$$

où φ est le potentiel d'ionisation (p. 405). Le taux d'ionisation α égal au rapport de la pression partielle (p. 159) du gaz des ions à la somme des pressions du gaz des ions et du gaz des atomes neutres est calculé, aux conditions de l'équilibre thermodynamique dans les flammes, d'après la *formule de Saha pour la constante d'équilibre d'ionisation* $K_é$ (pp. 210 et 211):

$$K_é = \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}\, p = \left(\frac{2\pi m}{h^2}\right)^{3/2} (kT)^{5/2}\, e^{-e\varphi/kT},$$

où p est la pression du gaz, m la masse de l'électron, φ le potentiel d'ionisation, k la constante de Boltzmann (p. 158), T la température absolue. La formule de Saha est une formule approchée, puisqu'elle ne tient pas compte de la distribution électronique entre différents états dans les atomes du gaz, ainsi que des processus d'excitation des atomes sans ionisation et des transitions non radiatives (p. 804).

4° Dans le cas des molécules, outre l'ionisation des atomes, peut avoir lieu l'*ionisation dissociative*, autrement dit, la désintégration de la molécule suivie de l'ionisation des produits de la dissociation. L'ionisation dissociative est caractéristique des molécules polyatomiques. Les ions surgissant alors peuvent se fixer

aux atomes ou molécules neutres en formant des ions complexes. Le taux d'ionisation pour une énergie donnée des particules ionisantes est lié à la répartition des atomes et des molécules entre les états énergétiques.

5° La photo-ionisation a lieu pour des énergies des photons égales ou supérieures à l'énergie d'ionisation:

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \geqslant e\varphi,$$

où φ est le potentiel d'ionisation, ν la fréquence du photon. Le seuil photoélectrique de la photo-ionisation est:

$$\nu_0 = \frac{e\varphi}{h}.$$

La photo-ionisation par photons durs (gamma, X) est liée principalement à l'arrachement des atomes d'électrons appartenant aux couches électroniques profondes, la photo-ionisation par photons optiques, à l'arrachement des atomes d'électrons périphériques (d'électrons de valence). Sont possibles également des processus de *photoneutralisation d'ions négatifs* liés à l'arrachement de ceux-ci d'électrons périphériques en excès.

CHAPITRE 4

Noyau atomique[1])

1. Constitution et dimensions des noyaux atomiques

1° Tous les noyaux atomiques sont constitués de particules élémentaires (p. 892) appelées *protons* et *neutrons*. Les protons possèdent une charge positive, égale en valeur absolue à la charge de l'électron, les neutrons sont électriquement neutres. Le proton et le neutron sont considérés comme deux états de charge différents d'une même particule appelée *nucléon*.

2° On appelle *charge Z du noyau* la quantité de protons dans ce noyau; elle est égale au *nombre atomique* de l'élément chimique correspondant du système périodique de Mendéléev (p. 797). A l'heure actuelle, sont connus des noyaux avec Z de 1 (hydrogène) à 104 (kourtchatovium). Le nombre de neutrons dans le noyau est désigné par N. Pour tous les noyaux $N \geqslant Z$ (excepté ${}^{1}_{1}H$, ${}^{3}_{2}H$ et autres noyaux à déficit neutronique découverts récemment). Pour les noyaux légers le rapport $N/Z \approx 1$; pour les noyaux des éléments de la fin du système périodique $N/Z \approx 1{,}6$.

3° On appelle *nombre massique* ou *de masse* du noyau le nombre de nucléons total contenus dans le noyau $A = N + Z$. Les noyaux ayant un même Z, mais A différents (c'est-à-dire N différents) sont appelés *isotopes*. Les noyaux ayant un même A, mais Z différents sont appelés *isobares*. Un noyau concret avec A et Z donnés est parfois dit *nuclide*. On représente le noyau par le symbole général suivant: ${}^{A}_{Z}X$ ou X^{A}_{Z}, X étant le symbole désignant l'élément chimique de Z donné.

4° A l'heure actuelle, sont connus environ 300 isotopes stables et plus de 1 000 isotopes non stables (radioactifs). Les isobares

[1]) Toutes les formules de ce chapitre sont données en u. du système de Gauss.

stables forment généralement des *paires*. Parmi les noyaux légers on ne rencontre pas d'isobares stables. Les paires isobares stables, à l'exception des paires de $A = 113$ et 123, ont des A, Z et N pairs. Il est à noter que les charges Z des membres de la paire diffèrent de deux unités.

59 paires isobares stables et cinq *triades* isobares nous sont connues.

Paires isobares

A	Paire		A	Paire		A	Paire	
36	$_{16}$S	$_{18}$Ar	104	$_{44}$Ru	$_{46}$Pd	152	$_{62}$Sm	$_{64}$Gd
40	$_{18}$Ar	$_{20}$Ca	106	$_{46}$Pd	$_{48}$Cd	154	$_{62}$Sm	$_{64}$Gd
46	$_{20}$Ca	$_{22}$Ti	108	$_{46}$Pd	$_{48}$Cd	156	$_{64}$Gd	$_{66}$Dy
48	$_{20}$Ca	$_{22}$Ti	110	$_{46}$Pd	$_{48}$Cd	158	$_{64}$Gd	$_{66}$Dy
54	$_{24}$Cr	$_{26}$Fe	112	$_{48}$Cd	$_{50}$Sn	160	$_{64}$Gd	$_{66}$Dy
58	$_{26}$Fe	$_{28}$Ni	113	$_{48}$Cd	$_{49}$In	162	$_{66}$Dy	$_{68}$Er
64	$_{28}$Ni	$_{30}$Zn	114	$_{48}$Cd	$_{50}$Sn	164	$_{66}$Dy	$_{68}$Er
70	$_{30}$Zn	$_{32}$Ge	116	$_{48}$Cd	$_{50}$Sn	168	$_{68}$Er	$_{70}$Yb
74	$_{32}$Ge	$_{34}$Se	120	$_{50}$Sn	$_{52}$Te	170	$_{68}$Er	$_{70}$Yb
76	$_{32}$Ge	$_{34}$Se	122	$_{50}$Sn	$_{52}$Te	174	$_{70}$Yb	$_{72}$Hf
78	$_{34}$Se	$_{36}$Kr	123	$_{51}$Sb	$_{52}$Te	176	$_{70}$Yb	$_{72}$Hf
80	$_{34}$Se	$_{36}$Kr	126	$_{52}$Te	$_{54}$Xe	180	$_{72}$Hf	$_{74}$W
82	$_{34}$Se	$_{36}$Kr	128	$_{52}$Te	$_{54}$Xe	184	$_{74}$W	$_{76}$Os
84	$_{36}$Kr	$_{38}$Sr	132	$_{54}$Xe	$_{56}$Ba	186	$_{74}$W	$_{76}$Os
86	$_{36}$K	$_{38}$Sr	134	$_{54}$Xe	$_{56}$Ba	190	$_{76}$Os	$_{78}$Pt
92	$_{40}$Zr	$_{42}$Mo	138	$_{56}$Ba	$_{58}$Ce	192	$_{76}$Os	$_{78}$Pt
94	$_{40}$Zr	$_{42}$Mo	142	$_{58}$Ce	$_{60}$Nd	196	$_{78}$Pt	$_{80}$Hg
98	$_{42}$Mo	$_{44}$Ru	144	$_{60}$Nd	$_{62}$Sm	198	$_{78}$Pt	$_{80}$Hg
100	$_{42}$Mo	$_{44}$Ru	148	$_{60}$Nd	$_{62}$Sm	204	$_{80}$Hg	$_{82}$Pb
102	$_{44}$Ru	$_{46}$Pd	150	$_{60}$Nd	$_{62}$Sm			

Triades isobares

A	Triade			A	Triade		
50	$_{22}$Ti	$_{23}$V	$_{24}$Cr	130	$_{52}$Te	$_{54}$Xe	$_{56}$Ba
96	$_{40}$Zr	$_{42}$Mo	$_{44}$Ru	136	$_{54}$Xe	$_{56}$Ba	$_{58}$Ce
124	$_{50}$Sn	$_{52}$Te	$_{54}$Xe				

5° Les noyaux constitués d'un nombre pair (impair) de protons et d'un nombre pair (impair) de neutrons sont dits noyaux *pairs-pairs (impairs-impairs)*. Les noyaux constitués d'un nombre pair (impair) de protons et d'un nombre impair (pair) de neutrons sont dits noyaux *pairs-impairs (impairs-pairs)*.

6° Les noyaux n'ont pas de limite exprimée nettement. C'est pourquoi le *rayon nucléaire* a un sens conventionnel. On détermine le rayon nucléaire par la formule empirique:

$$R = R_0 A^{1/3}, \text{ où } R_0 = (1{,}3 \div 1{,}7) \cdot 10^{-13} \text{ cm}.$$

Le volume du noyau est proportionnel au nombre de nucléons contenus dans lui. La densité de la substance nucléaire est constante pour tous les noyaux. Sa valeur en ordre de grandeur est égale à $\delta \sim 10^{14}$ g/cm³ $= 10^8$ t/cm³. L'hypothèse que les noyaux ont une forme sphérique n'est pas toujours vraie (p. 840).

2. Energie de liaison des noyaux. Forces nucléaires

1° On appelle *énergie de liaison du noyau* (énergie de liasion des nucléons dans le noyau) $\Delta W(A, Z)$ la différence entre les énergies des protons et des neutrons et leurs énergies à l'état libre:

$$\Delta W(A, Z) = \{M_{\text{noy}} - [ZM_{\text{p}} + (A - Z)M_{\text{n}}]\} c^2,$$

où M_{noy} est la masse du noyau, M_{p} et M_{n} les masses du proton et du neutron. Si ΔW est exprimé en MeV et M_{noy}, M_{p}, M_{n} en unités atomiques de masse (p. 932), on a:

$$\Delta W(A, Z) = 931{,}141 \ \{M_{\text{noy}} - [1{,}007\,595\,7Z + 1{,}008\,982\,(A - Z)]\}$$

ou bien

$$\Delta W(A, Z) = 931{,}141 \{M - [1{,}008\,144\,5Z + 1{,}008\,982\,(A - Z)]\},$$

où M est la masse de l'atome. L'énergie de liaison du noyau est négative et égale en valeur absolue au travail qu'il faut dépenser pour désintégrer le noyau en ses nucléons. Généralement on comprend sous l'énergie de liaison du noyau la grandeur positive ΔW.

L'énergie de liaison du noyau s'exprime par la masse de l'atome neutre de la manière suivante:

$$\Delta W = \{M_{\text{at}}\,(A, Z) - [ZM_{\text{H}} + (A - Z)M_{\text{n}}]\}c^2,$$

où M_{H} est la masse de l'atome d'hydrogène ${}^1_1\text{H}$.

On appelle *énergie spécifique de liaison* du noyau la grandeur $\Delta W/A$, égale à l'énergie moyenne de liaison rapportée à un nucléon.

2° On appelle *défaut de masse*[1]), la différence entre la masse de l'atome, évaluée en u.a.m., et le nombre massique:

$$\Delta = M - A.$$

La dépendance $\Delta(A)$ observée expérimentalement est décrite de façon satisfaisante par l'équation

$$\Delta \approx [0{,}01\,(A - 100)^2 - 64]\cdot 10^{-3} \quad \text{u.a.m.}$$

Le ***coefficient de tassement (packing fraction)***

$$P = \frac{\Delta}{A} = \frac{M}{A} - 1$$

représente le défaut de masse «spécifique» rapporté à un nucléon. La dépendance de l'énergie de liaison spécifique, du défaut de masse et du coefficient de tassement vis-à-vis du nombre de masse A du noyau est montrée fig. VI.4.1.

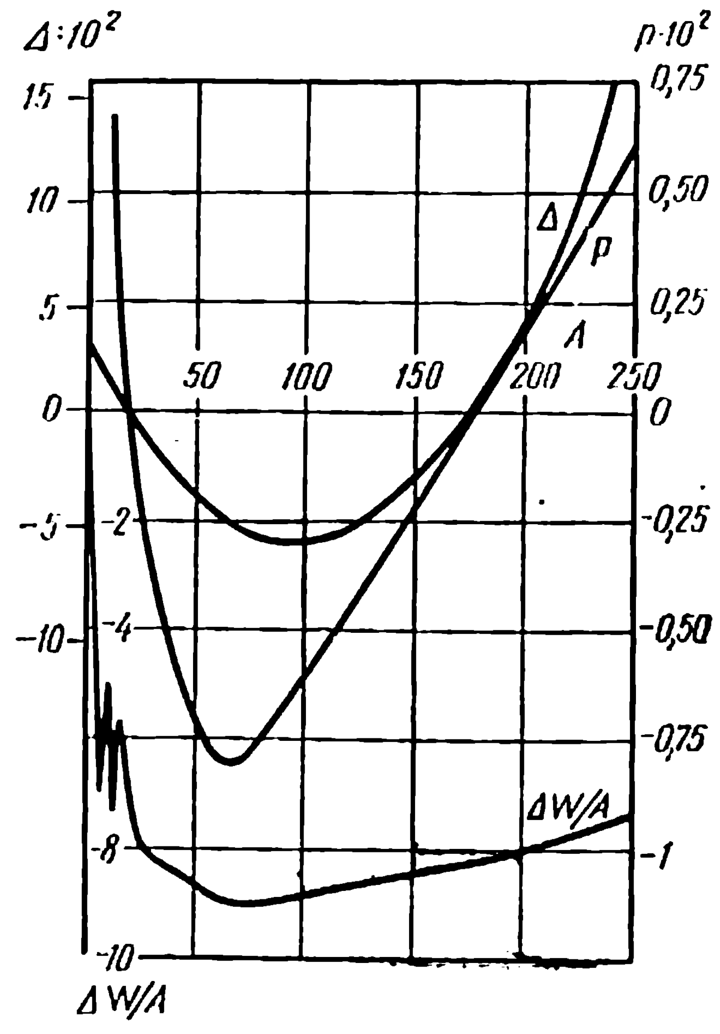


FIG. VI.4.1.

[1]) On comprend souvent sous défaut de masse la grandeur $\Delta W\,(A,\,Z)/c^2$.

3° La valeur de l'énergie de liaison du noyau détermine sa *stabilité envers la désintégration*. Dans le cas où pour les atomes d'isobares voisins (p. 832):

$$M(A, Z) > M(A, Z + 1),$$

où M est la masse de l'atome, de sorte que pour l'énergie de liaison des noyaux

$$\Delta W(A, Z) > \Delta W(A, Z + 1) + (M_{\mathrm{H}} - M_{\mathrm{n}})c^2,$$

où M_{H} est la masse de l'atome d'hydrogène ${}^1_1\mathrm{H}$, $(M_{\mathrm{H}} - M_{\mathrm{n}})c^2 =$ $= 0{,}782$ MeV, le noyau ${}^A_Z\mathrm{X}$ est instable envers la désintégration β^- (p. 854) ${}^A_Z\mathrm{X} \rightarrow {}^A_{Z+1}\mathrm{Y} + e^- + \tilde{\nu}_e$ où e^- est l'électron, $\tilde{\nu}_e$ l'antineutrino électronique (p. 898). Dans le cas où

$$M(A, Z + 1) > M(A, Z) + 2m_0,$$

de sorte que

$$\Delta W(A, Z + 1) > \Delta W(A, Z) + 2m_0c^2 - (M_{\mathrm{H}} - M_{\mathrm{n}})^2,$$

où m_0 est la masse de l'électron, le noyau ${}^A_{Z+1}\mathrm{Y}$ est instable envers la désintégration β^+ (p. 854) ${}^A_{Z+1}\mathrm{Y} \rightarrow {}^A_Z\mathrm{X} + e^+ + \nu_e$ où e^+ est le positon, ν_e le neutrino électronique (p. 898). Dans le cas où

$$M(A, Z + 1) > M(A, Z) + \frac{\varepsilon}{c^2},$$

de sorte que

$$\Delta W(A, Z + 1) > \Delta W(A, Z) + \varepsilon - (M_{\mathrm{H}} - M_{\mathrm{n}})c^2,$$

où ε est l'énergie de liaison de l'électron dans l'atome devient possible la capture d'un électron par l'atome à partir de la couche atomique (capture E, p. 854): ${}^A_{Z+1}\mathrm{Y} + e^- \rightarrow {}^A_Z\mathrm{X}$. Les noyaux instables envers la désintégration β^+ sont également instables envers la capture E. En ce qui concerne les autres types d'instabilité des noyaux, cf. pp. 851, 883.

4° Les noyaux isobares ${}^A_Z\mathrm{X}$ et ${}^A_{Z+1}\mathrm{Y}$ sont stables pour une énergie de liaison du noyau comprise dans l'intervalle

$$\Delta W(A, Z) + (M_{\mathrm{n}} - M_{\mathrm{H}})c^2 + \varepsilon > \Delta W(A, Z + 1) > \Delta W(A, Z) + (M_{\mathrm{n}} - M_{\mathrm{H}})c^2.$$

5° Le noyau d'énergie minimale, égale à l'énergie de liaison, est en *état fondamental* ou *normal*. Si le noyau possède l'énergie $E > E_{\mathrm{min}}$, il est en *état excité*. Le cas $E = 0$ correspond à la dissociation du noyau en ses nucléons.

6° Du fait de l'existence de noyaux stables suit qu'entre les nucléons agissent certaines forces les reliant en un noyau. Ces

forces sont dites *forces nucléaires*. L'énergie des forces nucléaires et de l'interaction coulombienne des protons dans le noyau est égale à l'énergie de liaison. Les forces nucléaires présentent les propriétés suivantes:

a) *indépendance de charge* des forces nucléaires: les forces nucléaires agissant entre deux protons, ou entre deux neutrons, ou entre un proton et un neutron sont identiques. Donc, les forces nucléaires ne sont pas de nature électrique;

b) *saturation* des forces nucléaires: chaque nucléon n'interagit qu'avec un nombre limité de nucléons voisins. Ceci découle du caractère de la dépendance de l'énergie de liaison et du défaut de masse du nombre de masse. En l'absence de saturation devrait avoir lieu $\Delta W \backsim A(A-1)$;

c) les forces nucléaires sont des forces attractives;

d) les forces nucléaires sont des forces agissant à courte distance, autrement dit, elles se manifestent à des distances entre nucléons comparables en ordre de grandeur aux dimensions des nucléons eux-mêmes. Ces distances sont appelées rayons R d'action des forces nucléaires ($R \approx 1{,}5 \cdot 10^{-13}$ cm);

e) les forces nucléaires ne sont pas centrales et leur potentiel est dénué de symétrie sphérique;

f) les forces nucléaires dépendent de l'orientation des spins des nucléons qui interagissent.

7° Il est supposé dans la version moderne de la théorie de l'échange des forces nucléaires que l'interaction internucléonique se réalise par échange de mésons π (p. 898).

8° On peut expliquer le très court rayon d'action des forces nucléaires si l'on considère celles-ci comme des forces d'échange (7°). Ce qui importe alors c'est la masse au repos non nulle du méson π. En vertu des relations de Heisenberg (p. 747), le temps d'échange des nucléons en mésons π ne peut pas être supérieur à Δt pour lequel

$$\Delta E\ \Delta t \geqslant \hbar,$$

où $\Delta E = m_\pi c^2$ est l'énergie au repos du méson π. La distance à laquelle, au cours du temps Δt, peut s'éloigner le méson π du nucléon, même en se mouvant à une vitesse proche de celle de la lumière dans le vide, représente $R_0 \approx \hbar/m_\pi c \approx 1{,}2 \cdot 10^{-13}$ cm, c'est-à-dire coïncide à peu près avec la valeur du rayon du noyau (p. 834) et coïncide en ordre de grandeur avec le rayon d'action des forces nucléaires. (Pour les photons $m_{\text{ph}} = 0$ et $R_0 = \infty$, autrement dit, le champ électromagnétique a un rayon d'action infiniment grand; cf. également p. 910.)

D'autre part, supposant qu'au cours du temps Δt le méson π parcourt la distance R_0 égale au rayon d'action des forces nucléaires (6°), on peut calculer la masse au repos du méson π: $m_\pi = \hbar/R_0 c = 250\ m_e$, où m_e est la masse au repos de l'électron (p. 898). Ceci est en accord avec les valeurs des masses des mésons π (p. 898).

3. Propriétés magnétiques et électriques des noyaux

1° Les nucléons dans le noyau jouissent de moments magnétiques et mécaniques orbital et de spin (pp. 486 et 487). Les nucléons sont des fermions (p. 237), leur spin étant égal à $\hbar/2$. Les moments magnétiques orbital μ_l et de spin μ_s des nucléons sont égaux à

$$\boldsymbol{\mu}_l = g_l \mathbf{l},\ \boldsymbol{\mu}_s = g_s \mathbf{s},\ \mu_l = g_l l\hbar,\ \mu_s = g_s s\hbar,$$

où l et s sont les nombres quantiques orbital et de spin, g_l et g_s les *rapports gyromagnétiques* correspondants. On a:

$$g_l \frac{\hbar}{\mu_{noy}} = \begin{cases} 1 \text{ pour le proton,} \\ 0 \text{ pour le neutron,} \end{cases}$$

$$g_s \frac{\hbar}{\mu_{noy}} = \begin{cases} +\ 5{,}585 \text{ pour le proton,} \\ -\ 3{,}826 \text{ pour le neutron.} \end{cases}$$

Ici

$$\mu_{noy} = \frac{e\hbar}{2M_p c} = 5{,}050 \cdot 10^{-24} \text{ erg/Gs}$$

est le *magnéton nucléaire* (M_p est la masse du proton) en u. du système de Gauss.

2° En physique nucléaire, on appelle *spin nucléaire* son moment cinétique total (p. 786). Il se compose géométriquement des moments totaux des nucléons constituant le noyau (voir plus bas). De façon analogue, les nombres quantiques internes des nucléons s'ajoutent algébriquement et donnent un nombre entier total (0, 1, 2, 3, ...) pour un nombre massique A pair et un nombre demi-entier total (1/2, 3/2, 5/2, ...) pour un A impair. Dans le premier cas les noyaux obéissent à la statistique de Bose-Einstein, dans le second, à la statistique de Fermi-Dirac (pp. 236 et 237).

3° L'énoncé donné ci-avant (2°) découle de la réalisation dans les noyaux d'un couplage j-j (p. 787) entre moments de spin et

orbital de chaque nucléon. C'est pourquoi chaque nucléon est caractérisé par son moment cinétique total

$$\mathbf{j} = \mathbf{l} + \mathbf{s}.$$

Le spin $\mathbf{J}$ et le moment magnétique μ du noyau sont égaux à

$$\mathbf{J} = \sum_{i=1}^{A} \mathbf{j}_i, \quad \mu = g\mu_{\text{noy}}\mathbf{J}, \quad |\mathbf{J}| = \sqrt{\mathbf{J}(\mathbf{J}+1)}\,\hbar,$$

où g est une grandeur analogue au facteur de Landé pour l'atome (p. 792).

La classification des états du noyau suivant les valeurs des nombres orbital et de spin totaux L et S (dans le cas d'un couplage j-j, ces nombres ont un sens conventionnel, p. 787) se fait comme pour le modèle vectoriel de l'atome. Pour désigner ces états, on utilise des symboles spectroscopiques (p. 788). Le nombre quantique J prend des valeurs entières (en unités de $\hbar$) pour des A pairs et des valeurs demi-entières (en unités de $\hbar$) pour des A impairs.

4° Les moments magnétiques des noyaux pairs-pairs sont nuls. Les moments magnétiques des noyaux pairs-impairs et impairs-pairs peuvent être étudiés à l'aide du *modèle mononucléonique du noyau*. Dans ce modèle on admet que les moments magnétiques de tels noyaux sont dus au mouvement d'un seul nucléon de «valence» autour de la partie restante du noyau, constituée d'un nombre pair de nucléons pour lesquels la somme vectorielle des moments orbitaux et de spin est nulle. Dans ce cas

$$\mathbf{J} = \mathbf{l} + \mathbf{s}, \quad \mu = g_1\mathbf{l} + g_2\mathbf{s}.$$

En valeur absolue les moments magnétiques des noyaux sont égaux à

$$\mu_{\text{i.p.}} = \begin{cases} \dfrac{J^2 - 1{,}293\,J}{J+1}\,\mu_{\text{noy}} & \text{pour } l = J + \dfrac{1}{2}, \\ (J + 2{,}293)\mu_{\text{noy}} & \text{pour } l = J - \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

$$\mu_{\text{p.i.}} = \begin{cases} -1{,}913\mu_{\text{noy}} & \text{pour } l = J + \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{1{,}913}{J+1}\,\mu_{\text{noy}} & \text{pour } l = J - \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

où les indices «i.p.» et «p.i.» correspondent aux noyaux impairs-pairs et pairs-impairs.

5° Dans le cas général la charge électrique des nucléons (des protons) dans le noyau est distribuée asymétriquement. Pour mesurer la déviation de cette distribution de la symétrie sphérique, on utilise le *moment électrique quadripolaire du noyau* Q_0. On représente approximativement la distribution de la charge dans le noyau sous forme d'ellipsoïde de révolution. Le moment quadripolaire du noyau est:

$$Q_0 = \frac{2}{5} Ze(b^2 - a^2),$$

où b et a sont les demi-axes de l'ellipsoïde. Pour le noyau étiré dans la direction du spin, correspondant au demi-axe b, $Q_0 > 0$; pour le noyau aplati dans cette direction $Q_0 < 0$. Pour la distribution sphérique de la charge dans le noyau $Q_0 = 0$; ceci a lieu, quand le spin du noyau est égal à 0 ou à 1/2 (en unités de $\hbar$).

6° Le moment électrique dipolaire du noyau à l'état fondamental est nul.

7° Dans le champ magnétique extérieur a lieu la quantification du spin nucléaire (quantification spatiale, p. 785) et chaque niveau énergétique se dédouble en $2J + 1$ sous-niveaux *(dédoublement Zeeman des niveaux nucléaires)*.

L'absorption sélective d'un rayonnement électromagnétique par la substance, liée aux transitions de ses noyaux entre *sous-niveaux Zeeman* est dite *résonance magnétique nucléaire* (R.M.N.). Les fréquences de résonance pour les transitions, obéissant à la règle de sélection pour le nombre quantique magnétique (interne) m_J (p. 792), $\Delta m_J = \pm 1$ sont égales à

$$\nu_{\text{R.M.N.}} = \frac{g\mu_{\text{noy}} H}{h},$$

où g est le facteur de décomposition pour le noyau (donné plus haut, 3°, et obtenu des rapports gyromagnétiques orbital et de spin, p. 838), μ_{noy} le magnéton nucléaire, H le champ magnétique constant extérieur, h la constante de Planck (en u. du système de Gauss).

Les fréquences de la résonance magnétique nucléaire pour une même valeur de H sont, par son ordre de grandeur, $\mu_B/\mu_{\text{noy}} \sim$ $\sim m_{\text{noy}}/m_e \sim 10^4$ fois plus petites que les fréquences de la résonance paramagnétique électronique (p. 793) et sont comprises dans l'intervalle de 10^5 à 10^6 Hz pour les champs magnétiques ordinaires ($\sim 10^3$ Œ).

Les périodes de la relaxation spin-réseau des spins nucléaires atteignent plusieurs heures du fait de la faible interaction des spins nucléaires avec le réseau; elles sont des milliers de fois plus grandes que dans la résonance paramagnétique électronique.

8° Si le noyau a un moment électrique quadripolaire, c'est un dédoublement Stark des niveaux du noyau en une série de sous-niveaux qui apparaît par suite de l'interaction de celui-ci avec le champ électrique intramoléculaire ou intracristallin. L'absorption sélective d'un rayonnement électromagnétique par la substance, liée aux transitions de ses noyaux entre sous-niveaux Stark, est dite *résonance quadripolaire nucléaire* (R.Q.N.). La résonance quadripolaire nucléaire représente une méthode efficace d'étude de la structure des molécules et des cristaux, qui est fondée sur la détermination de la position et des intensités des raies de la R.Q.N.

4. Modèles du noyau

A. MODÈLE DE LA GOUTTE LIQUIDE

1° Les connaissances sur le caractère précis des forces agissant dans le noyau nucléaire étant précaires, on utilise pour l'étude et la prédiction théorique de ses propriétés des *modèles du noyau*, basés sur l'analogie apparente des propriétés des noyaux atomiques avec les propriétés de la goutte liquide, de la couche électronique de l'atome, etc.

2° Dans le *modèle de la goutte liquide* les forces nucléaires sont supposées analogues aux forces moléculaires agissant dans la goutte liquide (p. 265). L'énergie attractive des nucléons, due aux forces nucléaires, correspond à l'énergie attractive des molécules de liquide dans la goutte. Un second apport à l'énergie du noyau donne la répulsion coulombienne des protons (porteurs de charges de même signe) qui croît avec l'augmentation de leur nombre dans le noyau; ceci correspond à la diminution de la stabilité de la goutte avec l'augmentation de sa masse, c'est-à-dire du nombre de molécules dans la goutte. Les nucléons superficiels subissent une attraction unilatérale de la part des forces nucléaires, qui se caractérise par le coefficient de «tension superficielle» σ (p. 269).

3° L'énergie positive totale de liaison du noyau (p. 834) est exprimée à l'aide de la *formule semi-empirique de Weizsäcker:*

$$\Delta W = \alpha A - \beta A^{2/3} - \gamma Z^2 A^{-1/3} - \varepsilon \left(\frac{A}{2} - Z\right)^2 A^{-1} + \delta,$$

où

$$\alpha = 15{,}75 \text{ MeV}, \quad \beta = 17{,}8 \text{ MeV}, \quad \gamma = 0{,}71 \text{ MeV},$$

$$\varepsilon = 94{,}8 \text{ MeV}, \quad |\delta| = 34A^{-3/4} \text{ MeV};$$

$$\delta = \begin{cases} +|\delta| & \text{pour les noyaux pairs-pairs;} \\ 0 & \text{pour les } A \text{ impairs;} \\ -|\delta| & \text{pour les noyaux impairs-impairs} \end{cases}$$

A est le nombre massique et Z est la charge nucléaire.

Le premier terme indique que l'énergie de liaison est proportionnelle à la grandeur A, le second montre que ΔW diminue (au compte de l'attraction unilatérale des nucléons superficiels du noyau de la goutte) d'une grandeur proportionnelle à la surface de la goutte; c'est-à-dire à $A^{2/3}$ (tension superficielle). Le troisième terme tient compte de la répulsion coulombienne des protons proportionnelle à Z^2/r, c'est-à-dire à $Z^2A^{-1/3}$. Le quatrième terme reflète la tendance à la symétrie dans la structure des noyaux, la tendance à l'égalisation dans ceux-ci du nombre de protons et de neutrons, donc il tient compte de l'écart de l'égalité $Z = \frac{A}{2}$ d'un côté ou d'un autre. Ce terme n'est pas tiré du modèle de la goutte et se déduit comme conséquence de la soumission des nucléons au principe de Pauli (p. 796). Le dernier terme est introduit pour tenir compte de la stabilité différente des noyaux pairs-pairs, impairs-pairs et impairs-impairs. La stabilité des noyaux de ces types diminue successivement. Le caractère du dernier terme est lié à la dépendance des forces nucléaires de l'orientation des spins des nucléons. La comparaison de la formule de Weizsäcker avec l'expérience fait apparaître son caractère universel. En particulier, cette formule détermine pour tous les noyaux une valeur du rayon nucléaire: $R = (1{,}45 - 1{,}5)\cdot 10^{-13} A^{1/3}$ cm.

B. MODÈLE EN COUCHES

1° On admet dans le *modèle en couches* que la structure énergétique du noyau est analogue à la structure énergétique de la couche électronique de l'atome.

La forte interaction entre nucléons dans le noyau et le court rayon d'action de cette interaction permettent de considérer les nucléons comme se mouvant indépendamment l'un de l'autre dans un champ de potentiel à symétrie sphérique. Ceci étant, les nucléons peuvent se trouver dans différents états énergétiques. A l'état fondamental du noyau doit correspondre l'occupation de tous les niveaux inférieurs. La perte d'énergie par un nucléon lors de collisions internucléoniques ne peut le transférer à un niveau beaucoup plus bas, car ceux-ci sont tous occupés en accord avec le principe de Pauli (p. 796). Ceci conduit à ce que le libre parcours du nucléon dans le noyau non excité devient supérieur au rayon nucléaire, ce qui donne la possibilité de considérer les nucléons, dans le cadre d'un modèle donné, comme non interagissant et non entrant en collision. Le mouvement des nucléons non interagissant dans un champ du potentiel sphérique, où le moment cinétique orbital est une intégrale du mouvement, se caractérise par le fait qu'à toutes les $2l + 1$ orientations possibles du vecteur $\mathbf{l}$ correspond le même niveau énergétique. Sur ce niveau se répartissent $2(2l + 1)$ nucléons de type donné. Ainsi, dans le modèle en couches les nucléons se disposent en quantité déterminée sur les *couches nucléoniques* énergétiques. Chaque nucléon est caractérisé par une fonction d'onde individuelle et par des nombres quantiques n et l individuels (p. 753). Il existe deux systèmes d'états nucléoniques: protonique et neutronique; les deux systèmes de niveaux s'emplissent de nucléons indépendamment l'un de l'autre. Les noyaux n'ayant que des couches nucléoniques complètes doivent posséder une stabilité marquée (qui se manifeste, par exemple, en ce fait qu'ils sont très répandus dans la nature). Ils doivent avoir également une distribution à symétrie sphérique de leur charge (moment quadrupolaire proche de zéro, p. 840).

2° L'ordre d'occupation des couches nucléoniques avec l'accroissement de A est semblable à l'ordre d'occupation des couches électroniques avec l'accroissement de Z. Etant donné une forte liaison spin-orbitale des nucléons, tous les niveaux de $l \neq 0$ se dédoublent en deux sous-niveaux de $j = l \pm 1/2$, se remplissant indépendamment.

3° Les prédictions du modèle en couches reflètent en général la réalité. Les noyaux les plus stables, par comparaison avec leurs voisins, ont des valeurs de N et de Z égales à 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126 et 152. Ces nombres sont dits *nombres magiques*. De tels noyaux sont les plus répandus dans la nature et leurs moments quadrupolaires sont proches de zéro. Les noyaux pour

lesquels les nombres N et Z sont à la fois magiques sont dits *doublement magiques*. Ces noyaux ($^{4}_{2}He$, $^{16}_{8}O$, $^{40}_{20}Ca$, $^{208}_{82}Pb$) jouissent d'une stabilité marquée, se manifestant, en particulier, en ce fait qu'ils sont les isotopes les plus abondants dans la nature.

4° D'une part, l'analogie des couches nucléoniques du noyau aux couches électroniques de l'atome est apparente. Les électrons de l'atome se meuvent dans le champ coulombien central du noyau, alors que le champ dans lequel se déplacent les nucléons, lui, n'est pas central. Les électrons dans l'atome n'entrent pas en collision entre eux, c'est à cette seule condition que l'on peut parler du nombre l, déterminant le système des niveaux énergétiques atomiques, comme d'un nombre quantique précis correspondant au mouvement stationnaire. Les nucléons, eux, doivent subir de fréquentes collisions entre eux, vu la densité très élevée de la matière nucléaire, de sorte que la quantification de leur mouvement semble impossible.

D'autre part, le succès du modèle en couches témoigne que pour les noyaux l a le sens d'un nombre quantique précis. Ceci est probablement lié à ce que les nucléons du noyau à l'état fondamental ne peuvent entrer en collision entre eux (1°).

5° Le modèle en couches se justifie pour les noyaux légers et les noyaux à l'état fondamental.

C. MODÈLE COLLECTIF

1° Le *modèle collectif du noyau* représente la synthèse du modèle de la goutte liquide et du modèle en couches. On admet dans ce modèle que les nucléons se meuvent dans un certain champ self-consistent (p. 782) médié, agissant sur un nucléon mis à part par rapport aux autres. Cette médiation du champ est perdue au voisinage de la «surface» nucléaire, puisque les nucléons n'entrant pas dans la composition des couches nucléoniques complètes (les «nucléons de valence») provoquent à la «surface» du noyau des fluctuations de potentiel du champ self-consistent, qui se manifestent dans la «déformation» de la «surface» nucléaire. Ces déformations apparaissent d'autant plus facilement qu'il n'y a pas, dans le noyau, de corps central qui pourrait stabiliser le mouvement du système de nucléons. Par suite des déformations la distribution sphérique de la charge dans le noyau est perturbée et celui-ci acquiert un moment électrique quadripolaire (p. 840).

2° Les modèles en couches et de la goutte liquide sont considérés comme les cas limites du modèle collectif du noyau. L'aspect de couches du modèle collectif consiste en ce que dans celui-ci conservent leur sens les états individuels des nucléons et les couches nucléoniques. Par ailleurs, ces états sont déterminés non par l'interaction immédiate des nucléons mais par leur interaction collective comme dans le modèle de la goutte liquide, en perturbant le potentiel d'interaction par les «déformations» de la «surface» nucléaire. L'aspect de goutte du modèle collectif se manifeste lors d'excitations intenses du noyau (lors de «déformations» et de fluctuations notables du champ self-consistent) lorsque disparaît l'individualisation des états de chacun des nucléons. Lors d'excitations très fortes un nucléon quelconque peut «s'évaporer» du noyau.

5. Radioactivité

1° On appelle *radioactivité* la transformation spontanée des isotopes instables (p. 832) d'un élément chimique en isotopes d'un autre élément, accompagnée de l'émission de certaines particules (de noyaux d'hélium par exemple). Par extension, on comprend également sous radioactivité les transformations réciproques de certaines particules élémentaires en d'autres (des neutrons et des hypérons par exemple, p. 898).

On appelle *radioactivité naturelle* la radioactivité observée sur les isotopes instables qui existent dans la nature.

On appelle *radioactivité artificielle* la radioactivité provoquée sur les isotopes obtenus dans les réactions nucléaires (cf. également p. 891). Les propriétés d'un isotope donné ne dépendent pas du mode de son obtention.

En tenant compte de la possibilité de la formation d'un noyau composé dans les réactions nucléaires (p. 879), on peut déterminer la radioactivité comme une modification spontanée de la composition du noyau, qui se produit par émission de particules élémentaires ou de noyaux à partir de l'état fondamental ou métastable durant un temps considérablement supérieur à la vie du noyau composé excité dans les réactions nucléaires. La durée de vie minimale des isotopes radioactifs est admise inférieure à 10^{-12}-10^{-13} s.

2° Tableau des principaux types de radioactivité:

Type de radioactivité	Variation de la charge du noyau Z	Variation du nombre de masse A	Caractère du processus
Désintégration alpha	$Z-2$	$A-4$	Expulsion d'une particule α, représentant un système de deux protons (p) et de deux neutrons (n) liés ensemble
Désintégration bêta	$Z\pm 1$	A	Transformation réciproque du neutron (n) et du proton (p) dans le noyau:
Désintégration β^-	$Z+1$	A	$n \to p + (e^- + \tilde{\nu}_e)$ — ν_e et $\tilde{\nu}_e$ sont le neutrino et l'antineutrino électroniques; entre parenthèses sont indiquées les particules éjectées du noyau
Désintégration β^+	$Z-1$	A	$p \to n + (e^+ + \nu_e)$
Capture électronique (capture E)	$Z-1$	A	$p + e^- \to n + (\nu_e)$
Fission spontanée	$Z-1/2\,Z$	$A-1/2\,A$	Rupture du noyau en deux fragments ayant approximativement mêmes masses et mêmes charges
Radioactivité monoprotonique	$Z-1$	$A-1$	Expulsion d'un proton du noyau
Radioactivité diprotonique	$Z-2$	$A-2$	Expulsion simultanée de deux protons du noyau

3° Les cinq types principaux de radioactivité énumérés se caractérisent par une durée relativement grande de transformations des noyaux, qui est assurée par le caractère de l'interaction (interactions faibles dans le cas de la désintégration β, p. 894) ou par le retard de l'émission de particules chargées positivement à cause d'une barrière de potentiel coulombienne dans le noyau (désintégration α, fission spontanée, radioactivité mono et diprotonique). Généralement, tous ces types de radioactivité s'accompagnent de l'émission de *rayons gamma*, c'est-à-dire de flux de photons de rayonnements électromagnétiques durs de longueur d'onde de l'ordre de 10^{-9}-10^{-11} cm. Les rayons γ sont la forme la plus répandue d'élimination de l'énergie excédentaire des produits excités de la désintégration radioactive. Le noyau subissant une désintégration radioactive est dit *noyau «père»*, le noyau produit, *noyau «fils»*. Si ce dernier se désintègre à son tour, on parle parfois de noyau «descendant».

4° La ***désintégration spontanée des noyaux atomiques*** est régie par la loi

$$N = N_0 e^{-\lambda t},$$

où N_0 est la quantité de noyaux dans un volume donné de substance à l'instant $t = 0$, N la quantité de noyaux dans le même volume à l'instant t, λ la *constante radioactive* (ou *constante de désintégration*). La constante λ a le sens de probabilité de désintégration du noyau en 1 s: elle est égale à la fraction de noyaux se désintégrant en 1 s. La grandeur $1/\lambda$ est appelée *durée de vie moyenne de l'isotope radioactif*. Pour caractériser la stabilité des noyaux à la désintégration, on utilise la notion de *période* $T_{1/2}$, égale au temps pendant lequel la moitié du nombre initial de noyaux d'une substance donnée se désintègre. La relation entre les grandeurs λ et $T_{1/2}$ est:

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0{,}693}{\lambda}.$$

Si l'isotope radioactif présente plusieurs types de radioactivité (2°), la constante radioactive totale est $\lambda = \sum_k \lambda_k$, où la sommation s'étend sur tous les types de radioactivité et λ_k est la *constante radioactive partielle*. Le nombre de désintégrations des noyaux d'une préparation donnée en une seconde est appelé *activité*; rapporté à l'unité de masse de la préparation, ce nombre est dit *activité spécifique*. L'activité est définie par

$$A = \lambda N = \lambda N_0 e^{-\lambda t}.$$

5° Si le noyau obtenu par désintégration du noyau initial est également radioactif et, en se désintégrant, donne un noyau stable ou un nouveau noyau radioactif, etc., on a une *chaîne de transformations radioactives*. Dans ce cas l'activité totale des noyaux formés dans la chaîne, mesurée à l'aide d'un appareil quelconque (cf. p. 874), dépend du temps suivant une loi beaucoup plus complexe, étant donné que les constantes de désintégration pour différents maillons de la chaîne ne sont pas égales entre elles et que, de plus, l'efficacité de l'appareil pour enregistrer les différents rayonnements émis par chacun des maillons de la chaîne est différente.

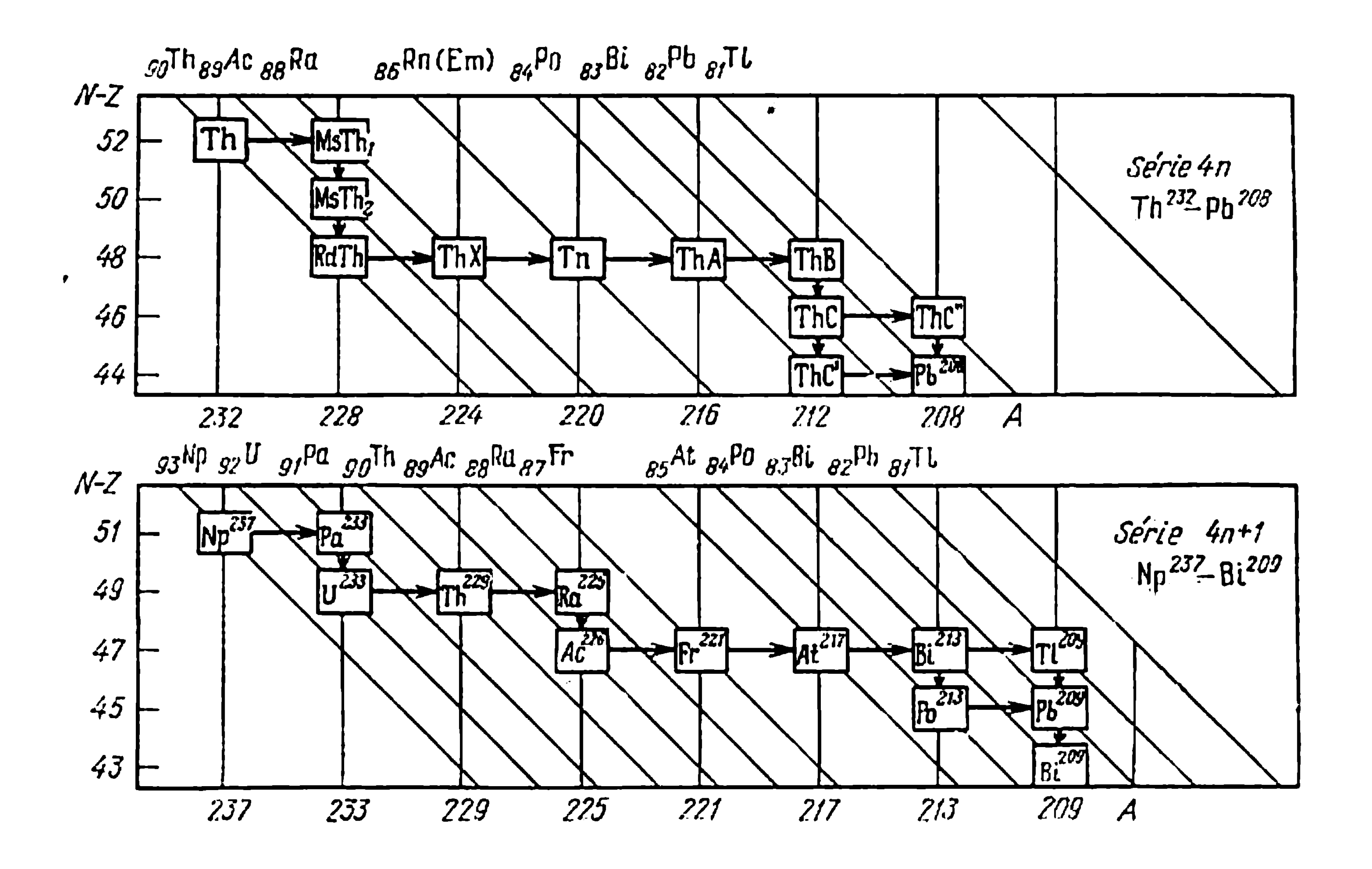
Si λ_i est la constante radioactive du noyau dans le i-ième maillon de la chaîne et k_i, la sensibilité du détecteur de rayonnement au rayonnement du i-ième maillon, l'activité totale est alors:

$$A = \sum_{i=1}^{n} k_i \lambda_i N_i.$$

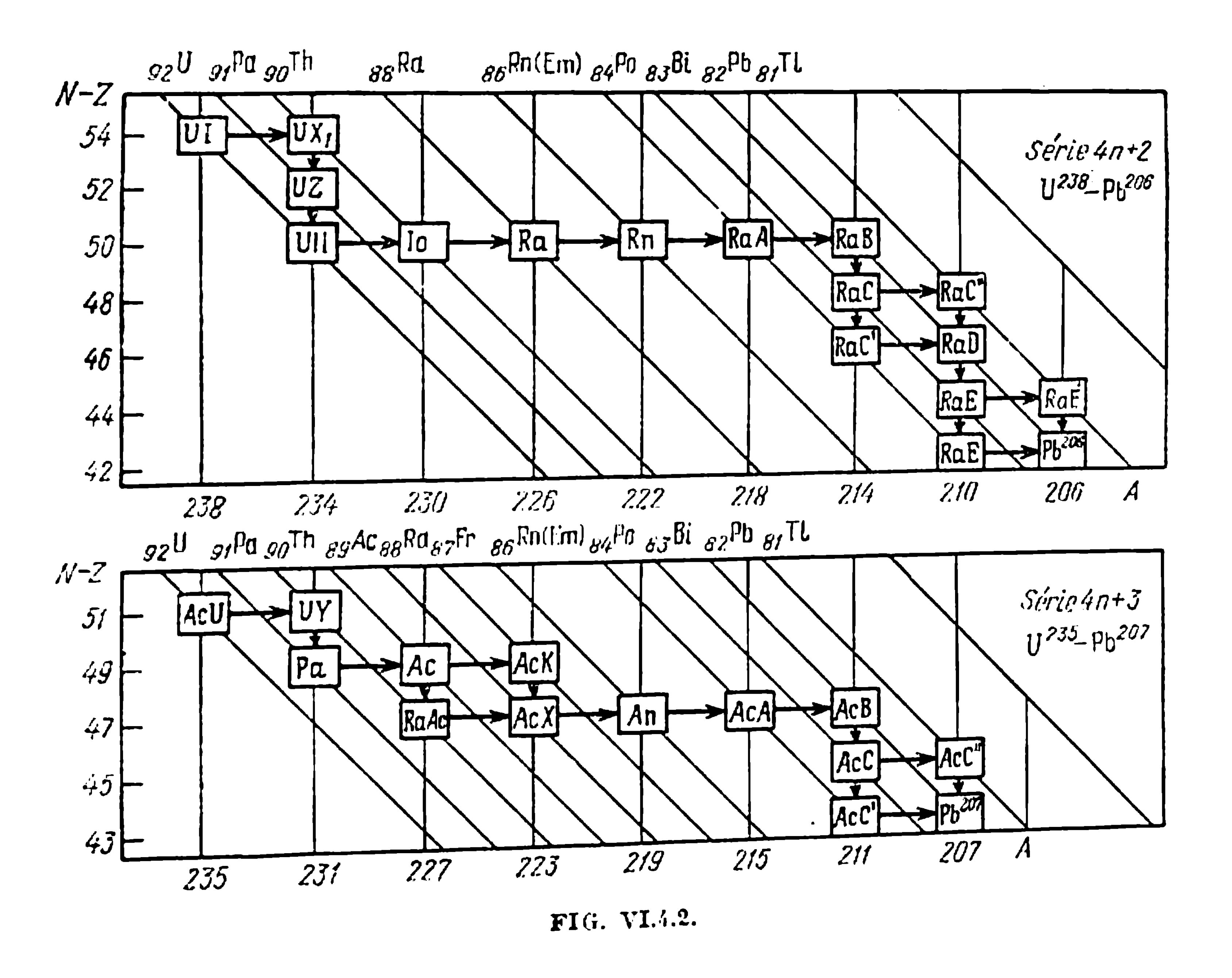
Dans le cas d'une chaîne à deux maillons ($n = 2$)

$$A = k_1 \lambda_1 N_{01} \left[\left(1 - \frac{k_2}{k_1} \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) e^{-\lambda_1 t} + \frac{k_2}{k_1} \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-\lambda_2 t} \right],$$

l'indice «zéro» se rapporte à l'instant $t = 0$.



$_{90}$Th $_{89}$Ac $_{88}$Ra $_{86}$Rn(Em) $_{84}$Po $_{83}$Bi $_{82}$Pb $_{81}$Tl
N-Z
52
50
48
46
44
Th
MsTh1
MsTh2
RdTh
ThX
Tn
ThA
ThB
ThC
ThC'
ThC''
Pb208
Série 4n
Th232–Pb208
232
228
224
220
216
212
208
A
$_{93}$Np $_{92}$U $_{91}$Pa $_{90}$Th $_{89}$Ac $_{88}$Ra $_{87}$Fr $_{85}$At $_{84}$Po $_{83}$Bi $_{82}$Pb $_{81}$Tl
N-Z
51
49
47
45
43
Np237
Pa233
U233
Th229
Ra225
Ac225
Fr221
At217
Bi213
Po213
Tl209
Pb209
Bi209
Série 4n+1
Np237–Bi209
237
233
229
225
221
217
213
209
A



92U 91Pa 90Th 88Ra 86Rn(Em) 84Po 83Bi 82Pb 81Tl
N-Z
54
52
50
48
46
44
42
UI
UX1
UZ
UII
Io
Ra
Rn
RaA
RaB
RaC
RaC'
RaC"
RaD
RaE
RaE
RaE
Pb206
Série 4n+2
U238–Pb206
238
234
230
226
222
218
214
210
206
A
92U 91Pa 90Th 89Ac 88Ra 87Fr 86Rn(Em) 84Po 83Bi 82Pb 81Tl
N-Z
51
49
47
45
43
AcU
UY
Pa
Ac
RaAc
AcK
AcX
An
AcA
AcB
AcC
AcC'
AcC"
Pb207
Série 4n+3
U235–Pb207
235
231
227
223
219
215
211
207
A

FIG. VI.4.2.

6° La stabilité des noyaux (en moyenne) diminue avec l'accroissement de leur nombre de masse. La radioactivité naturelle des noyaux légers et moyens est un phénomène rare (observé dans les noyaux $^{40}_{19}K$, $^{87}_{37}Rb$, $^{115}_{49}In$, $^{138}_{57}La$, $^{147}_{62}Sm$, $^{176}_{71}Lu$ et $^{187}_{75}Re$). Parmi les noyaux lourds (à partir de $A > 200$) la radioactivité naturelle est un phénomène général. Ces noyaux forment 3 *séries* ou *familles radioactives naturelles* et 1 *série* ou *famille artificielle*, qui portent le nom de leur parent de plus longue vie (de plus longue période $T_{1/2}$, p. 847): la *série de l'uranium* (parent $^{238}_{92}U$), la *série du thorium* (parent $^{232}_{90}Th$), la *série de l'actinium* (parent $^{235}_{89}Ac$) et la *série du neptunium* (parent $^{237}_{93}Np$, obtenu artificiellement). Les nombres de masse des membres de chacune des familles radioactives se caractérisent par la formule

$$A = 4n + a,$$

où n est un nombre entier, $a = 0$ pour la série du thorium, $a = 1$ pour la série du neptunium, $a = 2$ pour la série de l'uranium, $a = 3$ pour la série de l'actinium. La transition d'un membre à un autre d'une même famille (la *filiation*) est réalisée par une chaîne de désintégrations successives alpha et bêta et aboutit à un noyau stable, qui pour la famille avec $a = 0$ est $^{208}_{82}Pb$, avec $a = 1$ $^{209}_{83}Bi$, avec $a = 2$ $^{206}_{82}Pb$ et avec $a = 3$ $^{207}_{82}Pb$. La succession des transformations radioactives dans ces familles est montrée fig. VI. 4.2, où les flèches verticales, parallèles à l'axe A, correspondent aux désintégrations alpha, et les flèches horizontales, aux désintégrations bêta. Pour cette succession de transformations dans les familles radioactives est vraie la *loi du déplacement de Fajans-Soddy* (cf. également le tableau p. 816):

$$\left.\begin{matrix} A' = A - 4 \\ Z' = Z - 2 \end{matrix}\right\} \text{désintégration } \alpha, \qquad \left.\begin{matrix} A' = A \\ Z' = Z + 1 \end{matrix}\right\} \text{désintégration } \beta,$$

où (A, Z) et (A', Z') sont les noyaux «père» et «fils».

7° A l'heure actuelle, on connaît douze éléments de nombre atomique $Z > 92$, appelés *transuraniens*. Tous ont été produits artificiellement (p. 881). Tous les transuraniens sont radioactifs et ont des périodes diminuant rapidement avec l'accroissement de Z. Font partie des transuraniens le neptunium ($^{237}_{93}Np$), le plutonium ($^{244}_{94}Pu$), l'américium ($^{243}_{95}Am$), le curium ($^{248}_{96}Cm$), le berkélium ($^{247}_{97}Bk$), le californium ($^{249}_{98}Cf$), l'einsteinium ($^{254}_{99}Es$), le fermium ($^{253}_{100}Fm$), le mendélévium ($^{256}_{101}Md$), le nobélium ($^{257}_{102}No$), le lawrencium ($^{257}_{103}Lz$), le kourtchatovium ($^{264}_{104}Ku$). Les nombres

de masse indiqués correspondent dans la plupart des cas à l'isotope de plus longue vie d'un élément donné. Pour les éléments à vie courte les nombres de masse sont déterminés approximativement. Par exemple, Np a 11 isotopes de $A = 231\text{-}241$, Pu a 14 de $A = 232\text{-}246$, Am a 10 de $A = 237\text{-}246$, Cm a 13 de $A = 238\text{-}250$, Bk a 8 de $A = 243\text{-}250$, Cf a 11 de $A = 244\text{-}254$, Es a 11 de $A = 246\text{-}256$, Fm a 7 de $A = 250\text{-}256$.

Le type fondamental de transformation radioactive des transuraniens est la désintégration alpha. Les isotopes des transuraniens sont d'autant plus stables que plus petit est leur nombre de neutrons N pour un nombre donné de protons Z; les isotopes ayant des couches nucléaires complètes (p. 842) tiennent des $T_{1/2}$ plus longues que les isotopes voisins. Les transuraniens sont instables envers la fission spontanée des noyaux (p. 883).

6. Désintégration alpha

1° Seuls les noyaux lourds de $A > 200$ subissent une désintégration alpha (p. 846). Les particules α expulsées des noyaux présentent un spectre énergétique discret et forment plusieurs groupes. Le plus intense est le groupe dont les particules α possèdent l'énergie la plus grande. L'existence de plusieurs groupes de particules α est dite ***structure fine du spectre alpha***. Dans les spectres des noyaux radioactifs α de très courtes périodes $T_{1/2}$ on observe également des groupes de particules α possédant des énergies supérieures à l'énergie du groupe le plus intense ***(particules α à long parcours)***. Les périodes des émetteurs α avec l'accroissement de l'énergie des particules α de 4 à 9 MeV diminuent de $\sim 10^9$ années jusqu'à $\sim 10^{-7}$ s. En total, sont connus environ 25 noyaux radioactifs α naturels et environ 100 noyaux radioactifs α artificiels.

2° La désintégration alpha est considérée comme la pénétration des particules α à travers la barrière de potentiel du noyau (effet tunnel, p. 761). Le potentiel des forces nucléaires se représente sous forme de puits de potentiel correspondant à l'état stable du noyau. Le puits est séparé de la région, qui se trouve en dehors du rayon d'action des forces nucléaires, par une barrière de potentiel de largeur et de hauteur finies; la hauteur de la barrière de potentiel est supérieure à l'énergie des particules α émises par le noyau. Le spectre discret des particules α témoigne de la présence dans le noyau de niveaux énergétiques discrets dont les jeux sont différents suivant les noyaux à radioactivité alpha.

3° L'énergie de la particule α est égale à la différence entre les niveaux énergétiques des noyaux «père» et «fils». Elle est d'autant

plus grande que moins excité se trouve être le noyau «fils». Pour un noyau «fils» fortement excité à radioactivité alpha de courte période, l'infiltration d'une particule α à travers la barrière de potentiel se produit plus tôt qu'a lieu l'émission du quantum γ (p. 859). Il apparaît alors une particule α à long parcours, ayant une longueur de parcours supérieure à celle des particules ordinaires.

4° On distingue dans le processus de désintégration alpha deux stades: la formation de la particule α à partir des nucléons du noyau et l'émission de la particule α par le noyau. Le premier stade est beaucoup moins étudié que le second. La formation des particules α a lieu avec une probabilité assez grande, c'est pourquoi la vie des noyaux radioactifs α dépend principalement du second stade, qui est beaucoup plus lent. A l'isolement de deux protons et de deux neutrons pour former une particule α contribue la saturation des forces nucléaires (p. 837) qui fait que la particule α en formation est soumise à une moindre action des forces nucléaires attractives et en même temps à une plus grande action des forces coulombiennes répulsives de la part des protons du noyau que les nucléons isolés.

C'est par ceci qu'on explique le fait que la désintégration alpha est un type beaucoup plus probable de radioactivité que la radioactivité mono et diprotonique (p. 846).

5° La transparence D de la barrière de potentiel (p. 760) pour la particule α dans le noyau (fig. VI.4.3) est:

$$D = \exp\left\{-\frac{2}{\hbar}\int_{R}^{r_T}\sqrt{2m\left(\frac{Zze^2}{r}-E\right)}\,dr\right\}.$$

Ici $E = T$ est l'énergie cinétique de la particule α ($z = 2$), R le

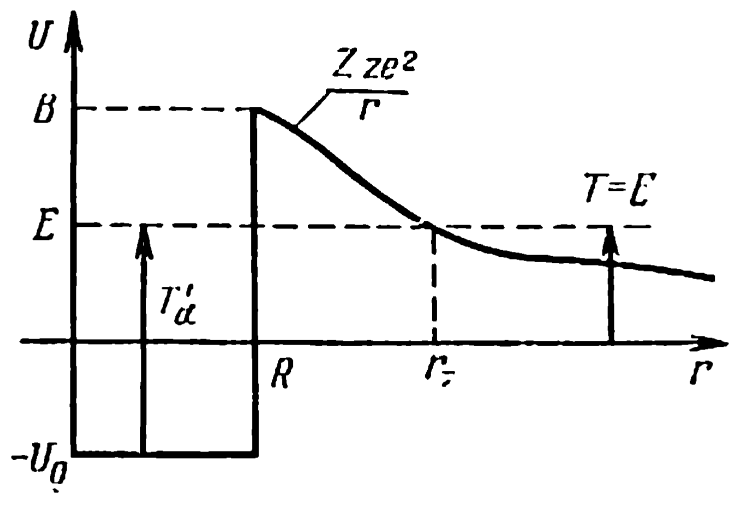


FIG. VI.4.3

rayon du noyau, $r_T = \frac{Zze^2}{T}$ le point de rebroussement, qui se trouve de la condition $U_c(r_T) = T$, où $U_c(r) = \frac{Zze^2}{r}$ est le potentiel coulombien entre la particule α et le noyau de Ze; m la masse de la particule α. L'énergie cinétique T'_α de la particule α à l'intérieur du noyau est plus grande qu'en dehors de celui-ci: $T'_\alpha > T = E$.

Le résultat des calculs donne pour D:

$$D = e^{-2g\gamma},$$

où

$$g = \frac{R}{\lambda_B}, \quad \gamma = \sqrt{\frac{B}{T}} \arccos \sqrt{\frac{T}{B}} - \sqrt{1 - \frac{T}{B}},$$

$B = U_c(R) = \frac{Zze^2}{R}$ est la hauteur de la barrière coulombienne, $\lambda_B = \frac{\hbar}{\sqrt{2mB}}$ la longueur d'onde de de Broglie (p. 743) correspondant à l'énergie cinétique de la particule égale à la hauteur de la barrière ($T = B$). La valeur de λ_T pour les nucléons d'énergie cinétique T est:

$$\lambda_T = \frac{\hbar}{\sqrt{2mT}} \approx \frac{4,5 \cdot 10^{-13}}{\sqrt{T\ (\text{MeV})}}\ \text{cm}.$$

6° La constante radioactive λ pour la désintégration alpha (p. 849) est liée à la grandeur D par la relation:

$$\lambda = \frac{vD}{2R},$$

où R est le rayon du noyau ($2R$ est la largeur du puits de potentiel), v la vitesse de la particule α dans le noyau.

7° La formule empirique, reliant le parcours $\widetilde{R}_\alpha$ des particules α dans l'air (p. 868) avec la constante radioactive λ pour la désintégration alpha du noyau:

$$\ln \lambda = A \ln \widetilde{R}_\alpha + B,$$

où A et B sont des constantes ayant différentes valeurs pour chacune des familles radioactives, est dite *loi de Geiger-Nuttall*. Elle montre qu'avec l'augmentation du parcours, autrement dit, avec l'accroissement de l'énergie des particules α, λ augmente et donc $T_{1/2}$ diminue rapidement.

7. Désintégration bêta

1° On comprend sous désintégration β trois types différents de transformations nucléaires: *désintégration* β^-, *désintégration* β^+ et *capture électronique (capture E)* (p. 846). Les conditions de stabilité des noyaux envers les différents types de désintégration bêta sont décrites p. 836. A l'heure actuelle, sont connus environ 900 isotopes à radioactivité β. Parmi eux seulement 20 sont naturels, les autres sont obtenus artificiellement (p. 846). L'immense majorité de ces isotopes subit une désintégration β^-. Au cours de chaque désintégration β^- un électron est émis. La théorie admet la possibilité d'une *double désintégration bêta*, au cours de laquelle devraient être émis deux électrons (positons), mais jusqu'à nos jours la double désintégration bêta n'a pas été observée expérimentalement.

2° Dans la désintégration bêta les électrons ou les positons émis forment un spectre énergétique continu, qui s'étend de $E = 0$ à $E = E_0$, où la grandeur E_0 est appelée *limite supérieure du spectre bêta.*

L'énergie moyenne $\bar{E}$ des électrons, émis par des noyaux lourds, $\bar{E} \approx 1/3\ E_0$; pour les éléments radioactifs β^- naturels $\bar{E} = (0{,}25 \div 0{,}45)$ MeV. Pour les noyaux légers le spectre énergétique des électrons (des positons) est plus symétrique: $\bar{E} \approx 1/2\ E_0$. Dans les désintégrations β les périodes sont comprises dans un large intervalle de temps: de $2{,}5 \cdot 10^{-2}$ s à $4 \cdot 10^{12}$ a, qui est non commensurable au temps nucléaire caractéristique ($\sim 10^{-21} \div 10^{-22}$ s). Ceci montre que la désintégration β est due à une interaction faible (p. 894). La désintégration bêta s'accompagne souvent de l'émission de rayons gamma, qui présentent un spectre énergétique discret. La forme du spectre bêta est montrée fig. VI.4.4.

3° Dans la désintégration bêta simultanément avec l'électron est émis un antineutrino électronique et simultanément avec le positon, un neutrino électronique (p. 898). L'interaction du neutrino (de l'antineutrino) électronique avec les noyaux est infiniment petite devant l'interaction des nucléons dans le noyau (les interactions nucléaires). L'électron (le positon) et l'antineutrino (le neutrino) électronique tiennent dans la désintégration bêta des spins égaux en grandeur mais antiparallèles, de sorte que le changement de spin nucléaire est nul dans ce cas. Sa continuité, le spectre des particules bêta la doit à la distribution différente de

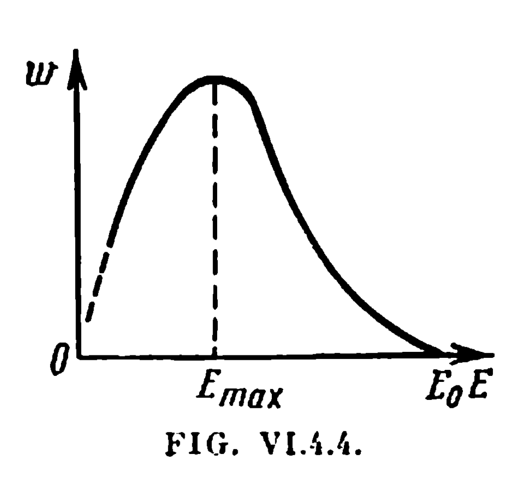


FIG. VI.4.4.

l'énergie entre l'électron (le positon) et l'antineutrino (le neutrino) électronique, la somme des énergies des deux particules étant égale à E_0.

4° Selon les hypothèses modernes, l'électron (le positon) et l'antineutrino (le neutrino) électronique n'existent pas dans les noyaux atomiques, mais se forment à l'instant même de leur expulsion de l'atome par suite d'une interaction internucléonique faible (p. 894) dans le noyau. Etant donné qu'au cours de la désintégration bêta naissent de nouvelles particules, les méthodes de la mécanique quantique non relativiste ne lui sont pas applicables et le problème est étudié à l'aide des méthodes de la théorie quantique du champ.

5° La figure VI.4.5 montre le schéma énergétique des processus de désintégration bêta. Au processus de désintégration bêta correspond la transition d'un noyau d'un état énergétique discret à un autre. On porte sur l'axe d'ordonnées les énergies au repos des atomes, abstraction faite des énergies au repos du système constitué d'un ion «fils» et d'un électron formés par l'atome (A, Z) au cours de la désintégration β^-. La transition de l'état $I(E(Z) > 0)$ engendre une désintégration bêta dans laquelle $E(Z) > E(Z+1)$. Le passage à l'état II correspond à la transformation $Z + 1 \rightarrow Z$, c'est-à-dire à la capture E. Suivant la couche électronique à partir de laquelle a été capturé l'électron on distingue la *capture* K, L, M, etc. Le noyau «fils» excité formé par capture E passe à son état fondamental en émettant un quantum gamma d'énergie correspondante (p. 859). La transition du noyau à l'état III $(E(Z) < -2m_0c^2)$ correspond à la transformation $Z + 1 \rightarrow Z$ par capture E (en émettant également un quantum gamma) ou par désintégration β^+. La désintégration bêta dans laquelle les noyaux «fils» apparaissent en un seul état énergétique est dite ***désintégration bêta simple***. Si les noyaux «fils» apparaissent en divers états énergétiques, la désintégration bêta est dite ***désintégration bêta complexe***.

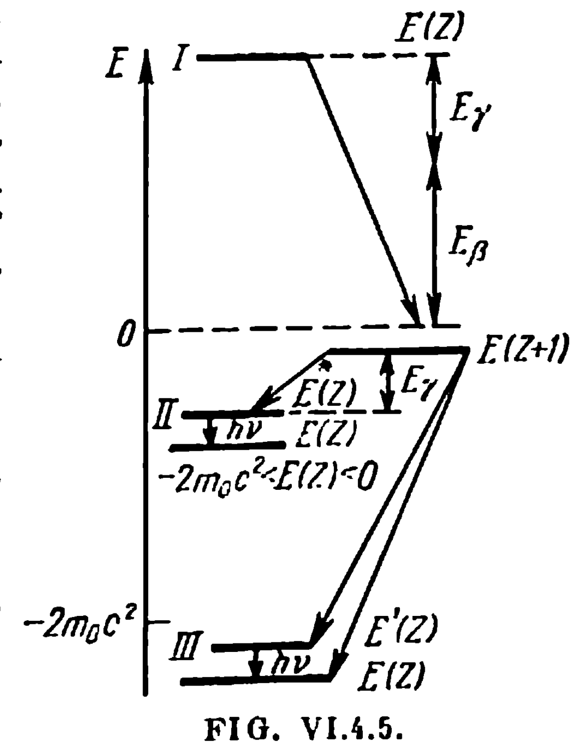


FIG. VI.4.5.

6° En théorie de la désintégration β, on considère la production

de l'électron et de l'antineutrino électronique (du positon et du neutrino électronique) comme le résultat de l'interaction du nucléon nucléaire avec les champs de l'électron (du positon) et du neutrino. Outre la production des particules e^- et $\tilde{\nu}_e$ (ou e^+ et ν_e) (p. 898), a lieu alors la transformation de ${}_0^1n$ en ${}_1^1p$ (ou inversement). L'intensité de cette interaction se caractérise par la constante d'interaction faible (la constante de couplage des champs nucléonique et électron-positon) $g \approx 1,4 \cdot 10^{-49}$ erg·cm³.

La probabilité de désintégration β se caractérise par l'élément matriciel nucléaire de transition $|H_{ik}|$, comprenant: la fonction d'onde du nucléon à l'état initial i; les fonctions d'onde du nucléon, de l'électron (du positon) et de l'antineutrino (du neutrino) électronique à l'état final k; l'énergie d'interaction correspondant à la transition $i \to k$ et une grandeur déterminant la densité du nombre d'états finals du système. La désintégration bêta suit les règles de sélection qui établissent une probabilité beaucoup plus grande pour les transitions β permises et une probabilité moindre pour les transitions β interdites.

7° Pour étudier la désintégration bêta, l'analyse du spectre énergétique $N(E)$ et du nombre N d'électrons (de positons) émis tient une grande importance. Par leur caractère les courbes de distribution $N(E)$ des spectres β se divisent en *spectres permis (spectres fermiens)* et en *spectres interdits*. Pour les spectres β permis, tout en supposant que la masse du neutrino est nulle, on a:

$$N(E)\,dE \approx F(Z,\,E)\;pE(E_0 - E)^2\,dE,$$

où p et E sont l'impulsion et l'énergie des électrons en unités de m_ec et m_ec^2, m_e la masse au repos de l'électron, E_0 l'énergie maximale des électrons (des positons) du spectre β. La fonction $F(Z, E)$ prend en considération l'influence du champ nucléaire sur la forme de la courbe $N(E)$. Pour les spectres β interdits $N(E)$ contient un facteur dépendant de E_0, de E et du degré d'interdiction.

Afin de pouvoir juger si un spectre β donné est fermien ou interdit, on construit le *graphique de Fermi (ou de Curie)*

$$K(E) = \left[\frac{N_{\text{exp}}(E)}{pEF(Z,E)}\right]^{1/2}$$

où $N_{\text{exp}}(E)$ est la courbe expérimentale du spectre β.

Pour les spectres β fermiens, $K(E)$ est une droite qui coupe l'axe d'abscisses pour $E = E_0$. La déviation de $K(E)$ d'une ligne droite montre qu'un spectre β donné appartient aux spectres interdits.

8° La constante radioactive λ pour la désintégration bêta (p. 847) est:

$$\lambda = C \int_0^E N(E)\, dE = CF(Z,\ E_0).$$

Le facteur C est calculé en théorie de la désintégration β (6°) de la manière suivante:

$$C = \frac{g^2 m_e^5 c^4}{2\pi^3 \hbar^7} \mid H_{ik} \mid^2.$$

Ici g est la constante d'interaction faible, $\mid H_{ik} \mid$ l'élément matriciel nucléaire (6°). Puisque $\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$, où $T_{1/2}$ est la période, on a:

$$F(Z,\ E_0)\, T_{1/2} = T_{1/2\,\text{réd}} = \frac{2\pi^3 \hbar^7}{g^2 m_e^5 c^4} \frac{\ln 2}{\mid H_{ik} \mid^2}.$$

Le produit $F(Z,\ E_0)T_{1/2}$ est dit *période réduite*. $T_{1/2}$réd dépendent uniquement du caractère de l'interaction des nucléons nucléaires avec le champ électron-neutrino. Leurs valeurs, obtenues à partir des données expérimentales, permettent de déterminer $\mid H_{ik} \mid$.

9° Classification des types de désintégration bêta suivant les valeurs de $T_{1/2}$réd:

$\log T_{1/2}$réd $\approx 3{,}5$ relatif aux *transitions suprapermises:* désintégration β du neutron, ${}^3_1H$ et transitions entre noyaux spéculaires [($N - Z = 1$ pour le noyau initial et $N - Z = -1$ pour le noyau final), ainsi que transitions pour lesquelles $N - Z = \pm 1$ pour un isobare (p. 832) et $N - Z = \pm 2$ pour un autre (N est le nombre de neutrons dans le noyau)]. Pour les transitions suprapermises $\mid H_{ik} \mid$ sont proches des valeurs maximales;

$\log T_{1/2}$réd ≈ 5: *transitions permises normales*;

$\log T_{1/2}$réd $\approx 9, \approx 13, \approx 18$: *transitions interdites* du 1er, 2e, 3e ordre d'interdiction respectivement. A ces derniers cas correspond une diminution brusque de la probabilité de désintégration bêta, due aux grandes variations du moment cinétique du noyau et, dans une série de cas, de la parité de son état (11°).

10° La constante radioactive λ_E pour une capture E permise est:

$$\lambda_E = \frac{g^2 m_e^5 c^4}{2\pi^3 \hbar^7} \mid H_{ki} \mid^2 F_E\ (\varepsilon_0,\ Z),$$

où

$$F_E(\varepsilon_0, Z) = 2\pi\left(\frac{2\pi Ze^2}{hc}\right)^3\left[\varepsilon_0 + 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi Ze^2}{hc}\right)^2\right]^2,$$

$$\varepsilon_0 = \frac{E_0}{m_e c^2}.$$

Cette formule ne tient pas compte des effets relativistes, qui deviennent sensibles lorsque la grandeur E_0 (p. 854) s'approche de l'énergie au repos de l'électron, égale à 0,511 MeV.

11° L'état d'un système quantique est dit *pair* si la fonction d'onde qui lui correspond ne change pas son signe lorsqu'on change les signes de toutes les coordonnées des particules d'un système *(lors d'inversion)*, et *impair*, dans le cas contraire.

La conservation du signe de la fonction d'onde lors de l'inversion spatiale peut également se caractériser par une *parité positive P* ($P = + 1$). Si, lors du changement de signes des coordonnées de la fonction d'onde, celle-ci change son signe, la parité est alors admise *négative* ($P = - 1$). Les notions de parité de l'état et de la fonction d'onde sont liées à la symétrie de l'espace, c'est-à-dire à l'équivalence dans celui-ci des directions à droite et à gauche, du haut et du bas, etc.

Tout système de particules peut se trouver dans un état de parité déterminée si le nombre de particules dans ce système reste invariable ou varie d'un nombre pair.

Des propriétés de l'équation de Schrödinger (p. 745) suit que si l'énergie d'une particule (ou d'un système de particules) est invariable, sa parité aussi reste inchangée *(loi de conservation de la parité)*. Au système de particules avant la désintégration bêta et après celle-ci doivent correspondre des fonctions d'onde de même parité (le noyau avant la désintégration; le noyau, la particule β et l'(anti)-neutrino après la désintégration.

12° Pour les interactions faibles (p. 894), qui sont, en particulier, responsables de la désintégration bêta, la parité de la fonction d'onde du système lors de la désintégration peut changer *(non-conservation de la parité)*. Outre l'état décrit, par exemple, par une fonction paire, peut apparaître un état décrit par une fonction impaire. Ce phénomène a été observé en premier lors de la désintégration bêta des mésons K (p. 898) donnant aussi bien deux que trois π mésons. Dans la désintégration bêta la non-conservation de la parité se manifeste dans l'asymétrie des directions spatiales des électrons émis par les noyaux: en direction du spin nucléaire sont émis moins d'électrons qu'en direction contraire. De cette asymétrie vient une relation déterminée entre la direction du spin de la particule et la direction de son mouvement dans l'espace.

Les spins du neutrino et de l'antineutrino doivent toujours être orientés parallèlement ou antiparallèlement à la direction de leur mouvement: pour l'antineutrino dans la direction du mouvement, pour le neutrino, dans le sens contraire *(polarisation longitudinale)*. Si l'on assimile le spin à une rotation, le mouvement de l'antineutrino correspond au mouvement du spin dextrogyre, le mouvement du neutrino, au mouvement du spin lévogyre. On distingue alors *l'hélicité à droite de l'antineutrino et l'hélicité à gauche du neutrino*. En ce qui concerne la non-conservation de la parité, voir p. 897.

8. Rayons gamma

1° On appelle *rayons gamma* un rayonnement électromagnétique dur dont l'énergie se libère au cours des transitions des noyaux d'un état excité à un état fondamental ou moins excité, ainsi qu'au cours des réactions nucléaires.

Dans le premier cas l'énergie des quanta gamma est égale à la différence des énergies des niveaux final et initial du noyau. Dans chaque processus de transition le noyau émet un quantum gamma. Les niveaux énergétiques du noyau étant discrets, les rayons gamma présentent un spectre de raies. Les fréquences des quanta gamma sont liées à la différence des énergies par la condition des fréquences de Bohr (p. 769).

2° En accord avec la loi de la conservation du moment cinétique (p. 84), le quantum gamma emporte du noyau un moment cinétique $\sqrt{l(l+1)}\,\hbar$, égal à la différence entre les moments cinétiques J du noyau dans les états final (k) et initial (i).

Alors

$$|J_i - J_k| \leqslant l \leqslant |J_i + J_k|.$$

En vertu de la loi de la conservation de la parité dans les interactions électromagnétiques

$$P_k\, P_f = P_i,$$

où P_k et P_i sont les parités des états du noyau, P_f la parité du quantum gamma.

Le moment cinétique du quantum gamma et sa parité déterminent la multiplicité du rayonnement.

3° La grandeur l est dite *ordre de multiplicité*. A la parité $(-1)^{l+1}$ du quantum γ correspond un *rayonnement magnétique*, à la parité $(-1)^l$, un *rayonnement électrique*.

La grandeur 2^l détermine le multipôle du rayonnement (pour $l = 1$ dipôle, pour $l = 2$ quadripôle, pour $l = 3$ octupôle, etc.). Les rayonnements électriques d'une *multipolarité* donnée sont désignés par El, les rayonnements magnétiques par Ml. On a choisi ces noms du fait que les vecteurs champs électrique **E** et magnétique **H** de l'onde électromagnétique correspondant au quantum gamma de l et P_f donnés sont dirigés de la même manière que dans le champ du rayonnement du dipôle électrique, du dipôle magnétique, etc. La relation entre la valeur l, le caractère de la multiplicité (E ou M), la parité P_f du photon et la variation de la parité de l'état du noyau apparaît du tableau donné ci-après:

l	La parité de l'état du noyau ne varie pas; $P_f = +1$	La parité de l'état du noyau varie; $P_f = -1$
1	$M1$	$E1$
2	$E2$	$M2$
3	$M3$	$E3$
4	$E4$	$M4$
5	$M5$	$E5$

Une fois que le quantum gamma est émis et qu'il a acquis une direction déterminée, on ne lui attribue plus une multiplicité donnée. Il se décrit par une onde plane, qui représente la superposition de toutes les multiplicités d'ordres de 1 à ∞.

4° Les règles de sélection interdisent ou font très peu probables les transitions γ qui ne satisfont pas aux conditions déterminées. Les transitions ne vérifiant pas les conditions données plus haut (2°) sont totalement interdites. Se trouvent être peu probables les transitions du noyau entre les niveaux correspondant à une grande différence de spins, autrement dit, les transitions présentant une grande valeur de l. Avec l'accroissement de l'ordre de la multiplicité, la probabilité de transitions γ des noyaux diminue rapidement: de 10^5 à 10^8 fois pour un passage de l à $l + 1$. D'ordinaire, les rayons gamma des noyaux ont pour ordres de multiplicité $E1$, $M1$, $E2$. A ces ordres de multiplicité correspond l'émission d'un photon gamma durant le temps de 10^{-8} à 10^{-15} s (durée de vie du noyau à l'état excité), dépendant de l'énergie de transition.

A côté de la transition radiative du noyau qui s'accompagne de l'émission d'un quantum gamma, il existe un phénomène non radiatif, appelé *conversion interne* des rayons gamma et observé pour des énergies de transition inférieures à 0,2-0,5 MeV. Dans ce

processus l'énergie libérée au cours de la transition nucléaire est transmise directement, sans intervention d'un quantum gamma, à l'un des électrons atomiques, en provoquant par là même l'ionisation de l'atome. Pour faciliter les calculs, on admet conventionnellement que la conversion interne évolue en deux stades: il y a d'abord émission d'un quantum gamma par le noyau, ensuite ce quantum gamma est absorbé par l'électron et lui transmet son énergie *(convertit)*.

5° On appelle *coefficient partiel de conversion interne de la couche K* le rapport des probabilités d'expulsion d'un électron K de l'atome et d'émission d'un quantum gamma en cet intervalle de temps. De façon analogue, on introduit les coefficients partiels de la conversion interne des couches L, M, ... de l'atome:

$$w_K = \frac{\lambda_K}{\lambda_\gamma}, \quad w_L = \frac{\lambda_L}{\lambda_\gamma}, \quad w_M = \frac{\lambda_M}{\lambda_\gamma}, \ldots$$

La somme des coefficients partiels est le *coefficient total de conversion interne:*

$$w = \frac{\lambda_e}{\lambda_\gamma} = w_K + w_L + w_M + \ldots,$$

où λ_e est la probabilité d'émission d'électrons de conversion par toutes les couches de l'atome. La grandeur λ_e croît avec la diminution de l'énergie d'excitation du noyau et avec l'augmentation de la multipolarité des rayons gamma.

6° Quand l'énergie libérée au cours de la transition nucléaire est supérieure au double de l'énergie au repos (p. 552) de l'électron $2m_0c^2 = 1{,}02$ MeV, la conversion interne avec *création d'une paire* électron-positon (p. 910) devient possible. Le coefficient de conversion correspondant croît avec l'augmentation de l'énergie de transition nucléaire et la diminution de la multipolarité des rayons gamma.

7° Dans une série de cas la vie du noyau excité peut être beaucoup plus longue que les temps ordinairement observés. Pour ces états métastables du noyau elle peut atteindre plusieurs années. En fonction des propriétés des niveaux énergétiques des noyaux et de la différence des énergies entre niveaux, la durée de vie du noyau à l'état métastable peut varier dans de larges limites. Par exemple, pour Np la vie du noyau excité correspond à une période de 5 500 a. Les variétés d'un même isotope, possédant non seulement une période correspondant à une transition gamma ordinaire, mais aussi une période répondant à une transition gamma à partir d'un état excité métastable, sont appelées *isomères nucléaires*. En

général, les isomères nucléaires d'un isotope donné présentent différentes valeurs du spin.

8° Le *phénomène d'isomérie nucléaire* s'explique à l'aide du modèle en couches du noyau (p. 842): dans les noyaux ayant des couches nucléoniques quasi complètes (pour N et Z proches des nombres magiques, p. 843) apparaissent des états excités de nombres quantiques l différant intensément de l pour les états fondamentaux des noyaux. En rapport avec la différence considérable entre les fonctions d'onde aux états excité et fondamental, la probabilité de transition entre ces états se trouve être petite (p. 770) et la vie à l'état excité, longue. L'expérience montre que l'isomérie nucléaire n'est en réalité observée que pour N et Z ayant des valeurs proches (inférieures) des nombres 50, 82, 126 (p. 843), auxquelles apparaissent des «îlots d'isomérie».

9° Le noyau à l'état métastable excité peut céder son énergie de deux manières. Le noyau passe à l'état fondamental en émettant des quanta gamma ou des électrons de conversion interne, et ensuite il y a émission des particules β avec le même spectre énergétique que celui des particules β formées par désintégration β ordinaire. Toutefois, la vie de l'état métastable étant supérieure à la période pour la désintégration β, on observe alors une période très longue pour cette désintégration. Dans le second cas, si la probabilité de transition radiative est comparable à la probabilité de désintégration β, celle-ci peut avoir lieu dans l'état métastable. Mais le spectre énergétique des particules β est différent du spectre obtenu dans le premier cas.

10° En émettant un quantum gamma, le noyau lui-même, en raison de la loi de la conservation de l'impulsion, acquiert une impulsion dirigée dans le sens contraire *(impulsion de recul)*. Si les noyaux émettant des quanta gamma appartiennent à un corps solide, le spectre des rayons gamma comprend deux composantes: a) l'une, ayant une raie de largeur naturelle Γ, déterminée par la vie des noyaux excités (p. 707) d'énergie E; b) l'autre, ayant une raie de largeur $\Gamma_R \sim E\,\frac{\overline{u}}{c} \gg \Gamma$, où $\overline{u}$ est la vitesse quadratique moyenne de l'agitation thermique (p. 216) des noyaux radioactifs γ dans un solide; cette composante possède une énergie dont la valeur diffère de la valeur de E par l'énergie de recul

$$R = \frac{E^2}{2M_0c^2},$$

où M_0 est la masse du noyau rayonnant (si on l'admet libre et se mouvant à une vitesse $\overline{u} \ll c$).

De ce fait, les raies d'émission gamma et d'absorption (de la même raie) deviennent très floues et sont décalées en énergie l'une par rapport à l'autre d'une grandeur $\sim 2R$. Etant donné que pour les rayons gamma R est, en général, non faible devant E, le phénomène d'*absorption par résonance des rayons gamma* ($E_{\text{ray}} = E_{\text{abs}}$ ou $\nu_{\text{ray}} = \nu_{\text{abs}}$) n'est pas d'ordinaire observé en pratique.

11° Dans des conditions déterminées, on peut obtenir que le quantum gamma émis transmette son impulsion non à un seul noyau rayonnant, mais à tout le cristal. Ceci étant, à la raie émise correspond une énergie de recul $R \approx 0$ (M est important) et $\Gamma_R \approx \approx \Gamma$, autrement dit, la largeur de la raie s'approche de sa largeur naturelle et le décalage en énergie pratiquement disparaît. Ce phénomène est dit *effet Mössbauer*. L'une des conditions nécessaires pour que cet effet se manifeste est:

$$R \leqslant 2k\,\Theta_D,$$

où Θ_D est la température de Debye du cristal (p. 288), k la constante de Boltzmann (p. 158). Quand $R \ll k\Theta_D$, les transitions gamma «sans recul» peuvent être observées même à température ambiante; quand $R \sim k\Theta_D$, leur observation exige de basses températures.

12° La petitesse extraordinaire des largeurs naturelles de beaucoup de raies gamma en comparaison de l'énergie des transitions gamma permet d'utiliser l'effet Mössbauer dans les expériences de grande précision (avec une sensibilité de l'ordre de Γ/E, atteignant 10^{-16}). Cet effet est appliqué à la mesure du décalage de fréquence des photons dans le champ gravitationnel, à la mesure du dédoublement Zeeman (p. 789) très faible des niveaux énergétiques nucléaires, etc.

9. Passage des particules chargées et des rayons gamma à travers la substance

1° Les particules chargées et les rayons gamma passant à travers une substance interagissent avec les couches électroniques et les noyaux atomiques de celle-ci. Ces interactions occasionnent la diffusion élastique des particules et des quanta (p. 755), la diffusion inélastique (p. 755) accompagnée de l'excitation et de l'ionisation des atomes, de l'amorçage des réactions nucléaires (p. 878), ainsi

que les altérations de la structure appelées *détériorations par irradiation.*

2° Les particules chargées traversant une substance subissent des pertes d'énergie par ionisation et par excitation des atomes, on les appelle *pertes par ionisation*; les pertes d'énergie par rayonnement de freinage (p. 606) sont appelées *pertes radiatives.* On calcule les pertes d'énergie spécifiques des particules par unité de chemin parcouru par celles-ci dans la substance: $\left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)$, où E est l'énergie totale de la particule.

Les pertes par ionisation spécifiques $\left(-\frac{dE}{dx}\right)_{\text{ion}}$ pour une particule chargée lourde (protons, particules α) lorsque $E \ll \frac{M}{m_e} Mc^2$, où M est la masse de la particule, m_e la masse de l'électron sont:

$$\left(-\frac{dE}{dx}\right)_{\text{ion}} = \frac{4\pi n_e e^4 z^2}{m_e v^2}\left[\ln\frac{2m_e v^2}{I} - \ln(1-\beta^2) - \beta^2\right],$$

où n_e est la densité des électrons dans la substance, ze la charge de la particule animée de vitesse v, $\bar{I}$ l'énergie moyenne d'ionisation des atomes de la substance, $\bar{I} = 13{,}5 \cdot Z$ eV, Z le nombre atomique de la substance, $\beta = v/c$.

Les pertes par ionisation spécifiques d'une particule chargée ne dépendent pas de la masse M de la particule, sont proportionnelles à la concentration des électrons dans la substance et dépendent de la vitesse de la particule: $\left(-\frac{dE}{dx}\right)_{\text{ion}} \backsim z^2 n_e\, \varphi(v)$, où $\varphi(v) \backsim \frac{1}{v^2}$. Avec l'accroissement de l'énergie de la particule ses pertes par ionisation spécifiques diminuent d'abord rapidement $\left(\text{comme } \frac{1}{E}\right)$. Ensuite cette diminution devient plus lente. Passant par un minimum pour $E = Mc^2$, les pertes par ionisation commencent à croître logarithmiquement.

La dépendance entre $\left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{ion}}$ et les paramètres de la particule et d'un milieu permet de calculer les pertes pour d'autres milieux: $\left(-\frac{dE}{dx}\right)_{\text{ion}} \backsim n_e = n_{\text{noy}}\, Z$, où Z est la charge des noyaux du milieu, n_{noy} leur concentration. Etant donné que $n_{\text{noy}} \approx$ const pour toutes les substances, on a $\left(-\frac{dE}{dx}\right)_{\text{ion}\,Z_2} = \frac{Z_2}{Z_1}\left(-\frac{dE}{dx}\right)_{\text{ion}\,Z_1}$, où Z_1 et Z_2 sont les charges des noyaux du premier et du second milieu.

Valeurs comparables des pertes par ionisation spécifiques pour les protons se mouvant avec différentes énergies dans l'air et le plomb

E, MeV	$(dE/d\xi)_{air}$, MeV/g·cm^{-2}	$(dE/d\xi)_{Pb}$ MeV/g·cm^{-2}	E, MeV	$(dE/d\xi)_{air}$, MeV/g·cm^{-2}	$(dE/d\xi)_{Pb}$ MeV/g·cm^{-2}
1	300	150	100	7,5	5
10	50	30	1 000	2,3	1,6

Les pertes par ionisation spécifiques peuvent être rapportées à l'unité $\xi = x\rho$, où ρ est la densité du milieu et ξ l'épaisseur de la substance (en g·cm^{-2}).

$$\frac{dE}{d\xi} = \frac{dE}{dx}\,\frac{1}{\rho}.$$

3° Pertes par ionisation spécifiques des électrons:

$$\left(-\frac{dE_e}{dx}\right)_{ion} = \frac{2\pi e^4 n_e}{m_e v^2}\left\{\left[\ln\frac{m_e v^2 T_e}{2\bar{I}^2(1-\beta^2)} - \ln 2\,(2\sqrt{1-\beta^2}) - 1 + \beta^2\right] + 1 - \beta^2\right\},$$

où T_e est l'énergie cinétique relativiste de l'électron (cf. les autres notations plus haut, 2°).

Dans le domaine des énergies relativistes la différence entre les pertes par ionisation des électrons et des particules lourdes n'est pas grande.

4° Les pertes radiatives spécifiques $\left(-\frac{dE}{dx}\right)_{rad}$ sont proportionnelles au carré de l'accélération a d'une particule chargée de masse M. Dans le champ coulombien des noyaux atomiques de la substance $a \sim \frac{1}{M}$, c'est pourquoi $\left(-\frac{dE}{dx}\right)_{rad} \sim \frac{1}{M^2}$. Pour les particules lourdes les pertes radiatives même dans les substances de nombre atomique Z important sont faibles. Pour les électrons d'énergie élevée, étant donné la petitesse de la masse de l'électron m_e, les pertes radiatives sont la forme principale des pertes d'énergie. Les pertes d'énergie avec la distance se décrivent dans ce cas par une loi exponentielle. La distance L à laquelle l'énergie de l'électron diminue de e fois par rayonnement de freinage est dite ***longueur de radiation***.

Les pertes radiatives spécifiques des électrons se définissent par

$$\left(-\frac{dE_e}{dx}\right)_{rad} = n\,E_0\,\Phi(Z,\ E_0),$$

où n est le nombre d'atomes par 1 cm³, E_0 l'énergie cinétique initiale de l'électron,

$$\Phi(Z, E_0) = \begin{cases} 5{,}79\cdot 10^{-28} Z(Z+1)\left[4\ln\left(\frac{2E_0}{m_e c^2}\right) - 4/3\right] \\ \quad \text{quand } m_e c^2 \leqslant E_0 \ll \frac{137\, m_e c^2}{Z^{1/3}}, \\ 5{,}79\cdot 10^{-28} Z(Z+\xi)\left[4\ln(183\cdot Z^{-1/3}) + \frac{2}{9}\right] \\ \quad \text{quand } E_0 \gg 137\,\frac{m_e c^2}{Z^{1/3}}. \end{cases}$$

Ici $\xi = 1{,}2 \div 1{,}4$ est la correction correspondant au rayonnement dans le champ des électrons atomiques. Lorsque l'énergie des électrons diminue, leurs pertes radiatives décroissent $\sim E_0$ et les pertes par ionisation varient de façon insignifiante. A une certaine *énergie critique* E_{cr} les pertes radiatives s'égalisent aux pertes par ionisation. Quand $E_0 < E_{cr}$, les pertes par ionisation sont supérieures aux pertes radiatives. La relation entre les pertes radiatives et les pertes par ionisation d'un électron d'énergie E_e (MeV) dans une substance de charge nucléaire Z est:

$$\frac{\left(\frac{dE_e}{dx}\right)_{\text{rad}}}{\left(\frac{dE_e}{dx}\right)_{\text{ion}}} \approx \frac{E_e Z}{800}.$$

5° Les pertes d'énergie d'une particule chargée par rayonnement Cerenkov (p. 557) sont:

$$\left(-\frac{\partial E}{\partial x}\right)_{\text{Cer}} = \frac{4\pi^2 e^2}{c^2}\int\left[1 - \frac{1}{(\beta n)^2}\right]\nu\, d\nu,$$

où ν est la fréquence du rayonnement, $n(\nu)$ l'indice de réfraction du milieu pour une fréquence donnée et $\beta = \frac{v}{c}$. L'intégration est étendue aux fréquences ν pour lesquelles $\beta n(\nu) > 1$. Les fréquences du visible et de l'ultraviolet proche se trouvent être très importantes. Dans les milieux denses $\left(-\frac{\partial E}{\partial x}\right)_{\text{Cer}}$ ne représente qu'une faible portion: 10^{-3} de la perte totale d'énergie par la particule. Dans les milieux gazeux avec des valeurs de Z moyennes et importantes cette fraction augmente jusqu'à 10^{-2}, et dans les gaz

légers (hydrogène, hélium) elle atteint 10^{-1} de la perte totale d'énergie.

6° Pour un milieu donné et une particule de masse déterminée et de charge ze, la valeur des pertes par ionisation spécifiques est fonction uniquement de l'énergie cinétique (2°):

$$\frac{dE}{dx} = \varphi(T).$$

D'où on trouve le *parcours de la particule*, autrement dit, la distance parcourue par la particule dans la substance jusqu'à son arrêt.

Le parcours R de la particule avec l'énergie cinétique T_1 représente:

$$R(T_1) = \int_0^{T_1} \frac{dT}{\varphi(T)}.$$

Utilisant la formule donnée plus haut (2°), on peut réduire l'expression de R à la forme

$$R = \frac{m}{(ze)^2} \int_0^{v_1} \frac{v}{\varphi(v)}\, dv,$$

où m est la masse de la particule, ze sa charge.

Pour deux particules ayant des vitesses égales dans un milieu donné

$$R_1 : R_2 = \frac{m_1}{z_1^2} : \frac{m_2}{z_2^2}.$$

Le parcours R et l'énergie cinétique T d'une particule de charge ze s'expriment au moyen du parcours R_p et de l'énergie cinétique T_p du proton dans le même milieu:

$$R = \frac{m}{m_p z^2} R_p, \qquad T = \frac{m}{m_p} T_p.$$

7° Formules empiriques traduisant la relation entre le parcours et l'énergie pour plusieurs particules lourdes et milieux déterminés.

Pour les protons en émulsion photographique $T_p = aR_p^n$, où $a = 0{,}25$, $n = 0{,}58$. Les valeurs de a et de n varient quelque peu pour différents types d'émulsions photographiques. T_p est mesuré en MeV, R_p en μ (microns).

Pour une particule lourde chargée quelconque en émulsion photographique $T = a\left(\frac{m}{m_p}\right)^{1-n} z^{2n} R^n$. Les valeurs de a et n restent les mêmes.

Pour les particules, α, émises par les émetteurs α naturels dans l'air, $\bar{R}_\alpha = 0{,}318\ T_\alpha^{3/2}$ (R_α en cm, T_α en MeV). La formule est vraie quand $3 < R_\alpha < 7$ cm.

Pour les particules α avec une énergie atteignant 200 MeV dans l'air, $\bar{R}_\alpha = \left(\frac{T_\alpha}{37{,}2}\right)^{1{,}8}$ ($\bar{R}_\alpha$ en m, T_α en MeV.)

Pour les protons avec la même énergie dans l'air, $\bar{R}_p = \left(\frac{T_p}{9{,}3}\right)^{1{,}8}$ ($\bar{R}_p$ en m, T_p en MeV).

Souvent on utilise également des formules empiriques reliant l'énergie initiale de la particule avec son parcours.

Les particules α avec des énergies caractérisant la plupart des noyaux radioactifs α provoquent l'ionisation des atomes de la substance, ainsi qu'une chaîne de réactions nucléaires. De plus, a lieu la diffusion élastique des particules α par les noyaux atomiques, qui se décrit par la formule de Rutherford (p. 758).

8° Les électrons traversant la substance subissent des diffusions élastique et inélastique. L'ionisation par unité de longueur du parcours de l'électron est proportionnelle en première approximation à $\rho N_A Z/Av_0^2$, où ρ est la densité, A le poids atomique, N_A le nombre d'Avogadro, Z le nombre atomique du milieu, v_0 la vitesse initiale de l'électron.

9° La relation entre le parcours R_e (g·cm^{-2}) et l'énergie cinétique T_e (MeV) des électrons dans l'aluminium s'exprime de la sorte:

$$R_e = 0{,}407 T_e^{1{,}38}\ \text{g·cm}^{-2} \text{ pour } 0{,}15 < T_e < 0,\ \text{MeV};$$

$$R_e = (0{,}542 T_e - 0{,}133)\ \text{g·cm}^{-2} \text{ pour } T_e > 0,\ \text{MeV}.$$

Ces formules peuvent être utilisées pour d'autres milieux aussi.

Pour des évaluations plus grossières la formule suivante est applicable

$$R_e\ (\text{g·cm}^{-2}) = 0{,}5\ T_e\ \text{MeV} - 0{,}1.$$

Outre R_e, on introduit l'*épaisseur de la couche de demi-atténuation* $d_{1/2}$, pour laquelle l'intensité dans la substance baisse de deux fois. Dans le cas général, la grandeur $d_{1/2}$ est différente suivant les épaisseurs d'une substance absorbante.

10° Les rayons gamma traversant la substance interagissent avec les atomes (les molécules). Les principaux types d'interaction sont l'effet photoélectrique (p. 725), l'effet Compton (p. 729) et la création de paires électron-positon (p. 910). Sont possibles également les réactions nucléaires sous l'action des rayons γ (effet photonucléaire, p. 883). Lors de l'effet photoélectrique, sous l'action d'un quan-

tum γ, est expulsé de la i-ième couche un électron d'énergie cinétique $T_e = E_\gamma - I_i$, où E_γ est l'énergie du quantum γ, I_i l'énergie d'ionisation relative à la i-ième couche de l'atome. La place libérée est prise par des électrons des couches supérieures avec émission de rayons X ou d'électrons Auger (p. 804).

La section d'effet photoélectrique σ_{ph} dépend du nombre atomique Z de l'atome et de l'énergie E_γ du quantum gamma:

$$\sigma_{\mathrm{ph}} \sim \frac{Z^5}{E_\gamma} \text{ quand } E_\gamma \gg I_K; \quad \sigma_{\mathrm{ph}} \sim \frac{Z^5}{E_\gamma^{7/2}} \text{ quand } E_\gamma > I_K,$$

où I_K est l'énergie d'ionisation relative à la couche K.

11° La section différentielle de diffusion Compton s'exprime par la formule de Klein-Nishina-Tamm:

$$\sigma_C = 2\pi r_e^2 \left\{ \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon^2} \left[\frac{2(1+\varepsilon)}{1+2\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon} \ln(1+2\varepsilon) \right] + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2\varepsilon} \ln (1+2\varepsilon) - \frac{1+3\varepsilon}{(1+2\varepsilon)^2} \right\},$$

où $r_e = \frac{e^2}{m_e c^2}$ est le rayon classique de l'électron, $\varepsilon = \frac{h\nu}{m_e c^2} = \frac{E_\gamma}{0{,}511 \text{ MeV}}$ le rapport de l'énergie du quantum gamma à l'énergie au repos de l'électron.

a) Quand $\varepsilon \ll 1$, $\sigma_C = \sigma_{\mathrm{Th}} \left(1 - 2\varepsilon + \frac{26}{5}\varepsilon^2 + \ldots\right)$, où $\sigma_{\mathrm{Th}} = \frac{8\pi}{3} r_e^2$ est la section classique de diffusion rapportée à un électron *(section efficace de Thompson)*. Pour les faibles valeurs de E_γ, σ_C décroît linéairement avec l'accroissement de l'énergie;

b) quand $\varepsilon \gg 1$, $\sigma_C = \pi r_e^2 \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{1}{2} + \ln 2\varepsilon\right)$, c'est-à-dire quand $E_\gamma \gg m_e c^2$, $\sigma_C \sim \frac{1}{E_\gamma}$. En tenant compte de la présence de Z électrons dans l'atome, la section totale σ_C, rapportée à l'atome, est $\sigma_C \sim \frac{Z}{E_\gamma}$.

12° Si le processus de création d'une paire électron-positon a lieu dans le champ coulombien du noyau, l'énergie du noyau de recul est insignifiante et l'énergie de seuil $E_{0\gamma}$ nécessaire pour créer une paire électron-positon est:

$$E_{0\gamma} \approx 2m_e c^2 = 1{,}02 \text{ MeV}.$$

Lors de la création d'une paire dans le champ coulombien de l'électron $E_{0\gamma} \approx 4m_ec^2 = 2{,}04$ MeV. La création de paires électron-positon sous l'action de deux photons aura lieu à condition que $E_{\gamma 1} + E_{\gamma 2} > 2\, m_e c^2$.

La condition exigée pour la création d'une paire lors du choc de deux électrons est: $E_e > 7\, m_ec^2$, où E_e est l'énergie totale de l'électron en mouvement.

La section σ_{paire} de création d'une paire dans le champ du noyau se définit par

$$\sigma_{\text{paire}} \backsim Z^2 \ln E_\gamma \text{ quand } 5m_ec^2 < E_\gamma < 50\, m_ec^2.$$

σ_{paire} augmente avec l'accroissement de l'énergie beaucoup plus lentement quand $E_\gamma < 5\, m_e c^2$ et $E_\gamma > 50\, m_ec^2$. Dans le cas ultrarelativiste σ_{paire} ne dépend pas de E_γ.

13° La section totale σ d'interaction des rayons gamma avec la substance est:

$$\sigma = \sigma_{\text{ph}} + \sigma_{\text{C}} + \sigma_{\text{paire}}.$$

Les formules pour les sections des processus isolés sont données plus haut (10°-12°).

Dans le domaine d'énergies $E_\gamma < E_1$, où E_1 est de l'ordre de $(10^{-2} \div 10^{-1})$ MeV, le principal processus d'interaction des rayons γ avec la substance est l'effet photoélectrique. Dans le domaine d'énergies $E_1 < E_\gamma < E_2$, où E_2 constitue en ordre de grandeur $(1 \div 10)$ MeV, l'effet principal est l'effet Compton, et dans celui des hautes énergies $E_\gamma > E_2$, c'est la création de paires électron-positon qui prédomine. Sur la figure VI.4.6 sont représentées les courbes de dépendance entre les sections d'interaction des rayons gamma dans le plomb et l'énergie du quantum gamma pour chacun des processus et pour l'effet total.

14° L'affaiblissement de l'intensité des rayons gamma dans la substance lorsque le faisceau de rayons gamma est très étroit a lieu suivant la loi:

$$I = I_0 e^{-\mu x},$$

où I est l'intensité à la profondeur x, I_0 l'intensité des rayons jusqu'à leur entrée dans la substance. Pour de larges faisceaux de rayons gamma

$$I = I_0 e^{-\mu x} B(\mu x,\, E_\gamma,\, Z),$$

où B est le *facteur d'accumulation du rayonnement* $B \backsim (1 + \mu x)^n > > 1$, $n \approx 2 \div 3$. La grandeur μ est *facteur d'atténuation linéaire du rayonnement* et a le sens de longueur inverse sur laquelle le rayonnement s'atténue de e $(= 2{,}718)$ fois. Etant donné que l'atténuation des rayons gamma dans la substance est rigoureusement proportion-

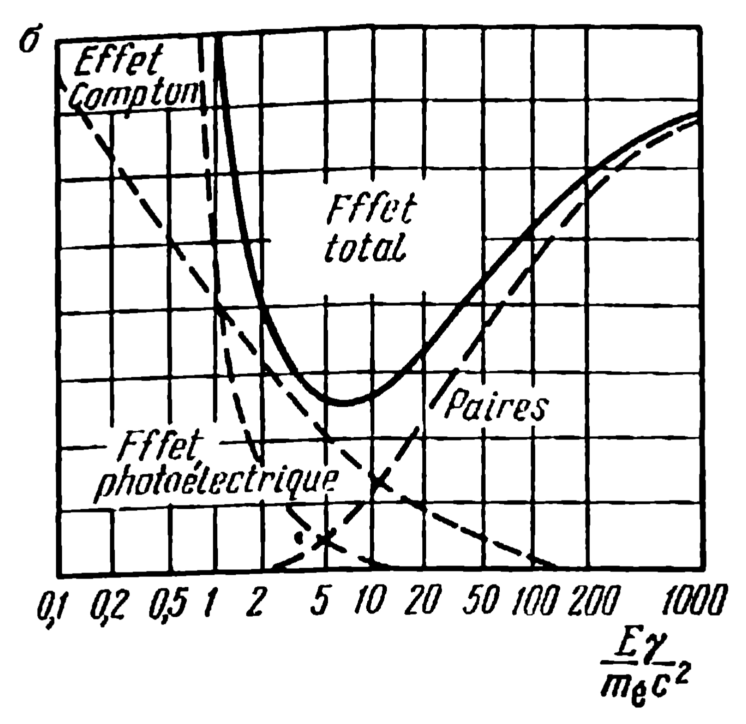


FIG. VI.4.6.

nelle à la densité ρ de celle-ci, souvent on introduit, en plus de μ, le *facteur massique d'absorption* μ/ρ. On utilise également la notion de *couche de demi-atténuation* des rayons gamma $d_{1/2} = \frac{\ln 2}{\mu} = \frac{0,69}{\mu}$. Le pouvoir de pénétration des rayons gamma est défini par leur énergie initiale, par la densité et le nombre atomique de la substance. Pour de très durs rayons gamma avec des énergies de l'ordre de 10^6-10^8 eV, le pouvoir de pénétration peut atteindre plusieurs mètres (dans les milieux condensés).

Facteurs d'atténuation linéaires des rayons γ dans différents milieux

Energie, MeV	Facteur d'atténuation linéaire μ, cm^{-1}		
	air	eau	plomb
0,1	$1,98 \cdot 10^{-4}$	0,172	5,99
0,5	$1,11 \cdot 10^{-4}$	0,096	1,67
1,0	$0,81 \cdot 10^{-4}$	0,070	0,75

15° En calculant l'intensité des rayons gamma dans une substance donnée, la source de rayonnement étant située dans un autre milieu, on doit tenir compte de la réflexion du rayonnement sur

l'interface des deux milieux (p. 611), ainsi que de l'autoabsorption du rayonnement dans la source, due aux dimensions finies de celle-ci. Le facteur tenant compte de ces phénomènes est dit *albédo.* La valeur de l'albédo croît rapidement avec la diminution de l'énergie des rayons gamma.

16° Les unités de radioactivité sont définies par le nombre de noyaux atomiques qui se désintègrent par unité de temps. L'unité *curie* (Ci) est définie comme l'activité d'une préparation dans laquelle le nombre de désintégrations est, par seconde, de $3{,}700 \cdot 10^{10}$.

On utilise également des unités: le *microcurie* ($\mu Ci = 10^{-6}$ Ci), le *millicurie* ($mCi = 10^{-3}$ Ci), le *kilocurie* ($kCi = 10^3 Ci$), le *mégacurie* ($MCi = 10^6$ Ci). Moins souvent on utilise le *rutherford* (rd), qui représente l'activité d'une préparation dans laquelle le nombre de désintégrations est, par seconde, de 10^6;

$$1 \text{ Ci} = 3{,}7 \cdot 10^4 \text{ rd};$$

le *millirutherford* (mrd) et le *microrutherford* (μrd):

$$1 \text{ rd} = 10^3 \text{ mrd} = 10^6 \ \mu\text{rd},$$

$$1 \ \mu\text{rd} = 1 \text{ désint/s}.$$

Les unités Ci ou rd sont utilisées pour caractériser les substances radioactives α ou β.

17° Pour les liquides et les gaz on utilise les unités de concentration des substances radioactives:

$$1 \text{ Ci/l} = 2{,}2 \cdot 10^{12} \text{ désint/mn} \cdot \text{l};$$

$$1 \text{ éman} = 10^{-10} \text{ Ci/l} = 220 \text{ désint/mn} \cdot \text{l};$$

$$1 \text{ mache} = 3{,}64 \cdot 10^{-10} \text{ Ci/l} = 780 \text{ désint/mn} \cdot \text{l}.$$

Pour l'uranium, le thorium et le radium les concentrations volumiques s'expriment également en g/l.

18° Le milligramme-équivalent (mg-Eq) de radium, qui est l'unité d'activité γ, représente l'activité d'une préparation radioactive dont les rayons γ, dans des conditions identiques de mesure, créent dans la chambre d'ionisation équivalente à air la même ionisation que produit 1 mg de radium. La source ponctuelle de 1 mg de radium en équilibre avec les produits de désintégration, après une filtration initiale à travers la couche de 0,5 mm de platine, crée dans l'air à la distance de 1 cm une intensité de radiation de 8,4 röntgen par heure (R/h) (cf. 20°). 1 mg-Eq de radium correspond à l'activité gamma de n'importe quelle substance radioactive dont la source ponctuelle crée à la distance de 1 cm une intensité de radiation égale à 8,4 R/h.

On utilise également le röntgen-heure-mètre (R/h·m) qui correspond à l'activité gamma d'une source qui crée à la distance de 1 m une intensité de radiation (cf. 20°) de 1 r/h. La source d'activité gamma de 1,2 g-Eq de radium produit une intensité de radiation de 1 R/h·m.

19° L'intensité I des rayons γ se définit par la quantité d'énergie des rayons γ passant par unité de temps à travers une unité de surface, disposée perpendiculairement à la direction de propagation des rayons γ. I est mesurée en $MeV/cm^2 \cdot s$, $erg/cm^2 \cdot s$ ou W/cm^2.

20° Les grandeurs appelées ***doses de radiations*** représentent la mesure de l'action qu'exerce une radiation. Suivant les cas on distingue:

a) ***Dose d'irradiation:*** quantité de radiation reçue par le milieu et mesurée par son action ionisante dans l'air. Pour les rayons X et γ la dose d'irradiation est mesurée en röntgens, pour les autres radiations ionisantes, en reps.

On appelle ***röntgen*** (R) l'unité de dose à laquelle dans 0,001 293 g d'air il y a formation d'ions de charge totale égale à une unité électrostatique de quantité d'électricité de chaque signe. Ceci correspond à la création de $2{,}083 \cdot 10^9$ paires d'ions monovalents en 1 cm^3 d'air dans les conditions normales (p. 158) et est lié à une dépense de 0,11 erg ou $6{,}8 \cdot 10^4$ MeV d'énergie par 1 cm^3 d'air. Rapporté à 1 g d'air, 1 R correspond à la création de $1{,}61 \cdot 10^{12}$ paires d'ions monovalents et à une dépense d'énergie de 84 erg ou de $6{,}8 \cdot 10^4$ MeV.

Le ***rep (röntgen équivalent physique)*** représente l'unité de dose de n'importe quelle sorte de radiation à laquelle l'absorption d'énergie par 1 g de substance irradiée est égale à la perte d'énergie par ionisation produite dans 1 g d'air par une dose de 1 R de rayons X ou γ.

$$1 \text{ rep} = 84 \text{ erg/g} = 1{,}61 \cdot 10^{12} \text{ paires d'ions/g} = 5{,}3 \cdot 10^7 \text{ MeV/g}.$$

b) ***Dose d'absorption:*** énergie de n'importe quel type de radiation absorbée par une unité de masse de substance irradiée. Pour toutes les radiations ionisantes la dose absorbée est mesurée en rads.

Le ***rad*** est l'unité de dose correspondant à l'absorption de 100 erg d'énergie par 1 g de substance irradiée

$$1 \text{ rad} = 1{,}19 \text{ rep}; \ 1 \text{ rep} = 0{,}84 \text{ rad}.$$

c) ***Dose biologique:*** grandeur définissant les effets biologiques des radiations sur l'organisme, elle est mesurée en rems.

Le ***rem (röntgen équivalent man)*** est l'unité de dose dont l'absorption produit les mêmes dégâts physiologiques que l'absorption de 1 R de rayons X ou gamma. Pour les rayons gamma et les particules β le rem est de l'ordre de l'unité, pour les particules α il est de l'ordre de 10 à 20. 1 rem est égal à 0,01 J/kg (en u. SI).

d) *Dose intégrale:* dose totale de radiation ionisante de n'importe quel type absorbée par toute la masse (ou tout le volume) de la substance. Est mesurée en *grammes-röntgens* ou en *grammes-rads*.

21° La dose de radiations rapportée à une unité de temps est dite *intensité de la dose N*.

La relation entre l'intensité de la dose N des rayons γ (en R/s) et leur intensité I (en erg/cm²·s) (19°) s'exprime par

$$N = \frac{I\mu}{0,11}\ \text{R/s} = nh\nu\,\frac{1,6\cdot 10^{-6}\mu}{0,11}\ \text{R/s},$$

où μ est le facteur d'atténuation linéaire (14°), n le nombre de photons traversant une surface de 1 cm² par 1 s, $h\nu$ l'énergie du photon en MeV et 0,11 l'équivalent énergétique du röntgen dans l'air (20°).

Quelques données sur les doses de radiations:

Source de radiations	Dose de radiations ou son intensité
Radioactivité naturelle (rayons cosmiques, radioactivité du milieu ambiant et du corps humain)	0,1 rem/a
Doses de radiations appliquées en médecine (irradiation locale)	jusqu'à 10 000 rem
Doses de radiations produisant l'irradiation générale de tout le corps (mal des rayons à issue fatale)	400-500 rem

22° Efficacité biologique des différents types de radiations:

Type de radiations	1 rep correspond à	1 rem correspond à
Rayons β ou γ	1 rem	1 rep
Particules α ou protons	10 rem	0,1 rep
Neutrons thermiques	5 rem	0,2 rep
Neutrons rapides (< 40 MeV)	10 rem	0,1 rep

10. Méthodes d'observation et de détection des particules ionisantes et des quanta de rayonnement

1° Pour détecter et étudier les différentes radiations aussi bien ionisantes que non ionisantes, on utilise la *chambre d'ionisation*.

Dans le cas de radiations non ionisantes, l'ionisation est un processus secondaire qui a lieu au compte des particules chargées

secondaires, apparaissant lors de l'interaction du rayonnement avec la substance.

La chambre d'ionisation est une enceinte ayant une fenêtre de rayonnement dans laquelle sont introduites deux électrodes. Sous l'action de la tension appliquée les ions, créés par le rayonnement dans le gaz, se meuvent vers les électrodes. Le courant ionique est d'ordinaire faible. Pour pouvoir le mesurer, il faut utiliser les *électromètres* de sensibilité amplifiée. La tension entre électrodes est choisie de manière que la chambre fonctionne au régime de saturation de sa caractéristique tension-courant.

2° Pour observer les traces de diverses particules ionisantes lors de leurs interactions avec les atomes et les noyaux, on utilise la chambre de Wilson, la méthode de l'émulsion photographique et les chambres à bulles.

3° La *chambre de Wilson* est remplie de vapeurs saturantes d'un liquide quelconque. Périodiquement, par détente brusque du volume de la chambre les vapeurs sont rendues sursaturées. Si, au moment de la détente, une particule ionisante traverse la chambre, les ions qu'elle produit deviennent *centres de condensation* pour les molécules de la vapeur sursaturée. En éclairant le volume utile de la chambre avec un faisceau intense de lumière et en prenant des photographies stéréoscopiques à cet instant, on fixe les *traces ionisantes* dans la chambre.

L'insertion de la chambre dans un champ magnétique *(méthode de Wilson-Skobeltzyne)* permet, par l'étude des paramètres de la trace, de se faire une idée sur la nature et les propriétés de la particule. Ainsi, la courbure de la trace de la particule dans le champ magnétique définit le signe de sa charge. La longueur et l'épaisseur de la trace, son déviation d'une droite (en l'absence de champ) au compte de la diffusion multiple, la quantité de gouttes par unité de longueur de la trace donnent la possibilité d'*identifier les particules*. La chambre peut être déclenchée par un compteur (8°) enregistrant l'apparition de la particule dans un circuit de coïncidences (11°).

4° La *méthode de l'émulsion photographique nucléaire* (en particulier, des *plaques photographiques à couches épaisses)* est basée sur le fait qu'en passant à travers l'émulsion, la particule chargée ionise les atomes et les molécules du milieu constituant l'émulsion. En particulier, les cristaux d'halogénure d'argent des plaques photographiques se désintègrent sous l'action des particules ionisantes et deviennent aptes à être développés. L'image photographique latente produite par les particules est rendue visible par développement des plaques photographiques et étudiée stéréographiquement sur les tranches d'émulsion photographique. L'avantage de la méthode de l'émulsion photographique nucléaire sur la chambre

de Wilson consiste en son pouvoir de rétention élevé, en d'autres termes, au freinage intense des particules, permettant par là même d'étudier l'interaction de particules de très hautes énergies (p. 914).

5° La *chambre à bulles* réunit les avantages de pouvoir obtenir immédiatement une image stéréoscopique des traces des particules et un pouvoir de rétention élevé pour les particules de très hautes énergies. Elle est une enceinte remplie d'un liquide transparent surchauffé. La particule ionisante, traversant la chambre, provoque une ébullition brusque du liquide le long de sa trajectoire. Le «chapelet» de bulles apparaissant alors est photographié comme dans la chambre de Wilson. Les liquides purs les plus utilisés dans la chambre à bulles sont l'hydrogène liquide, le propane C_3H_8, ainsi que les fréons ($CClF_3$, $CClF_2$, $CBrF_3$). La chambre à hydrogène permet d'étudier les collisions des particules de hautes énergies avec les noyaux de l'hydrogène (les protons). On utilise également les solutions sursaturées de gaz dans les liquides, ainsi que les mélanges de liquides permettant de travailler à températures ambiantes.

6° Pour détecter les particules ionisantes provenant de sources de faible activité, on utilise les *compteurs:* proportionnel, de Geiger-Müller, à étincelles et à scintillations. Ne permettant pas l'identification immédiate des particules, les compteurs donnent néanmoins la possibilité de déterminer la densité de leur flux et la répartition des particules dans le flux suivant les énergies.

7° Le *compteur proportionnel* est une enceinte cylindrique remplie d'un gaz quelconque, pourvue de deux électrodes concentriques dont l'une (l'anode) est un fil tendu suivant l'axe du cylindre et l'autre (la cathode) constitue l'enveloppe métallique extérieure du volume utile du compteur. L'incidence d'une particule ionisante dans le compteur provoque une décharge semi-autonome, étant donné que le compteur fonctionne sur la partie linéaire de la caractéristique tension-courant du gaz de travail (p. 406). Au voisinage de l'anode, du fait d'un gradient important de l'intensité du champ électrique a lieu l'ionisation par choc (p. 406) des molécules gazeuses par les ions incidents et apparaît une impulsion électrique, qui est proportionnelle à l'ionisation primaire, c'est-à-dire à l'énergie de la particule pénétrant dans le compteur.

8° Le *compteur de Geiger-Müller* par sa construction et son principe d'action ne diffère pas beaucoup du compteur proportionnel, mais fonctionne sur la plage de saturation de la caractéristique tension-courant *(plateau)* du gaz dont il est rempli. Ceci étant, des impulsions électriques identiques sont produites indépendamment de l'ionisation primaire, autrement dit, c'est le nombre de particules ionisantes que le compteur enregistre immédiatement.

9° Le fonctionnement du *compteur à scintillations* est basé sur le phénomène de luminescence (p. 736). L'étincelle lumineuse produite par une particule chargée pénétrant dans le cristal scintillant est détectée par un *photomultiplicateur* et enregistrée par un dispositif électronique. L'amplitude de l'impulsion dépend de l'intensité de l'étincelle, qui est définie par l'énergie de la particule. C'est pourquoi le compteur permet de déterminer la distribution des particules suivant les énergies.

10° Dans les cas où l'ionisation produite par les particules dans le volume utile du compteur ou de la chambre d'ionisation est insignifiante ou bien fait défaut (dans le cas de particules neutres), on place devant les dispositifs d'enregistrement ou à l'intérieur de ceux-ci des substances telles que les particules incidentes puissent en arracher des particules chargées. Par exemple, pour enregistrer les rayons gamma, qui créent une ionisation faible dans les gaz et les substances de nombres atomiques peu importants, on utilise des feuilles métalliques, et le compteur enregistre les photoélectrons expulsés des feuilles. Pour détecter les neutrons, on utilise des substances qui contiennent de l'hydrogène, et le compteur enregistre les protons expulsés de ceux-ci par les neutrons.

11° Pour observer le mouvement d'une seule particule dans le flux de particules ou le mouvement de particules de même sorte dans le flux constitué de plusieurs sortes de particules, on utilise plusieurs compteurs ou chambres associés dans un *circuit de coïncidences*. Dans ce circuit les impulsions sont comptées seulement dans le cas où l'ionisation est enregistrée en un petit intervalle de temps par tous les compteurs à la fois. La méthode des coïncidences donne la possibilité d'établir les directions de mouvement des particules, leurs vitesses, la distribution des flux dans l'espace ainsi que le lien génétique existant entre les particules incidentes et les particules secondaires.

12° Si le compteur enregistre un grand nombre de particules par unité de temps, les numérateurs mécaniques sont incapables de compter ses impulsions à cause de leur rémanence. Dans ce cas on place devant le numérateur des *circuits de comptage*, dispositifs électroniques spéciaux comptant le nombre d'impulsions du compteur dans un rapport de $1:2^n$ ou bien de $1:10^m$ (les schémas du premier type avec $n = 6$, autrement dit, avec un recomptage sur 64, sont plus utilisés).

CHAPITRE 5

Réactions nucléaires

1. Notions fondamentales

1° On appelle *réactions nucléaires* les transformations des noyaux atomiques dues à leurs interactions entre eux ou avec les particules élémentaires. Dans la plupart des réactions nucléaires prennent part deux noyaux et deux particules; l'une des paires noyau-particule est dite initiale, l'autre finale.

2° Les réactions nucléaires s'écrivent symboliquement sous la forme:

$$A + a \rightarrow B + b \quad \text{ou} \quad A(a, b)B,$$

où A et B sont les noyaux initial et final et a et b les particules initiale et finale. La réaction nucléaire est caractérisée par l'*énergie de réaction nucléaire.* Cette énergie est égale à la différence des énergies cinétiques des paires finale et initiale de la réaction. Quand $Q < 0$, les réactions se déroulent avec absorption de chaleur et sont dites *endothermiques*; quand $Q > 0$, les réactions évoluent avec dégagement de chaleur et sont dites *exothermiques.*

3° Les réactions nucléaires endothermiques ne sont possibles que pour les particules qui possèdent une *énergie cinétique de seuil*

$$E_{\text{seuil}} = \frac{M_A + M_a}{M_A} \, |Q|,$$

où M_A est la masse du noyau immobile *(cible)*, M_a la masse de la particule incidente *(projectile).*

4° L'interaction de la paire noyau-particule initiale (1°) peut donner: 1) une *diffusion élastique*, dans laquelle a lieu seulement la redistribution de l'énergie cinétique des particules s'entrechoquant; 2) une *diffusion inélastique*, lors de laquelle du noyau est

expulsée une particule $b = a'$, identique à la particule frappant la cible mais d'énergie moindre; le noyau de la cible dans ce cas passe à un état excité ($A = A^*$); l'écriture symbolique de la diffusion inélastique est: $a + A \rightarrow A^* + a'$ ou encore $A(a, a')A^*$; 3) une ***réaction nucléaire*** par suite de laquelle apparaissent un nouveau noyau $B \neq A$ et une nouvelle particule $b \neq a$, de sorte que le processus évolue conformément au schéma $a + A \rightarrow B + b$ ou $A(a, b)B$. La réaction nucléaire provoque la modification des propriétés et de la composition de la paire initiale ou la transformation des particules élémentaires. Dans toutes les réactions nucléaires sont observées les lois de la conservation de la charge électrique totale et du nombre de nucléons (nombre baryonique, p. 896), de l'énergie, de l'impulsion, du moment cinétique et de la parité (p. 858), ainsi que du spin isotopique (p. 895) ou de sa projection.

5° On étudie les réactions nucléaires par les méthodes de la théorie des collisions. La probabilité d'une réaction nucléaire est caractérisée par la valeur de sa section efficace σ (p. 755) et aussi par son ***rendement:*** le rapport du nombre de transformations nucléaires au nombre de particules initiales a. La dépendance de σ vis-à-vis de l'énergie des particules incidentes est décrite par la ***fonction d'excitation*** de la réaction nucléaire. Les réactions nucléaires peuvent être considérées comme des transitions quantiques d'un système $(a + A)$ vers un système $(b + B)$.

Dans une série de cas la réaction nucléaire peut évoluer de façon non univoque, autrement dit, à part le schéma $a + A \rightarrow B + b$, elle peut se dérouler suivant le schéma $a + A \rightarrow C + c$, c'est-à-dire $A(a,c)C$, et suivant d'autres schémas. Les voies possibles d'évolution d'une réaction nucléaire sont dites ses ***canaux.*** L'étape initiale de la réaction est appelée ***canal d'entrée.***

6° Selon le caractère de l'interaction du projectile a avec la cible A on distingue les interactions ***directes***, quand la réaction nucléaire évolue en une étape, et ***indirectes*** lorsque la réaction se déroule en deux étapes. A la première étape la particule incidente reste dans le noyau-cible. L'énergie de cette particule se répartit rapidement entre les nucléons du noyau et aucun d'entre eux n'obtient une énergie suffisante pour s'échapper du noyau. Passe un temps assez long devant le temps nucléaire caractéristique ($10^{-22} \div 10^{-23}$ s), jusqu'à ce que l'énergie dans le noyau se concentre à nouveau sur une particule et qu'elle soit éjectée du noyau (seconde étape de la réaction nucléaire). Les noyaux qui se forment par absorption d'une particule et se trouvent à l'état excité sont dits ***noyaux composés*** ou

transitoires (noyau compound). La réaction nucléaire se déroule dans ce cas comme en deux étapes:

$$a + A \to C^* \to B + b,$$

où C^* est le noyau composé. La durée de vie des noyaux composés atteint $10^{-15} \div 10^{-16}$ s.

7° Le caractère de la désintégration d'un noyau composé ne dépend pas du mode de sa formation. Les différentes formes de désintégration ont telle ou autre probabilité, qui est déterminée par la *largeur partielle* Γ_i relative à un mode de désintégration donné. La probabilité pour que le noyau composé se désintègre en émettant une particule b (4°) est $w_b = \frac{\Gamma_b}{\Gamma}$, ou Γ_b est la largeur partielle d'un type de désintégration donné, Γ la largeur totale égale à la somme de toutes les largeurs correspondant à tous les modes de désintégration possibles. La largeur du niveau $\Gamma = \sum \Gamma_b$ représente ici la mesure de l'indétermination de l'énergie du noyau à un état donné, liée à la relation de Heisenberg pour l'énergie et le temps (p. 747). La section efficace σ (a, b) de la réaction nucléaire $A(a, b)B$ (4°) $\sigma(a, b) = \sigma(a)\, w_b$, où $\sigma(a)$ est la section efficace de formation du noyau composé: $\sigma(a) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1) \frac{\lambda^2}{4\pi} D_l \eta_l$. Ici l est le moment cinétique des particules incidentes, λ la longueur de leurs ondes brogliennes (p. 742), D_l la probabilité de passage de la particule incidente de moment cinétique l à travers la barrière de potentiel, η_l la probabilité d'adhésion de cette particule au noyau-cible, déterminée par l'interaction nucléaire de a et A (4°).

Dans le modèle de la goutte liquide (p. 841) le projectile considéré est comme une source d'élévation de la «température» du noyau-goutte, et la particule expulsée du noyau, comme le résultat de l'«évaporation» de la matière nucléaire à partir de la goutte.

8° La section efficace σ_n de la réaction nucléaire de formation d'un noyau composé provoquée par un neutron de moment cinétique nul ($l = 0$) au voisinage de l'un des niveaux de ce noyau (pour un niveau isolé) s'exprime par la *formule de Breit-Wigner:*

$$\sigma_n \approx \pi \lambdabar^2 \frac{\Gamma_n \Gamma}{(E - E_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}},$$

où $\lambdabar = \frac{\lambda}{2\pi}$, λ est la longueur d'onde broglienne du neutron, Γ la largeur totale du niveau, Γ_n la largeur neutronique, E l'énergie du neu-

tron, E_0 l'énergie de résonance du neutron égale à l'énergie du niveau du noyau composé. A la résonance ($E = E_0$) la section atteint sa valeur maximale $\sigma_n \approx 4\pi\lambda\!\!\!^{-2}$ (le facteur de spin est omis) pour $\Gamma = \Gamma_n$.

2. Classification générale des réactions nucléaires

1° Les réactions nucléaires sont classifiées: a) d'après l'énergie des particules qui les provoquent; b) d'après le type de particules prenant part à ces réactions; c) d'après le caractère des transformations nucléaires qui ont lieu.

2° On distingue les réactions nucléaires aux faibles, moyennes et hautes énergies. Les réactions aux faibles énergies (de l'ordre de eV) ont lieu avec participation de neutrons. Les réactions aux énergies moyennes (jusqu'à quelques MeV) sont provoquées par les particules chargées, les quanta gamma et les rayons cosmiques secondaires (p. 915). Les réactions aux hautes énergies (centaines et milliers de MeV) conduisent à la désintégration des noyaux en leurs nucléons et à la naissance de particules élémentaires n'existant pas à l'état libre (mésons, hypérons, etc., p. 898).

3° D'après le type de particules prenant part aux réactions nucléaires on distingue: a) les réactions dues aux neutrons; b) les réactions dues aux particules chargées: protons, deutons (noyaux d'hydrogène lourd), particules alpha (noyaux d'hélium) et ions à charge multiple d'éléments chimiques lourds; en tant que sources de particules chargées servent les éléments à radioactivité naturelle (p. 845), les accélérateurs de particules chargées (p. 464), les rayons cosmiques (p. 914); c) les réactions dues aux quanta gamma.

4° D'après le type de noyaux prenant part aux réactions nucléaires on distingue: les réactions sur noyaux légers (avec des nombres massiques $A < 50$), les réactions sur noyaux moyens ($50 < A < 100$) et les réactions sur noyaux lourds ($A > 100$).

5° Pour les réactions induites par les particules chargées est caractéristique l'existence d'une barrière de potentiel coulombienne que doivent franchir les particules pour pouvoir pénétrer dans le noyau et provoquer la réaction. En vertu de l'effet tunnel (p. 761), ces réactions ont déjà lieu pour des énergies des particules inférieures à la hauteur de la barrière de potentiel. La ressemblance des mécanismes des réactions nucléaires dues aux particules chargées et des réactions dues aux neutrons consiste en la formation d'un noyau composé excité (p. 879) suivie de sa désintégration. La différence entre les réactions nucléaires sur par-

ticules chargées et les réactions nucléaires sur neutrons se ressent en dehors du noyau et est liée à la diverse pénétrabilité de la barrière coulombienne pour les particules chargées et pour les neutrons. Dans le domaine des faibles énergies la plus probable se trouve être la diffusion inélastique du proton p ou de la particule alpha, c'est-à-dire les réactions (p, p) et (α, α). Dans le domaine des énergies moyennes ($E \sim 1$ MeV) deviennent possibles les réactions (p, n), (α, n), (α, 2n) et (α, 3n) au cours desquelles sont éjectés respectivement un, deux ou trois neutrons n.

6° Un type particulier de réaction est la réaction de dépouillement *(stripping)* du deuton d de type (d, p) ou (d, n).

Vu la faible liaison du proton et du neutron dans le deuton et les grandes dimensions du deuton, lors du rapprochement de ce dernier du noyau-cible le neutron pénètre dans le noyau, alors que le proton reste en dehors de celui-ci. Il se forme alors un isotope du noyau-cible. De telles réactions nucléaires, se produisant à des énergies de l'ordre de quelques MeV, sont dites ***réactions de dépouillement.*** La réaction (d, p) se trouve être plus probable que la réaction (d, n) et le noyau est caractérisé par une faible énergie d'excitation, souvent inférieure à l'énergie de liaison du neutron qui détermine la possibilité de sa désintégration (p. 899). Pour des énergies élevées des deutons, les réactions nucléaires de dépouillement restent le type prédominant de réactions sur deutons. Toutefois, dans ce cas, le neutron comme le proton du deuton peuvent pénétrer dans le noyau, alors que l'autre partie du deuton reste en dehors de la cible. Aussi les probabilités des réactions (d, p) et (d, n) s'égalisent-elles aux hautes énergies.

7° Pour les réactions provoquées par neutrons est caractéristique une probabilité déjà notable dans le domaine des énergies thermiques des neutrons ($E_n \sim 0{,}025$ eV) en raison de l'absence pour les neutrons de barrière de potentiel. Les réactions avec neutrons aux faibles énergies se déroulent en formant des noyaux composés et ont le caractère de résonance. Une réaction fréquente entre les neutrons lents et les noyaux, à l'exception des noyaux très légers, est la ***capture radiative*** des neutrons par les protons des noyaux (n, λ), au cours de laquelle il ne se forme pas de noyau composé, mais le noyau revient de l'état excité à l'état fondamental en émettant un quantum gamma (p. 859). A part la capture radiative, peut avoir lieu une émission des neutrons d'énergie initiale ***(diffusion élastique*** des neutrons). Les neutrons rapides, eux, peuvent subir une ***diffusion inélastique*** avec émission de quanta gamma (n, nγ). Les neutrons provoquent également des réactions de fission des noyaux (cf. également 9°).

8° Une réaction *photonucléaire (effet photonucléaire)* se produit lors d'interactions des noyaux avec les quanta gamma incidents. Les différents types de cette réaction sont: émission d'un proton, d'un neutron par le noyau, ainsi que fission *(photofission)* des noyaux. L'une des réactions les plus fréquentes est la *photodésintégration du deuton:* $d + \gamma \rightarrow n + p$, qui devient possible lorsque l'énergie du quantum gamma est supérieure à l'énergie de liaison du proton et du neutron dans le deuton (2,23 MeV). L'effet photonucléaire s'explique à l'aide du concept de noyau composé excité par absorption d'un quantum gamma. Dans cette réaction la plus probable est l'émission d'un neutron. Pour les noyaux lourds, il existe, de plus, un processus d'arrachement d'un proton à partir du noyau par «choc» direct d'un quantum gamma lors duquel le proton éjecté emporte presque toute l'énergie du quantum gamma *(effet photonucléaire direct)*. Les sections efficaces des réactions photonucléaires sont caractérisées par un large maximum dans le domaine des énergies $E_\gamma = 10 \div 20$ MeV pour presque tous les noyaux (la *résonance géante)*. Quand $E_\gamma \geqslant 2\, m_\pi c^2$, $E_\gamma \geqslant 2 m_{p,n} c^2$, ont lieu des *réactions de photoproduction* des mésons, des nucléons, etc. (m_π est la masse au repos du méson π et $m_{p,n}$, la masse au repos du nucléon). Le domaine de photoproduction embrasse des énergies de 10^8-10^9 eV.

9° Les *réactions nucléaires de fission* (et la *fission spontanée des noyaux)* ne sont possibles que pour de très lourds noyaux d'éléments situés à la fin du système périodique. L'instabilité de ces noyaux envers la fission est due à leur teneur importante en protons, qui fait augmenter les forces coulombiennes de répulsion, au voisinage du noyau en particulier. C'est pourquoi la barrière de potentiel s'opposant à la division du noyau en deux (ou plus) grosses parties *(fragments)* se trouve être suffisamment basse et peut être franchie déjà pour de faibles énergies d'activation communiquées au noyau par les neutrons le frappant, même avec une faible énergie cinétique. De ce fait, la capture de résonance du neutron par le noyau avec formation d'un noyau composé s'accompagne de la fission de ce dernier. La barrière de potentiel indiquée peut également être franchie par effet tunnel (fission spontanée des noyaux).

10° Dans le cadre du modèle nucléaire collectif (p. 844), la fission du noyau est considérée comme résultat d'une déformation de la surface nucléaire, qui provoque son instabilité conduisant à la formation de l'«étirement» suivie de la rupture du noyau en deux (ou plus) fragments de part et d'autre de l'«étirement» (semblable à la division de la goutte liquide). Le modèle de la goutte liquide (p. 841) conduit à la condition suivante pour

les possibilités de fission du noyau: $\frac{Z^2}{A} \geqslant 17$. La grandeur $\frac{Z^2}{A}$ est le *paramètre de fission*. Cette condition est satisfaite pour tous les noyaux à partir de $^{108}_{47}$Ag pour lequel le paramètre de fission est ≈ 20. Du modèle de la goutte liquide suit que les noyaux pour lesquels $(Z^2/A)_{cr} \geqslant 49$ *(paramètre critique de fission)* sont tout à fait instables envers la fission (la barrière de potentiel pour la fission disparaît) et ne peuvent exister dans la nature. Pour le kourtchatovium ($Z = 104$), élément découvert en 1964 à Dubna, le paramètre de fission est $\frac{Z^2}{A} \approx 41$, autrement dit, il s'approche de sa valeur critique. L'instabilité énergétique des noyaux lourds envers la fission est liée à ce que l'énergie de liaison (p. 834) dans les noyaux lourds constitue $\approx 7{,}6$ MeV, alors que pour les noyaux des atomes occupant le milieu du système périodique l'énergie de liaison par un nucléon est $\approx 8{,}7$ MeV.

11° Lors de la réaction de fission la plus probable est la division du noyau en deux fragments. Dans la fission due aux neutrons thermiques ou spontanée le rapport des masses des fragments est environ 3 : 2. La probabilité de fission du noyau en trois fragments constitue 10^{-2}-10^{-6} de la probabilité de fission en deux fragments. La fission du noyau en un nombre encore plus grand de fragments est infiniment peu probable pour des énergies ordinaires des particules. Les deux fragments en formation sont alourdis de neutrons et, par conséquent, se trouvent en états très excités. De ces états ils retournent à l'état fondamental par une série de stades en subissant plusieurs désintégrations bêta (p. 846) et en émettant des neutrons *(neutrons retardés)*. Les réactions de fission des noyaux sont habituellement exothermiques. La quantité d'énergie dégagée dans chaque réaction est $Q \sim 10^8$ eV. L'énergie de réaction se libère sous forme d'énergie cinétique des fragments et des neutrons éjectés tout au moment de la réaction à partir du noyau en fission *(neutrons prompts.)*

12° Un type particulier de réactions nucléaires sont les *réactions exothermiques de fusion* (ou *de synthèse)* des noyaux légers, qui se déroulent avec efficacité aux températures exceptionnellement élevées (de l'ordre de 10^7-10^9 °K) et peuvent s'entretenir d'elles-mêmes au compte d'un dégagement considérable d'énergie. De telles réactions sont appelées *réactions thermonucléaires*. Les très hautes températures exigées pour leur accomplissement sont indispensables pour que l'énergie cinétique de l'agitation thermique des noyaux se trouve être suffisante à assurer le franchissement de la barrière de potentiel coulombienne des noyaux et l'amorçage

de la réaction de fusion. Les réactions thermonucléaires commencent à des énergies de l'agitation thermique des noyaux un peu inférieures à la hauteur de la barrière de potentiel (effet tunnel, cf. également p. 890, 15°).

13° Les réactions thermonucléaires sont de toute évidence les sources principales d'énergie des étoiles. Il existe deux *cycles thermonucléaires* dans lesquels le dégagement d'énergie a lieu au compte de la transformation des noyaux d'hydrogène en noyaux d'hélium. Dans l'une des variantes du *cycle proton-proton:*

$$p + p \rightarrow d + e^+ + \nu_e,$$

$$d + p \rightarrow {}^3_2He + \gamma,$$

$$2\,{}^3_2He \rightarrow 2p + {}^4_2He,$$

le noyau d'hélium se forme de 4 protons et il y a libération d'énergie. Dans l'une des variantes du *cycle carbone-azote:*

$${}^{12}_6C + p \rightarrow {}^{13}_7N + \gamma, \qquad {}^{14}_7N + p \rightarrow {}^{15}_8O + \gamma,$$

$${}^{13}_7N \rightarrow {}^{13}_6C + e^+ + \nu_e, \qquad {}^{15}_8O \rightarrow {}^{15}_8N + e^+ + \nu_e,$$

$${}^{13}_6C + p \rightarrow {}^{14}_7N + \gamma, \qquad {}^{15}_7N + p \rightarrow {}^{12}_6C + {}^4_2He,$$

c'est-à-dire $4p \rightarrow {}^4_2He + 2e^+ + 2\nu_e$ (ν_e est le neutrino électronique, γ le quantum gamma), le noyau de carbone ${}^{12}_6C$ joue le rôle de «catalyseur»; ce cycle s'accompagne également d'un grand dégagement de chaleur.

8. Principes physiques d'énergétique nucléaire

1° La dépendance de la section efficace de la réaction nucléaire de fission envers l'énergie des neutrons qui la provoquent est différente suivant les noyaux. Pour un groupe de noyaux (^{233}U, ^{235}U, ^{239}Pu par exemple) la section efficace de la réaction présente un maximum pour les neutrons lents ($E \sim 0{,}025$ eV), ainsi que pour les neutrons intermédiaires ($E \sim 1$ à 10^3 eV), pour un autre groupe de noyaux (^{232}Th, ^{238}U par exemple) la section efficace de la réaction de fission est la plus importante pour les neutrons rapides ($E \sim 10^6$ eV). Ceci est lié à ce que l'énergie de liaison des neutrons est différente dans les noyaux à nombre pair ou impair de nucléons. En cas de capture du neutron par le noyau de ${}^{235}_{92}U$ le neutron capturé est pair et son énergie de liai-

son est supérieure à l'énergie de liaison du neutron impair capturé par le noyau de ${}^{238}_{92}U$.

2° Dans chaque réaction de fission des noyaux lourds ce sont 2 à 3 neutrons prompts (p. 884) qui sont émis à partir des noyaux fortement excités. Les neutrons de fission interagissant avec les noyaux avoisinants de la substance fissile provoquent à leur tour une réaction de fission dans ceux-ci, et il se produit un accroissement en avalanche du nombre de fissions. Ce type de réaction est appelé *réaction en chaîne*, par analogie avec les réactions en chaîne chimiques, sous lesquelles on comprend les réactions dont les produits peuvent à nouveau interagir avec les substances initiales. La particularité de telles réactions est le rétablissement continuel des centres actifs. L'apparition de chaque nouveau centre s'accompagne d'un grand nombre *de chaînes (de maillons) de réaction* itérées. Ce sont les neutrons de fission qui jouent le rôle de centres actifs dans la réaction nucléaire en chaîne.

3° La vitesse de la réaction en chaîne est égale au nombre de fissions des noyaux dans la substance par unité de temps:

$$v = \frac{\alpha v_0}{1 - \mu\alpha}\left[1 - e^{-(v_1 + v_2)(1 - \mu\alpha)t}\right].$$

Ici v_1 est la vitesse spécifique de la réaction (rapportée à un neutron initial), v_0 la vitesse de production des neutrons dans la substance fissile, v_2 la vitesse spécifique de diminution du nombre de neutrons intervenant dans la réaction, α la probabilité de capture du neutron éjecté dans la réaction antérieure par le noyau en fission, μ le *facteur de multiplication des neutrons* dans la réaction et t le temps.

La grandeur v_0 est définie principalement par la probabilité de fission spontanée (p. 883) des noyaux d'un isotope donné en l'absence d'irradiation extérieure de la substance par les neutrons. La grandeur v_2 est définie par la vitesse de la fuite de neutrons en dehors de la substance fissile et par la vitesse de leur sortie de la réaction à cause de leur absorption (non accompagnée de fission) par les noyaux des impuretés et par d'autres isotopes de l'élément fissile.

Le facteur de multiplication neutronique μ est égal au rapport du nombre de neutrons produits dans un certain maillon de la réaction en chaîne au nombre des neutrons apparus dans le maillon antérieur. La condition exigée pour la réalisation de la réaction en chaîne est $\mu \geqslant 1$; pour $\mu > 1$ la réaction en chaîne est dite *divergente* et son régime *surcritique*. Pour $\mu = 1$ la réaction en chaîne est dite *autoentretenue* et son régime *critique*. Lorsque

$\mu < 1$, on a une réaction en chaîne *convergente* et un régime *sous-critique*. Le facteur de multiplication des neutrons est défini par la configuration géométrique du volume dans lequel se produit la réaction, par ses dimensions, ainsi que par les dimensions et le matériau du *modérateur* et du *réflecteur des neutrons* (p. 888).

μ dépend aussi du rapport des probabilités des différents processus d'interaction des neutrons avec les noyaux de la substance fissile et avec les impuretés contenues dans celle-ci. Les dimensions de la *zone active* (l'espace dans lequel se produit la réaction en chaîne) ont une importance majeure pour la possibilité de réalisation de la réaction en chaîne. Avec la diminution des dimensions de la zone active augmente la fraction de neutrons s'en échappant et diminue la possibilité du développement ultérieur de la réaction en chaîne. Les dimensions minimales de la zone active qui permettent la réalisation de la réaction en chaîne sont dites *dimensions critiques* ou *taille critique*. La masse des substances fissiles occupant un système de taille critique est dite *masse critique*.

4° La vitesse spécifique de la réaction de fission se définit par

$$v_1 = \sigma(v) v N,$$

où $\sigma(v)$ est la section efficace de la réaction de fission d'un isotope donné pour la vitesse v des neutrons, N le nombre de noyaux de l'isotope fissile dans la substance.

Quand $\mu\alpha < 1$,

$$\lim_{t \to \infty} v = \frac{\alpha v_0}{1 - \mu\alpha}$$

et se produit une réaction en chaîne *stationnaire* de fission.

Quand $\mu\alpha > 1$,

$$\lim_{t \to \infty} v \approx \lim_{t \to \infty} \frac{v_1 v_0}{A} e^{At} = \infty,$$

où $A = (v_1 + v_2)(\mu\alpha - 1)$, autrement dit, la réaction en chaîne se trouve être *automultiplicatrice*.

5° La réaction nucléaire peut être intensifiée soit par augmentation de v_1, soit par diminution de v_2. Le premier cas est réalisé par augmentation de la masse de la substance fissile, le second, par ralentissement rapide des neutrons jusqu'à des énergies auxquelles la section de fission de la masse principale de la

substance est maximale, ainsi que par réflexion des neutrons à partir du réflecteur.

Dans la *bombe atomique* se produit une réaction nucléaire en chaîne non contrôlable due aux neutrons rapides, qui tient un caractère explosif par suite du dégagement rapide de grandes quantités d'énergie. On assure sa réalisation en prenant une masse fissile supérieure à la masse critique (3°), ce que l'on obtient par association rapide de plusieurs parties de la bombe.

6° Le *réacteur* (la *pile) nucléaire* est un dispositif dans lequel peut se produire une réaction en chaîne autoentretenue provoquée par neutrons. Les réacteurs nucléaires sont constitués de cinq éléments principaux: matériau fissile, circuit de refroidissement, modérateur des neutrons rapides, réflecteur des neutrons, systèmes de sécurité et de régulation.

7° En tant que matériau fissile on utilise généralement les isotopes de l'uranium ^{233}U, ^{235}U, ^{238}U, l'isotope du thorium ^{232}Th, les isotopes du plutonium ^{239}Pu, ^{240}Pu, ^{241}Pu.

8° Comme modérateur des neutrons on utilise des substances présentant une grande section de diffusion inélastique des neutrons et ayant en même temps une faible section de capture des neutrons. Les modérateurs utilisés pratiquement sont le graphite, l'eau lourde (D_2O), le béryllium, l'oxyde de béryllium, les hydrures des métaux, les liquides organiques. Les noyaux des substances citées absorbent faiblement les neutrons.

9° Pour le réflecteur des neutrons entourant la zone active du réacteur dans laquelle sont logés le matériau fissile et le modérateur, on utilise les mêmes substances que pour le modérateur. L'efficacité du réflecteur croît rapidement avec l'augmentation de son épaisseur et atteint sa limite quand cette épaisseur devient plusieurs fois supérieure au libre parcours moyen (p. 218) des neutrons dans celui-ci.

10° Le système de refroidissement a pour tâche d'évacuer de la zone active du réacteur l'énergie de fission qui s'y dégage (habituellement sous forme d'une certaine quantité de chaleur) grâce à la transformation de l'énergie cinétique des fragments de fission lors de leur freinage dans le matériau fissile du modérateur. On fait circuler à l'intérieur de la zone active un fluide de refroidissement (eau, vapeur d'eau, He, CO_2, air, certains métaux et alliages liquides) qui ensuite, dans l'échangeur thermique, transmet sa chaleur au circuit secondaire.

11° Les systèmes de régulation et de sécurité permettent le contrôle de la réaction en chaîne, s'opposent à l'accélération spontanée de celle-ci et assurent également la protection de l'espace entourant le réacteur contre les flux intenses de neutrons

et de rayons gamma qui s'échappent de la zone active du réacteur. Dans le premier cas on utilise les barres plongées dans la zone active qui sont constituées de substances de grande section d'absorption de neutrons (bore, cadmium). Dans le deuxième on entoure le réacteur de couches épaisses de substance absorbant intensément les neutrons et les rayons gamma (combinaison de béton et de plomb par exemple), et on assure l'herméticité des circuits parcourus par les fluides de refroidissement et l'absence de fuites dans ces circuits.

12° Les réacteurs nucléaires sont différents en tenant compte du caractère du combustible nucléaire, du modérateur et du fluide de refroidissement. En tant que combustibles et matériaux fissiles on utilise $^{235}_{92}U$, $^{239}_{94}Pu$, $^{233}_{92}U$, $^{238}_{92}U$, $^{232}_{90}Th$. Les modérateurs et les fluides de réfroidissement sont décrits plus haut (8° et 10°).

Selon la disposition du combustible nucléaire et du modérateur dans la zone active, les réacteurs nucléaires se divisent en réacteurs *homogènes* dans lesquels le combustible et le modérateur sont intimement liés, et en réacteurs *hétérogènes* dans lesquels le combustible et le modérateur sont séparés en formant des blocs. D'après le domaine d'énergie des neutrons utilisés on distingue les réacteurs *thermiques*, *intermédiaires* et *rapides*. Les réacteurs rapides utilisent directement les neutrons de fission et n'ont pas de modérateur.

Suivant leur destination les réacteurs nucléaires se divisent en réacteurs de puissance, de recherches, d'essais, de production de nouveaux matériaux de fission, de production d'isotopes radioactifs, etc.

Suivant l'ensemble de toutes les caractéristiques énumérées on distingue les réacteurs nucléaires: *uranium-graphite*, *eau-eau*, *bouilleurs*, etc.

13° Dans les *piles couveuses* les noyaux d'un matériau fissile se transforment par suite des réactions nucléaires en noyaux d'un autre matériau fissile. Les piles couveuses sont surgénératrices, régénératrices et convertisseuses. Dans les piles *surgénératrices*, la composition isotopique des éléments en fission étant différente, la quantité d'isotope fissile produit se trouve être supérieure à la quantité d'isotope primaire. Dans les piles *régénératrices* les matériaux primaire et produit représentent des isotopes d'un même élément chimique (^{235}U «est en combustion», ^{233}U est produit par exemple), dans les *piles convertisseuses* ils représentent des isotopes de différents éléments chimiques (^{235}U «est en combustion», ^{239}Pu est produit par exemple).

14° Pour l'obtention d'une température très élevée dans une réaction thermonucléaire non contrôlable ($T \sim 5 \cdot 10^7$ °K) on utilise la bombe atomique (p. 888), qui, lors de son explosion, donne la température voulue durant le temps très court ($\sim 10^{-6}$ s), au cours duquel cependant arrive à se produire une réaction thermonucléaire dans une masse d'isotopes de l'hydrogène *(bombe à hydrogène)*.

15° L'énergétique thermonucléaire est fondée sur l'utilisation de l'énergie des réactions exothermiques de fusion des noyaux légers (p. 884). La réaction la plus abordable du point de vue d'un domaine de températures convenables est la réaction entre noyaux du deutérium et du tritium: ${}_1^2D + {}_1^3T \rightarrow {}_2^4He + n$ en dégageant 17,6 MeV d'énergie. La libération d'énergie dans cette réaction, rapportée à un nucléon, constitue $\approx 3{,}5$ MeV/nucléon, alors que dans la fission du noyau de ${}_{92}^{238}U$ elle constitue 0,85 MeV/nucléon.

Une réaction thermonucléaire contrôlable pourrait évoluer assez longtemps, étant autoentretenue au compte d'un dégagement d'énergie. L'échauffement et le contrôle du comportement du mélange thermonucléaire sont déterminés dans ce cas par le fait que le mélange aux températures exceptionnellement élevées passe à l'état de plasma (p. 411). Pour obtenir un tel échauffement, la vitesse d'arrivée de l'énergie au mélange doit être supérieure à la vitesse de fuite de l'énergie de ce mélange. Les formes principales de ces fuites sont la chaleur s'échappant à travers les parois du réacteur et le rayonnement de freinage (p. 605) dans le plasma.

Le problème le plus important pour la réalisation pratique des réactions thermonucléaires contrôlables est de créer les conditions auxquelles le plasma à haute température est maintenu stable en état d'isolation thermique à l'aide de champs magnétiques. On utilise à ces fins des *pièges magnétiques* et des décharges toroïdales spéciales où existe un champ magnétique longitudinal. Les pièges magnétiques représentent des champs magnétiques de configuration assez complexe, qui empêchent le contact du plasma avec les parois du réacteur. Le confinement du plasma est réalisé dans les systèmes à *pincements* dans lesquels le plasma est pincé par le champ magnétique du courant qui traverse le plasma.

16° La formation de noyaux excités dans les réactions avec neutrons conduit à la désintégration des noyaux passé un temps considérable après l'achèvement de la réaction provoquée par irradiation neutronique. Le rayonnement de tels noyaux, constitué

habituellement de particules bêta et de rayons gamma, est un exemple de ***radioactivité artificielle.*** Les périodes des noyaux radioactifs artificiels sont comprises dans l'intervalle de fractions de seconde jusqu'à des milliers d'années. A l'heure actuelle, on peut obtenir des isotopes radioactifs artificiels doués d'une activité spécifique très élevée (p. 872), ce qui permet de créer des sources considérables de rayonnement radioactif, largement utilisées dans différents domaines de la science et de la technique, dans la méthode connue sous le nom de ***méthode des atomes marqués*** ou ***méthode des isotopes radioactifs.***

CHAPITRE 6

Particules élémentaires

1. Notions fondamentales

1° On appelle *particules élémentaires* les particules auxquelles il est impossible d'attribuer, au niveau actuel du développement de la physique, une structure interne qui serait la simple association d'autres particules. Une particule élémentaire lors de son interaction avec d'autres particules et champs se comporte comme un tout. Le problème de la structure des particules élémentaires peut être considéré de deux manières. Dans une série de cas, les particules élémentaires sont considérées comme instructurées, autrement dit, en tant que points matériels doués de propriétés déterminées: masse au repos, charge électrique, nombres baryonique et leptonique (p. 894), spin, spin isotopique et sa projection, étrangeté (p. 896), schéma de désintégration prédominant (p. 899). Cette conception est en accord avec les exigences de la théorie de la relativité. La particule, étant supposée étendue, devrait se déformer, sinon se trouveraient être possibles les mouvements indépendants des parties différentes d'une entité. L'influence extérieure sur une particule élémentaire étendue doit se transmettre instantanément de certaines de ces parties à d'autres, ce qui contredit la théorie de la relativité restreinte d'Einstein.

Considérer les particules élémentaires comme instructurées n'est admissible que dans le domaine de telles énergies des particules pour lesquelles leur structure n'influe pas sur les effets de l'interaction entre elles. Le domaine d'énergies des particules élémentaires correspondant à une telle considération est situé au-dessous de $2m_0c^2$, où m_0 est la masse au repos (p. 551) de la particule.

2° A l'heure actuelle, il existe plusieurs groupes de particules élémentaires se distinguant par leurs propriétés et par le caractère

de leur interaction. Les propriétés les plus importantes des particules élémentaires sont consignées dans le tableau donné pp. 898-899.

D'après leurs masses au repos, on divise les particules élémentaires en leptons (particules légères), mésons (particules moyennes) et baryons (particules lourdes). D'après le signe de leur charge électrique, on distingue les particules positives et négatives, les particules porteuses de charge $|e|$ et électriquement neutres. Les particules de charge électrique $|e| > 1$ sont observées parmi les résonances (4°). On suppose que soit possible l'existence de particules de charge électrique fractionnaire *(quarks* et *antiquarks)*. La majorité des particules élémentaires, qui figurent dans le tableau pp. 898-899, tiennent un spin 1/2 (en unités de $\hbar$). Il existe également des particules sans spin (pions et kaons), ainsi que des particules avec un spin égal à $\hbar$ (photon). Les particules avec un spin 3/2 $\hbar$ sont, très probablement, l'hypéron oméga-moins et son antiparticule, l'hypéron anti-oméga-moins (hypérons Ω^- et $\widetilde{\Omega}^-$).

3° De l'union du méson positif μ^+ et de l'électron résulte un *muonium:* espèce d'atome dans lequel l'électron tourne dans le champ du méson μ^+. On a observé expérimentalement que le muonium possède une structure hyperfine, c'est-à-dire présente la décomposition hyperfine des niveaux énergétiques et de la raie spectrale, liée aux orientations possibles parallèle et antiparallèle des spins de l'électron et du méson μ^+. La valeur de la décomposition hyperfine coïncide avec celle calculée en supposant que le méson μ^+ est doué de caractéristiques consignées dans les tableaux 1 et 2, pp. 898-899.

4° Outre les particules élémentaires qui figurent dans le tableau p. 898, on a détecté ces dernières années une quantité importante de nouvelles particules, appelées ***particules de résonance, états de résonance*** ou ***résonances***. Ces formations de courte durée de vie, caractéristique des interactions fortes, possèdent des propriétés déterminées (citées plus haut, 1°) ainsi que certaines impulsions et énergies permettant de les considérer comme particules. Les caractéristiques des résonances baryoniques et mésiques sont données dans les tableaux pp. 902-906.

5° On admet qu'entre les particules élémentaires existent trois types d'interactions: fortes, électromagnétiques et faibles, caractérisées chacune par la valeur de sa constante d'interaction et par son temps caractéristique d'évolution (tableau p. 894).

6° Les *interactions fortes* caractérisent les processus dans lesquels interviennent les baryons, les antibaryons, ainsi que les pions et les kaons. Par ces interactions s'expliquent les forces nucléaires s'exerçant entre nucléons dans les noyaux et les processus de formation et de désintégration des mésons et des hy-

pérons dans les interactions nucléaires aux hautes énergies. L'intensité des interactions fortes est définie par la *constante de Fermi* $f^2/\hbar c \approx 1$, où f est la «charge» du champ des forces nucléaires. Les processus dans lesquels se manifestent les interactions fortes sont dits rapides et tiennent une durée caractéristique *(constante de temps d'interaction)* 10^{-23}-10^{-22} s. Les particules interagissant fortement sont dites *hadrons* (particules volumineuses, massives).

7° Les *interactions électromagnétiques* s'exercent entre particules possédant une charge électrique (interaction coulombienne des particules chargées, processus de création des électrons et des positons par les quanta gamma, etc.). L'intensité de ces interactions est définie par la *constante de structure fine* $\alpha = e^2/\hbar c = \frac{1}{137}$ (p. 934). Les processus correspondants sont dits *électromagnétiques* et leur durée caractéristique est de l'ordre de 10^{-20}-10^{-18} s.

8° Les *interactions faibles* sont caractéristiques des leptons (interaction des muons avec les noyaux, interaction des électrons et des positons, du neutrino et de l'antineutrino avec les noyaux, désintégrations bêta des noyaux). L'intensité de ces interactions est déterminée par la constante $g^2/\hbar c \approx 10^{-14}$, où g a le sens de «charge» relative au champ hypothétique des interactions faibles. Les processus correspondants sont dits *lents* et leur durée caractéristique est de l'ordre de 10^{-10}-10^{-8} s. La valeur comparative des différents types d'interactions des particules élémentaires est donnée dans le tableau ci-après.

Type d'interaction	Valeur comparative	Durée caractéristique, en s
forte	1	10^{-23} à 10^{-22}
électromagnétique	1/137	10^{-20} à 10^{-18}
faible	10^{-14}	10^{-10} à 10^{-8}

9° Tous les types d'interactions des particules élémentaires obéissent aux lois de la conservation des grandeurs physiques qui caractérisent les propriétés des particules avant et après l'interaction d'un type donné et l'évolution des processus physiques, c'est-à-dire aux lois de la conservation de l'énergie, de la quantité de mouvement, du moment cinétique et de la charge électrique.

10° Afin de distinguer les particules élémentaires qui figurent dans le groupe des leptons, on leur attribue une certaine caractéristique dite *nombre leptonique L*. On admet que tous les leptons

possèdent $L = +1$, les antileptons $L = -1$. Pour les autres particules élémentaires $L = 0$. Les processus dans lesquels interviennent les leptons se déroulent de telle manière que la somme algébrique des nombres leptoniques reste constante *(loi de la conservation du nombre leptonique)*.

11° L'*indépendance de charge* dans les interactions fortes consiste en ce que le caractère de ces interactions ne dépend pas de la présence ou de l'absence de charge électrique dans les particules.

Ainsi, les interactions fortes s'exerçant dans les noyaux entre protons et neutrons, protons et protons ou neutrons et neutrons sont identiques.

Le développement des notions sur l'indépendance de charge dans les interactions fortes conduit à une nouvelle caractéristique des particules élémentaires, appelée *spin isotopique* **T**. Les particules proches en masse représentent différents *états de charge* d'une même particule. Ainsi, les états nucléoniques représentent un doublet proton-neutron, les mésons π un triplet constitué des mésons π^+, π^- et π^0. Le nombre d'états de charge d'un multiplet donné est $2T + 1$. Pour caractériser individuellement chaque terme du multiplet de charge, on introduit la *projection* T_ζ *du spin isotopique* sur un certain «axe». T_ζ prend $2T + 1$ valeurs: $T, T - 1, \ldots, 0, \ldots, -T$. Les notions de vecteur $\mathbf{T}_\zeta$ et de sa projection T_ζ ne sont pas liées à l'orientation de **T** et de T_ζ dans l'espace ordinaire et sont introduites pour décrire les propriétés (ainsi que les transformations) des particules élémentaires.

Pour les particules élémentaires connues à l'heure actuelle, T peut prendre les valeurs suivantes: $T = 1/2$ (doublet de charge proton-neutron), $T = 1$ (triplet de charge constitué des mésons π^+, π^- et π^0), $T = 0$. La valeur de $T > 1$ est observée dans certaines résonances (tableau p. 902).

Les composantes d'un multiplet de charge avec des T_ζ de même valeur mais de signes contraires correspondent à la *particule* et à son *antiparticule*. Pour les particules chargées, la différence de signes de T_ζ concorde avec la différence de signes de la particule et de l'antiparticule. Pour les particules neutres, la différence de signes de T_ζ concorde avec la différence de signes du moment magnétique et d'autres caractéristiques des particules. Les particules dont les propriétés sont tout à fait identiques aux propriétés de leurs antiparticules sont dites *particules réellement neutres*.

Tous les processus liés aux transformations des particules élémentaires, conditionnées par l'indépendance de charge des interactions fortes, sont régis par la *loi de la conservation du spin isotopique:* le spin isotopique total **T** de toutes les particules d'un

système isolé ne varie pas au cours de toutes les transformations dues aux interactions fortes. La projection T_ζ du spin isotopique se conserve lors des interactions fortes et électromagnétiques.

12° Afin de caractériser les particules élémentaires qui figurent dans le groupe des baryons, on introduit la notion de *nombre baryonique* ou de *charge nucléonique B*. On admet que pour les baryons $B = +1$ et que pour les antibaryons $B = -1$; pour les autres particules élémentaires $B = 0$. Dans toutes les transformations nucléaires d'un système isolé la somme algébrique des nombres baryoniques reste constante *(loi de la conservation du nombre baryonique)*.

13° Les particularités de la création et des transformations des mésons K (kaons) et des hypérons Λ, Σ et Ξ font les interpréter comme *particules étranges*. Les signes caractéristiques des particules étranges sont suivants:

a) leur création est due aux interactions fortes;

b) en se désintégrant en mésons π à activité nucléaire, les mésons K ont une durée de vie caractéristique des interactions faibles;

c) ces particules naissent par paires et non en associations quelconques. Ainsi, le méson K^+ est produit en paire aussi bien avec le méson K^- qu'avec les hypérons, alors que le méson K^- apparaît en paire uniquement avec le méson K^+.

Pour expliquer théoriquement les propriétés des particules étranges, on introduit une caractéristique particulière: l'*étrangeté S*, qui est liée à la charge électrique Z (en unités de e), au nombre baryonique B et à la projection du spin isotopique T_ζ par la *formule de Gell-Mann* et *Nishijima:*

$$S = 2(z - T_\zeta) - B,$$

où $S = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ est l'étrangeté de la particule élémentaire. Sa valeur n'est différente de zéro que pour les particules étranges et est nulle pour toutes les autres particules. La grandeur $Y = B + S = 2\bar{z}$, où $\bar{z}$ est la charge électrique moyenne du multiplet de charge, est dite *nombre hypéronique (hypercharge)*.

Dans les interactions fortes et électromagnétiques la somme algébrique des étrangetés de toutes les particules d'un système isolé reste constante *(loi de la conservation de l'étrangeté)*.

14° En physique, les lois de conservation sont liées aux propriétés générales de l'espace et du temps. Notamment, de l'isotropie et de l'uniformité de l'espace et du temps (les formes essentielles d'existence de la matière) découlent les lois de conservation. De l'isotropie de l'espace est déduite la loi de la conservation du moment cinétique, de l'uniformité du temps, la loi de

la conservation de l'énergie, de la symétrie de l'espace par rapport à la transformation de l'inversion, la loi de la conservation de la parité de l'état (p. 858).

15° Dans les interactions faibles des particules les lois de la conservation de la parité et de l'étrangeté sont enfreintes. Dans toutes les désintégrations des mésons et des hypérons $\Delta S = 0; \pm 1$.

16° On appelle ***transformation de conjugaison de charge*** le remplacement de la particule par son antiparticule. Dans cette transformation on change en même temps les signes de toutes les charges, de tous les moments magnétiques et d'autres caractéristiques des particules dans les équations correspondantes. La transformation de conjugaison de charge change en contraires les signes de Z, T_ζ, B, L, S et Y.

17° La non-conservation de la parité dans les interactions faibles montre l'absence de symétrie des propriétés spatiales des particules par rapport à l'inversion (p. 858). Ce fait est en contradiction avec l'isotropie de l'espace dans le cas des interactions faibles, étant donné qu'elles conservent le moment cinétique. Cette contradiction est éliminée à l'aide du principe de *Landau-Lee-Yang*. D'après ce principe, dans les interactions faibles, à la différence des interactions fortes, la loi de la conservation de la parité et l'invariance par rapport à la transformation de conjugaison de charge (l'inversion des particules) peuvent, séparément, ne pas avoir lieu, mais doit avoir lieu l'invariance par rapport à l'ensemble de ces deux transformations, dite ***inversion combinée***. Avec cette invariance l'asymétrie se manifeste uniquement dans les charges des particules, l'espace, lui, reste symétrique *(parité G)*.

18° Parler de la conservation de la parité n'est possible que pour les particules réellement neutres (p. 895), puisque les autres particules lors d'une inversion combinée se transforment en antiparticules, différentes d'elles. Pour les particules réellement neutres, la loi de la conservation de la parité combinée coïncide avec la loi de la conservation de la parité ordinaire. La non-conservation de la parité lors de la désintégration des mésons K^0 s'explique par le fait que les mésons neutres K^0 et $\widetilde{K}^0$ forment l'un avec l'autre deux combinaisons: K_1^0 et K_2^0, pour l'une de ces combinaisons la parité combinée est égale à $+1$ et pour l'autre à -1. La conservation de la parité combinée conduit à ce que les mésons K_1^0 et K_2^0 ont différents durées de vie et schémas de désintégration. On a enregistré la désintégration $K_2^0 \to 2\pi$, qui, dans le cas où elle sera confirmée, signifiera la non-conservation de la parité combinée dans les interactions faibles dans lesquelles interviennent les particules étranges.

Tableau 1

Propriétés principales des particules élémentaires[1])

Classe	Particule	Antiparticule	Spin J, en unités de $\hbar$	Spin isotopique T	Projection du spin isotopique	Etrangeté S	Masse au repos, en MeV	Vie moyenne, en s
Photon	γ	γ	1	—	—	0	0	Stable
Leptons	ν_e	$\tilde{\nu}_e$	1/2	—	—	0	0 (< 0,2 keV)	Stable
	ν_μ	$\tilde{\nu}_\mu$	1/2	—	—	0	0 (< 4)	Stable
	e^-	e^+	1/2	—	—	0	0,511006 ± 0,000002	Stable
	μ^-	μ^+	1/2	—	—	0	105,659 ± 0,002	$(2,2001 \pm 0,0008)\cdot 10^{-6}$
Mésons	π^0	π^0	0	1	(0,0)	0	135,01 ± 0,05	$(1,80 \pm 0,29)\cdot 10^{-16}$
	π^+	π^-	0	1	(+1, −1)	0	139,60 ± 0,05	$(2,55 \pm 0,26)\cdot 10^{-8}$
	K^+	K^-	0	1/2	(+1/2, −1/2)	(+1, −1)	493,8 ± 0,2	$(1,229 \pm 0,008)\cdot 10^{-8}$
	K^0	$\tilde{K}^0$	0	1/2	(−1/2, +1/2)	(+1, −1)	498,0 ± 0,5	$K_1^0 (0,86 \pm 0,02)\cdot 10^{-10}$; $K_2^0 (5,4 \pm 0,6)\cdot 10^{-8}$
Nucléons	p	$\tilde{p}$	1/2	1/2	(+1/2, −1/2)	0	938,256 ± 0,005	Stable
	n	$\tilde{n}$	1/2	1/2	(−1/2, +1/2)	0	939,550 ± 0,005	$(0,93 \pm 0,03)\cdot 10^{+3}$
Hypérons	Λ^0	$\tilde{\Lambda}^0$	1/2	0	(0,0)	(−1, +1)	1115,6 ± 0,1	$(2,5 \pm 0,02)\cdot 10^{-10}$
	Σ^+	$\tilde{\Sigma}^+$	1/2	1	(+1, −1)	(−1, +1)	1189,41 ± 0,14	$(0,788 \pm 0,027)\cdot 10^{-10}$
	Σ^0	$\tilde{\Sigma}^0$	1/2	1	(0,0)	(−1, +1)	1192,7 ± 0,3	$< 1,0\cdot 10^{-14}$
	Σ^-	$\tilde{\Sigma}^-$	1/2	1	(−1, +1)	(−1, +1)	1197,3 ± 0,19	$(1,58 \pm 0,05)\cdot 10^{-10}$
	Ξ^0	$\tilde{\Xi}^0$	1/2	1/2	(+1/2, −1/2)	(−2, +2)	1314,3 ± 1,0	$(3,06 \pm 0,40)\cdot 10^{-10}$
	Ξ^-	$\tilde{\Xi}^-$	1/2	1/2	(−1/2, +1/2)	(−2, +2)	1320,8 ± 0,2	$(1,74 \pm 0,05)\cdot 10^{-10}$
	Ω^-	$\tilde{\Omega}^-$	3/2(?)	0(?)	0	(−3, +3)	1672 ± 1	$1,3\cdot 10^{-10}$

[1]) Cf. A.H. Rosenfeld, A. Barbaro-Galtieri, W.H. Barkas, P.L. Bastien, J. Kirz, M. Roos. *Rev. Mod. Phys*., 36, n° 4, 977 (1964).

Tableau 2

Types principaux de désintégration, énergie libérée Q et probabilité de désintégration des mésons et des baryons[1])

Particule	Type de désintégration	Energie libérée Q, en MeV	Probabilité relative de désintégration, en %
$\mu^- \to$	$e^- + \nu_\mu + \tilde{\nu}_e$	105,66	100
$\pi^+ \to$	$\mu^+ + \nu_\mu$	33,95	$\sim$ 100
	$e^+ + \nu_e$	139,60	$(1{,}24 \pm 0{,}05)\cdot 10^{-4}$
	$\mu^+ + \nu_\mu + \gamma$	33,94	$(1{,}24 \pm 0{,}25)\cdot 10^{-4}$
	$\pi^0 + e^+ + \nu_e$	4,08	$(1{,}5 \pm 0{,}3)\cdot 10^{-8}$
$\pi^0 \to$	$\gamma + \gamma$	135,01	98,8
	$e^+ + e^- + \gamma$	133,99	(1,19 ± 0,5)
$K^+ \to$	$\mu^+ + \nu_\mu$	388,1	(63,1 ± 0,5)
	$\pi^+ + \pi^0$	219,2	(21,5 ± 0,4)
	$\pi^+ + \pi^+ + \pi^-$	75,0	(5,5 ± 0,1)
	$\pi^+ + \pi^0 + \pi^0$	84,2	(1,7 ± 0,1)
	$\pi^0 + \mu^+ + \nu_\mu$	253,1	(3,4 ± 0,2)
	$\pi^0 + e^+ + \nu_e$	358,3	(4,8 ± 0,2)
	$\pi^+ + \pi^- + e^+ + \nu_e$	214,1	$(4{,}3 \pm 0{,}9)\cdot 10^{-5}$
	$\pi^+ + \pi^+ + e^- + \tilde{\nu}_e$	214,1	$< 0{,}1\cdot 10^{-5}$
K_1^0	$\pi^+ + \pi^-$	218,8	(69,4 ± 5,1)
	$\pi^0 + \pi^0$	228,0	(30,6 ± 1,1)
K_2^0	$\pi^0 + \pi^0 + \pi^0$	93,0	(27,1 ± 3,6)
	$\pi^+ + \pi^- + \pi^0$	83,8	(12,7 ± 1,7)
	$\pi^+ + \mu^- + \tilde{\nu}_\mu$	} 252,7	(26,6 ± 3,2)
	$\pi^- + \mu^+ + \nu_\mu$		
	$\pi^+ + e^- + \tilde{\nu}_e$	} 357,9	(33,6 ± 3,3)
	$\pi^- + e^+ + \nu_e$		
	$\pi^+ + \pi^-$	218,8	$\sim 2\cdot 10^{-3}$

[1]) Cf. A.H. Rosenfeld, A. Barbaro-Galtieri, W.H. Barkas, P.L. Bastien, J. Ki[illegible] M. Roos. *Rev. Mod. Phys.*, 38, n° 4, 977 (1964).

(suite)

Particule	Type de désintégration	Energie libéré Q, en MeV	Probabilité relative de désintégration, en %
$n \to$	$p + e^- + \tilde{\nu}_e$	0,78	100
$\Lambda^0 \to$	$p + \pi^-$ $n + \pi^0$ $p + \mu^- + \tilde{\nu}_\mu$ $p + e^- + \tilde{\nu}_e$	37,5 40,9 71,5 176,6	$(67,7 \pm 1,0)$ $(31,6 \pm 2,6)$ $<1 \cdot 10^{-4}$ $(0,88 \pm 0,08) \cdot 10^{-3}$
$\Sigma^+ \to$	$p + \pi^0$ $n + \pi^+$ $n + \pi^+ + \gamma$ $\Lambda^0 + e^+ + \nu_e$ $p + \gamma$ $n + \mu^+ + \nu_\mu$ $n + e^+ + \nu_e$	116,1 110,3 110,3 73,5 251,1 144,2 249,3	$(51,0 \pm 2,4)$ $(49,0 \pm 2,4)$ $\sim 0,4 \cdot 10^{-4}$ $\sim 0,2 \cdot 10^{-4}$ $\sim 3 \cdot 10^{-3}$ $<2,3 \cdot 10^{-4}$ $<1,0 \cdot 10^{-4}$
$\Sigma^0 \to$	$\Lambda^0 + \gamma$	77,0	100
$\Sigma^- \to$	$n + \pi^-$ $n + \pi^- + \gamma$ $n + \mu^- + \tilde{\nu}_\mu$ $n + e^- + \tilde{\nu}_e$ $\Lambda^0 + e^- + \tilde{\nu}_e$	117,9 117,9 151,9 257,0 81,2	~ 100 $\sim 0,1 \cdot 10^{-4}$ $(0,66 \pm 0,14) \cdot 10^{-3}$ $(1,4 \pm 0,3) \cdot 10^{-3}$ $(0,75 \pm 0,28) \cdot 10^{-4}$
$\Xi^0 \to$	$\Lambda^0 + \pi^0$ $p + \pi^-$ $p + e^- + \tilde{\nu}_e$ $\Sigma^+ + e^- + \tilde{\nu}_e$ $\Sigma^- + e^+ + \nu_e$	76,9 249,4 388,5 137,4 129,7	~ 100 $<0,4$ $<0,4$ $<0,3$ $<0,25$
$\Xi^- \to$	$\Lambda^0 + \pi^-$ $\Lambda^0 + e^- + \tilde{\nu}_e$ $n + \pi^-$	65,8 204,9 214,7	~ 100 $(3,0 \pm 1,7) \cdot 10^{-3}$ $<5 \cdot 10^{-3}$
$\Omega^- \to$	$\Xi^- + \pi^0$ $\Delta^0 + K^-$	221 66	? ?

2. Symétrie des interactions fortes

1° Dans le système moderne de notations des *hadrons baryoniques*, tous les hadrons d'étrangeté $S = 0$ et de spin isotopique $\mathbf{T} = 1/2$ [nucléons et isobares $(\widetilde{n} - N)$] ont pour symbole N_M, où M est la masse en MeV. Les hadrons d'étrangeté $S = 0$ et de spin isotopique $\mathbf{T} = 3/2$ [les isobares $(\widetilde{n} - N)$ avec $\mathbf{T} = 3/2$] sont désignés par la lettre Δ_M; les hypérons Λ et les résonances baryoniques de $S = -1$ et de $\mathbf{T} = 0$, par la lettre Λ_M, les hypérons Σ et les résonances baryoniques de $S = -1$ et de $\mathbf{T} = 1$ par la lettre Σ_M; les hypérons Ξ et les résonances baryoniques de $S = 2$ et de $\mathbf{T} = 1/2$ par la lettre Ξ_M; les hypérons Ω et les résonances baryoniques de $S = -3$ et de $\mathbf{T} = 0$ (s'ils sont observés) par la lettre Ω_M. Parfois pour désigner la particule ou la résonance de masse la plus faible dans un groupe donné, on utilise la lettre correspondante sans indiquer la masse. Ceci conserve aux particules élémentaires leurs notations anciennes [N, (n, p), Λ, Σ, Ξ, Ω]. Les antihadrons sont désignés par les mêmes lettres mais avec un signe contraire de leur charge électrique et un tilde en haut $(\Sigma^- \to \widetilde{\Sigma}^+$ par exemple$)$. Dans le tableau 3 sont présentées les propriétés des baryons et des résonances baryoniques.

2° Pour les *résonances mésiques* (hadrons mésiques) les symboles unifiés sont tels que par les mêmes lettres sont désignées les particules et les résonances ayant les mêmes valeurs d'étrangeté S et de spin isotopique $\mathbf{T}$. L'indice en bas tient compte de la masse en MeV. On désigne par la lettre η les mésons et les résonances mésiques de $S = 0$ et de $\mathbf{T} = 0$, par la lettre π, ceux de $S = 0$ et $\mathbf{T} = 1$, par la lettre K, ceux de $S = +1$ et de $\mathbf{T} = 1/2$. Le tableau 4 montre les propriétés des résonances mésiques.

3° Les nombres quantiques B, S et $\mathbf{T}$ sont admis fondamentaux pour tous les baryons, les mésons et les résonances connus. Dans le tableau p. 907 on présente ces nombres, ainsi que les valeurs de l'*hypercharge* $Y = B + S$, les multiplicités du multiplet isotopique $(2T + 1)$ et la charge électrique moyenne du multiplet $\widetilde{z} = Y/2 = \frac{B + S}{2}$. Ces valeurs peuvent être considérées comme des

Tableau 3

Baryons et résonances baryoniques[1]

Groupe	Etat, symbole	Masse M, en MeV	Largeur Γ, en MeV	Spin J et parité P	Spin isotopique T	Etrangeté S	Canaux principaux de désintégration	Probabilité relative de désintégration, en %	Energie libérée Q, en MeV
N	p n } (N_α)	938,2 939,6		$1/2^+$	1/2	0		cf. tabl. 2	
	$N^*_{1/2}(N_\alpha)$	~1 480	~240	$1/2^+$	1/2	0	πN	~50	402
	$N^*_{1/2}(N_\gamma)$	1 518±10	125± ±12	$3/2^-$	1/2	0 {	πN $N_{\pi\pi}$	80 ?	440 301
	$N^*_{1/2}(N^{II}_\alpha)$	1 688	100	$5/2^+$	1/2	0 {	πN $N_{\pi\pi}$	80 ?	610 471
	$N^*_{1/2}(N^{II}_\alpha)$	2 190	~200	$9/2^+$	1/2	0 {	πN ΛK	30	1 112 577
	$N^*_{1/2}(N)$	2 700	~100	$?^?$	1/2	0 {	ηN πN	prédom. ~6	1 213 1 622
Δ	$N^*_{3/2}(\Delta_\delta)$	1 236±2	125	$3/2^+$	3/2	0	πN	100	160
	$N^*_{3/2}(\Delta^{II}_\delta)$	1 924	170	$7/2^+$	3/2	0 {	πN ΣK	34 ?	842 237
	$N^*_{3/2}(\Delta^{II}_\delta)$	2 360	~200	$11/2^+(?^?)$	3/2	0	πN	10	1 282
Λ	$\Lambda(\Lambda_\alpha)$	1 115,4		$1/2^+$	0	−1	$\Sigma\pi$	cf. tabl. 2	76
	$Y^*_0(\Lambda_\beta)$	1 405	50	$1/2^-(?^?)$	0	−1 {	$\Lambda_{\pi\pi}$	~100 <1	10

[1]) Cf. A.H. Rosenfeld, A. Barbaro-Galtieri, W.H. Barkas, P.L. Bastien, J. Kirz, M. Roos. *Rev. Mod. Phys.*, 36, no 4, 977 (1964).

λ	$Y_0^*(\Lambda_\gamma)$	1 518,9±±1,5	16±2	$3/2^-$	0	−1	$\Sigma\pi$	55±7	190
							$\tilde{K}N$	29±4	87
							$\Lambda\pi\pi$	16±2	124
	$Y_0^*(\Lambda_\alpha^{II})$	1 815	70	$5/2^+(?)$	0	−1	$\tilde{K}N$	80	383
							$\Sigma\pi$	<10	<486
							$\Lambda\pi\pi$	<15	420
							$\Lambda\eta$	?	151
Σ	$\Sigma(\Sigma_\alpha)$	(+) 1 189,4 (−) 1 197,1 (0) 1 192,4		$1/2^+$	1	−1		cf. tabl. 2	
	$Y_1^*(\Sigma_\delta)$	1 382,1±0,9	53+2	$3/2^+$	1	−1	$\Lambda\pi$	96±4	127
							$\Sigma\pi$	4±4	55
	$Y_1^*(\Sigma)$	1 660±10	44±5	$?^?$	1	−1	$\tilde{K}N$	16	225
							$\Sigma\pi$	~32	328
							$\Delta\pi$	~6	405
							$\Sigma\pi\pi$	~33	188
							$\Lambda\pi\pi$	~23	265
	$Y_1^*(\Sigma)$	1 765±10	60±10	$5/2^-(?)$	1	−1	$\tilde{K}N$	60	343
							$\Lambda\pi$	?	510
							$\Sigma\pi$, $\Lambda\pi\pi$	?	
Ξ	$\Xi(\Xi_\alpha)$	(−) 1 321 (0) 1 314		$1/2^+$	1/2	−2		cf. tabl. 2	
	$\Xi^*(\Xi_\delta)$	1 529,1±1,0	7,5±±1,7	$3/2^+(?)$	1/2	−2	$\Xi\pi$	~100	73
	$\Xi^*(\Xi)$	1 810±20	~70	$?(?)$	1/2	−2	$\Xi^*\pi$	~45	141
							$\Lambda\tilde{K}$	~45	197
							$\Xi\pi$	<10	354
							$\Sigma\tilde{K}$	<10	127
Ω	$\Omega^-(\Omega_\delta)$	1 675±3		$3/2(?^?)$	0	−3		cf. tabl. 2	

Mésons et résonances mésiques [1])

Groupe	Etat, symbole	Masse M, en MeV	Largeur Γ, en MeV	Spin J, parité P, parité G (J^{PG})	Spin isotopique T	Etrangeté S	Canaux principaux de désintégration	Probabilité relative de désintégration, en %	Energie libérée Q, en MeV
η	$\eta\ (\eta_\beta)$	548,7 ± 0,5	<10	0^{-+}	0	0	$\gamma\gamma$	(35,3 ± 3,0)	548,7
							$\pi^0\pi^0\pi^0$ } $\pi^0\gamma\gamma$	(31,8 ± 2,3)	143,7
							$\pi^+\pi^-\pi^0$	(27,4 ± 2,5)	134,5
							$\pi^+\pi^-\gamma$	(5,5 ± 1,3)	269,5
	$\omega\ (\eta_\gamma)$	782,8 ± 0,5	9,4±1,7	1^{--}	0	0	$\pi^+\pi^-\pi^0$	86	369
							$\pi^+\pi^-$	<1	504
							$\pi^0\gamma$	11±1	648
							$\pi^+\pi^-\gamma$	3,2±1	504
							e^+e^-	<0,3	782
							$\mu^+\mu^-$	<0,5	572
	$\chi\ (\eta)$	959±2	<12	0^{-+} (???)	0	0	$\eta 2\pi$	grande	131
							2π	<20	680
							3π	<30	540
							4π	<3	400
							6π	<3	121
							$\pi\pi\gamma$	?	680

[1]) Cf. A.H. Rosenfeld, A. Barbaro-Galtieri, W.H. Barkas, P.L. Bastien, J. Kirz, M. Roos. *Rev. Mod. Phys.*, 36 n° 4, 977 (1964).

(suite)

	$\varphi(\eta_\gamma)$	1 019,5±0,3	3,1±0,6	1^{--}	0	0	$K_1^0 K_2^0$ K^+K^- $\pi\pi$ $\pi\rho + 3\pi$ $\pi^0\gamma$	41±6 59±6 <8 <10	23 32 740 117 885
	$f(\eta_\alpha^{II}$	1 253±20	100±25	2^{++}	0	0	$\pi\pi$ 4π $\widetilde{K}K$	grande 8±6 ?	974 695 265
	$K\widetilde{K}(\eta)$	1 020	?	???	0	0	$K_1^0 K_2^{0}$	?	24
	$(\widetilde{K}K\pi)(\eta)$	1 410	60	0^{-+} (???)	0	0	$K^*\widetilde{K}$ $\widetilde{K}K\pi$ 2π $\widetilde{K}K$ 3π	grande petite ? ? ?	25 283 1 131 422 991
π	$\left.\begin{matrix}\pi^\pm\\ \pi^0\end{matrix}\right\}(\pi_\beta)$	139,6 135,0		0^{--}	1	0		cf. tabl. 2	
	$\rho(\pi_\gamma)$	763±4	106±5	1^{-+}	1	0	2π 4π	100 petite	483 204

(suite)

Groupe	Etat, symbole	Masse M, en MeV	Largeur Γ, en MeV	Spin J, parité P, parité G (J^{PG})	Spin isotopique T	Etrangeté S	Canaux principaux de désintégration,	Probabilité relative de désintégration, en %	Energie libérée Q, en MeV
	$A1(\pi)$	1 090±(?)	125±25	$0^{--}(?^?)$	≥1	0	$\rho\pi$ $\tilde{K}K$	~100 <5	188 94
	$B(\pi_\delta)$	1 215±18	122±17	$1^{++}(?^{??})$	1	0	$\omega\pi$ $\pi\pi$ $\tilde{K}K$ 4π	~100 <30 <10 <50	293 657
	$A2(\pi_\alpha^{II})$	1 310	80	2^{+-}	1	0	$\rho\pi$ $\tilde{K}K$ $\eta\pi$	~70 30±7 est observée	408 816 622
K	K^+, K^0 (K_β)	493,8 498,0		0^-	1/2	1		cf. tabl. 2	
	$\varkappa(K)$	725±3	<12	?	1/2	1	$K\pi$		92
	$K^*(K_\gamma)$	891±1	50±2	1^-	1/2	1	$K\pi$ $K\pi\pi$ $\varkappa\pi$	~100 <0,2 <0,3	258 118 27
	$K_C(K)$	1 215±15	60±10	$1^+(?^?)$	≤3/2	1	$K\rho$ $K^*\pi$	fortement ?	−30 84

nombres quantiques «dérivés» de nombres quantiques fondamentaux.

Nombres quantiques	N	Δ	Λ	Σ	Ξ	Ω	η	π	K
B	1	1	1	1	1	1	0	0	0
S	0	0	−1	−1	−2	−3	0	0	+1
T		3/2	0	1	1/2	0	0	1	1/2
$Y = B + S$	1	1	0	0	−1	−2	0	0	+1
$\tilde{z} = 1/2(B + S)$	1/2	1/2	0	0	−1/2	−1	0	0	+1/2
$2T + 1$	2	4	1	3	2	1	1	3	2

4° Les hadrons avec mêmes spins et parité, se trouvant en états J^P, où J est le spin de la particule et P sa parité, forment des ensembles symétriques. Il existe huit mésons se trouvant en état 0^-($J = 0$, $P = -1$), neuf mésons en état 1^-, huit baryons en état $1/2^+$ et dix résonances baryoniques en état $3/2^+$. Les trois premiers groupes sont constitués de multiplets, situés dans le plan T_ζ $S(Y)$ sous forme d'hexagones symétriques (fig. VI.6.1-VI.6.4). Le groupe des dernières dix résonances forme un triangle régulier avec la particule Ω^- en son sommet. Toutes les figures rassemblent les particules ayant des valeurs de masse proches et symétriques par rapport à une rotation de 120°. Les groupes symétriques de particules avec mêmes spins et parité sont considérés comme ***supermultiplets de particules*** obtenus par «désintégration» d'une particule dont l'état est défini par la valeur de J^P, attribuée à tous les termes d'un supermultiplet donné.

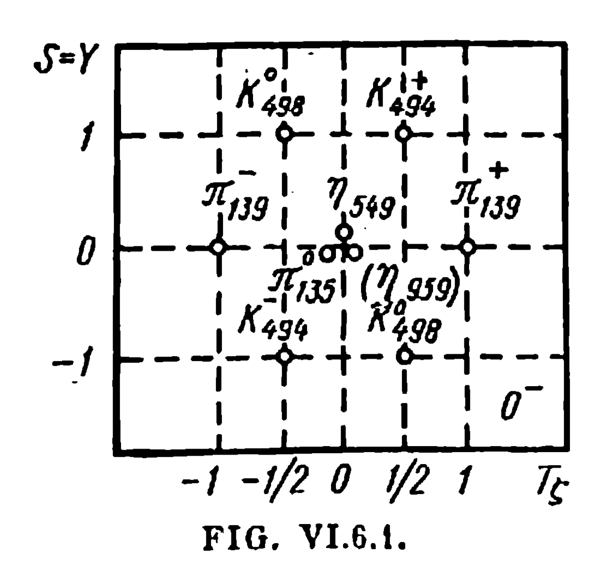


FIG. VI.6.1.

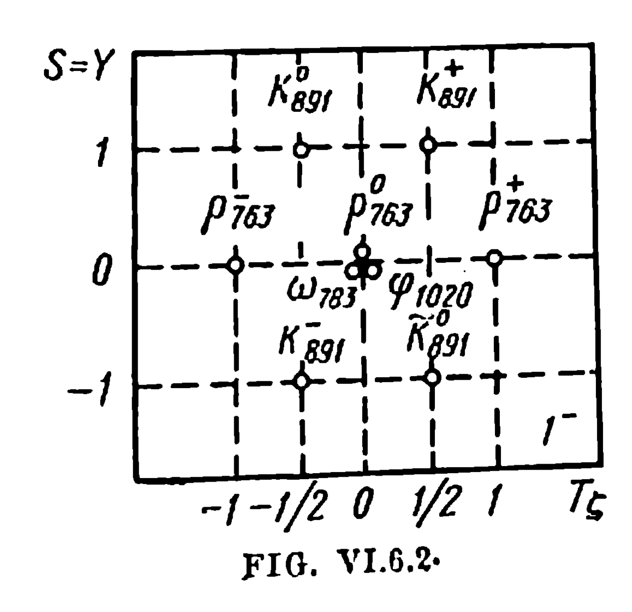


FIG. VI.6.2.

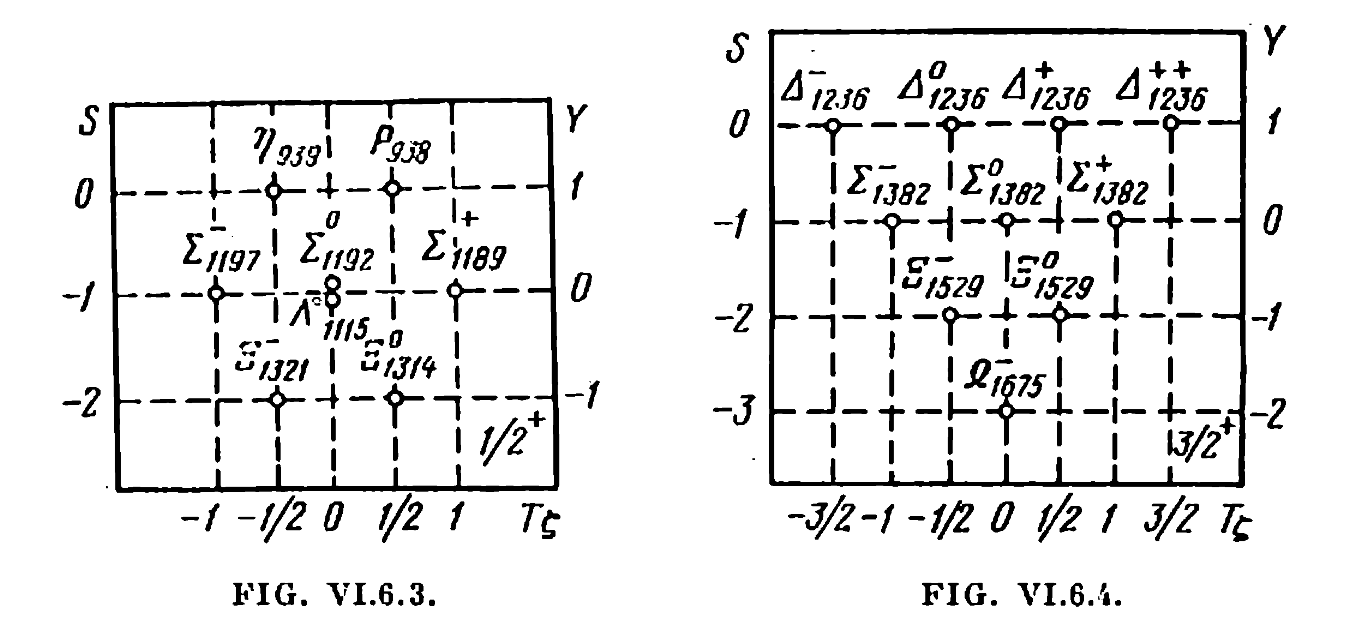


FIG. VI.6.3. FIG. VI.6.4.

5° On admet que l'importance de chacun des trois types d'interactions (p. 893) dans la formation de la masse de la particule est déterminée par la force relative d'interaction. Avec l'accroissement de l'intensité de l'interaction et la rapidité de son action augmente l'importance de cette interaction dans la formation de la masse. L'interaction nucléaire (forte) est isotopiquement invariante, c'est-à-dire ne dépend pas de la charge électrique de la particule et est approximativement $10^2 \div 10^3$ fois plus intense que l'interaction électromagnétique, qui dépend de la charge électrique. L'intensité de l'interaction faible est $10^{13} \div 10^{14}$ fois plus faible que celle de l'interaction forte. Pour les hadrons, l'interaction jouant un rôle prépondérant dans la formation de la masse des particules est l'interaction forte, alors que l'interaction électromagnétique n'a pas d'importance. Pratiquement toute la masse (~99%) de l'hadron se forme au compte de l'interaction forte et seule une faible partie (~1%) au compte de l'interaction électromagnétique. La masse importante de toutes les particules interagissant fortement témoigne de ce fait. La plus légère parmi elles est le pion (méson π) dont la masse est $m_\pi = 273\ m_e$.Les particules qui n'interviennent pas dans les interactions fortes (e^-, e^+, ν_e, $\tilde{\nu}_e$, ν_μ, $\tilde{\nu}_\mu$) ont une masse $m \leqslant m_e$. Exception font les mésons (les mésons μ), ayant une masse de $207\ m_e$, qui ne participent pas aux interactions fortes et qui occupent une place à part (pas tout à fait claire) dans le schéma de systématisation des particules élémentaires.

6° La plus grande partie de la masse de l'hadron créée au compte d'une interaction forte, jouissant d'indépendance de charge, doit être la même pour les différents termes du multiplet isotopique. Les

différences entre leurs masses sont dues à l'interaction électromagnétique beaucoup plus faible qui élimine la dégénérescence. En d'autres termes, la décomposition des masses est due à ce que dans les interactions électromagnétiques (p. 895) le spin isotopique ne se conserve pas.

7° L'invariance isotopique de l'interaction forte se manifeste pour les mésons π, les nucléons et les noyaux sous forme de la loi de la conservation du spin isotopique, et l'extension du principe d'invariance isotopique aux mésons K (aux kaons) et aux hypérons conduit à la loi de la conservation de l'étrangeté.

8° La ressemblance (signalée plus haut, 4°) des propriétés du groupe des hadrons de mêmes spins et parité (mais de différentes étrangetés et charges électriques) fait supposer qu'à part l'invariance isotopique, il existe une symétrie plus élevée, appelée *symétrie unitaire* des interactions fortes.

Le concept de symétrie unitaire conduit à l'hypothèse que l'interaction forte est constituée de deux parties: *interaction très forte (proprement forte, la plus forte)* et *interaction modérément forte.* Pour toutes les particules qui forment un grand groupe de particules ayant des masses presque égales: les *multiplets unitaires* ou les *supermultiplets*, l'interaction très forte est la même. Elle détermine la structure des multiplets unitaires et leur nombre. L'interaction très forte ne dépend pas de l'étrangeté et de la charge électrique des particules. L'interaction modérément forte, au contraire, dépend de l'étrangeté et, grâce à elle, s'élimine la dégénérescence par étrangeté, c'est-à-dire se produit la décomposition du supermultiplet en ses multiplets de charge. La décomposition ultérieure des multiplets de charge s'explique par l'interaction électromagnétique et il apparaît un jeu complet de particules correspondantes.

Les schémas de symétrie unitaire des particules élémentaires sont réalisés sous différentes formes: *modèle composé de Sakata-Okun, représentation en octet de la symétrie SU*(3) (*symétrie à octet, symétrie SU*(3)) *de Gell-Mann-Neumann, modèle des «quarks»* ou *des «as» de Gell-Mann-Zweig* et le *schéma de symétrie SU*(6) *de Pais, Radicatti* et *Gürsey*. Ces schémas ainsi que la systématisation des hadrons, dite *schéma des trajectoires de Regge*, expliquent plus ou moins l'existence de supermultiplets d'un type déterminé et l'absence d'autres, indiquent les relations reliant les propriétés des divers hadrons formant un supermultiplet donné (en particulier, permettent d'établir leurs relations de masse, de prédire les particules non encore connues d'un supermultiplet donné) et résolvent autres problèmes. L'efficacité des différentes variantes de schéma de symétrie unitaire dépend fortement de l'état des données expérimentales au moment de l'apparition de tel ou autre schéma.

3. Particules et champs

1° On attribue à chaque champ des particules appelées *quanta du champ*. Les photons sont les quanta du champ électromagnétique, les mésons π, les quanta du champ nucléaire, les *gravitons* hypothétiques, les quanta du champ de gravitation. Les quanta des champs sont des bosons (p. 236). La masse au repos nulle des quanta des champs n'est pas un indice suffisant pour les distinguer des particules réelles, puisque la masse au repos des mésons π, par exemple, n'est pas nulle $m_0 \neq 0$ (tableau 1, p. 898).

2° Les interactions des particules entre elles, qui se manifestent dans leur attraction ou leur répulsion, se décrivent comme un *échange virtuel de quanta du champ entre les particules* correspondant à un type donné d'interaction. Le mécanisme précis d'interaction des particules n'est pas connu à l'heure actuelle. La conception d'échange virtuel de photons dans les interactions électromagnétiques reflète de façon juste la dépendance de la force d'interaction (de l'intensité du champ) vis-à-vis de la distance r entre particules ($\sim r^{-2}$).

3° Lorsqu'une particule de masse $m_0 \neq 0$ rencontre son antiparticule, il peut avoir lieu leur *annihilation*, lors de laquelle les deux particules se transforment en quanta du champ correspondant au type d'interaction entre elles. L'annihilation de l'électron et du positon s'accompagne de l'apparition de quanta du champ électromagnétique, c'est-à-dire de photons, l'annihilation du nucléon et de l'antinucléon, de l'apparition de mésons π, etc. Le nombre de quanta apparus lors de l'annihilation est déterminé par les lois de la conservation de la charge électrique (et du nombre baryonique dans le cas des baryons), de l'énergie et de l'impulsion. La probabilité d'annihilation d'un type donné dépend également de l'orientation des spins de la particule et de son antiparticule. L'*annihilation monophotonique* de l'électron et du positon n'est possible qu'au voisinage d'une troisième particule quelconque (du noyau par exemple). Pour des vitesses non relativistes de mouvement des électrons et des positons un retard de l'annihilation avec formation d'un système métastable, le positonium (p. 780), est très probable. L'*annihilation diphotonique* est la plus répandue, on connaît également l'annihilation lors de laquelle le positon et l'électron se transforment en trois photons

4° Le processus inverse à l'annihilation est la *création* de particules et d'antiparticules à partir des quanta du champ quand l'énergie de ces derniers atteint $2m_0c^2$, où m_0 est la masse au repos de la particule en formation. Pour une paire électron-positon cette énergie constitue 1,11 MeV. L'énergie minimale calculée, nécessaire pour la création d'une paire électron-positon dans le système, où un

nucléon est au repos, se trouve être égale à 5,6 GeV. Lorsqu'on réalise en pratique la production de cette paire, l'énergie minimale nécessaire pour sa création baisse jusqu'à 4,3 GeV au compte du mouvement interne des nucléons dans les noyaux cibles et d'autres effets.

5° Les antiparticules (positons, antiprotons, antineutrons) se distinguent par leur aptitude à se combiner rapidement avec leurs particules. Rencontrant leurs «partenaires par paire» présents en excès dans la substance, les antiparticules se combinent avec elles et cessent d'exister en donnant naissance à de nouvelles particules et champs en accord avec les lois de conservation. Dans l'«antimatière» hypothétique (dont les «antiatomes» contiendraient, dans leurs noyaux, des antiprotons et des antineutrons et, sur la périphérie, des positons) les électrons, protons et neutrons seraient aptes à se combiner aussi rapidement en rencontrant les particules des «antiatomes». La stabilité des particules et l'instabilité des antiparticules est tout à fait conventionnelle. Dans le vide, les antiparticules, positons, antiprotons et antineutrons, sont aussi stables que leurs particules, électrons, protons et neutrons.

6° Les processus de création et d'annihilation des particules et de leurs antiparticules s'expliquent formellement dans la *théorie de Dirac* comme résultat de l'interaction des particules et du vide. Le vide y est représenté sous forme de «bande» énergétique entièrement remplie de fermions, dont le niveau énergétique supérieur correspond à l'énergie $-m_0c^2$. Les fermions présents dans le vide (pour $E \leqslant -m_0c^2$) ne sont pas observables, étant donné qu'ils ne peuvent intervenir dans les interactions quelles qu'elles soient: ceci signifierait qu'ils peuvent perdre de l'énergie et occuper des niveaux plus bas dans la bande; mais en vertu du principe de Pauli (p. 796), ce n'est pas possible pour les fermions. Lorsqu'on communique aux particules se trouvant dans le vide l'énergie $\Delta E \geqslant 2m_0c^2$, elles traversent la «bande» interdite, leur énergie $E \geqslant m_0c^2$ et elles deviennent observables. Les états vacants («trous») apparaissant alors dans la bande d'énergies négatives se comportent comme des antiparticules.

7° En théorie des particules élémentaires, on comprend sous vide l'état fondamental, le plus bas, des champs décrivant en théorie quantique relativiste les particules correspondantes (cf. 1°). Ce concept de vide diffère de sa représentation en tant qu'état du gaz aux pressions inférieures à la pression atmosphérique (p. 224). La conception qu'on a du vide en théorie quantique permet d'obtenir des résultats quantitatifs si les champs sont considérés comme interagissant faiblement entre eux. Le vide représente dans ce cas l'ensemble d'états fondamentaux de champs non interagissant entre

eux. En électrodynamique quantique, on distingue le vide relatif au champ électromagnétique et le vide relatif au champ électron-positon. Des relations de Heisenberg on déduit qu'en état de vide les champs effectuent des *oscillations de point zéro*, qui sont considérées comme les états dans lesquels apparaissent et disparaissent virtuellement les photons, les paires électron-positon et, en général, les paires particule-antiparticule. L'interaction d'un champ électromagnétique extérieur avec les oscillations de point zéro du vide occasionne l'hétérogénéité dans la distribution spatiale de la charge totale des paires virtuelles, ce qui provoque *la polarisation du vide*, à laquelle est liée toute une série d'effets confirmés expérimentalement. La polarisation du vide se manifeste à faibles distances, de l'ordre de la longueur d'onde comptonienne des particules correspondant à un champ donné, en particulier de l'électron. La polarisation du vide fait que la charge observée de la particule dépend de la distance. Ainsi, l'électron se mouvant à de faibles distances du noyau, subit l'action d'une charge supérieure à la charge effective du noyau à grandes distances. Ce fait est responsable du *décalage des niveaux énergétiques* des électrons atomiques. C'est la polarisation du vide qui conditionne la diffusion de la lumière par le champ coulombien du noyau et autres effets. La polarisation du vide se manifeste en ce que le potentiel de la charge ponctuelle fixe q diffère du potentiel coulombien. Aux distances $r \ll r_0$, où $r_0 = \frac{\hbar}{m_e c}$ est la longueur d'onde comptonienne de l'électron avec une précision aux termes d'ordre e^2 près:

$$\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(1 - \frac{e^2}{6\pi^2}\ln\frac{\hbar}{m_e c r}\right),$$

où e est la charge de l'électron, m_e sa masse au repos, c la vitesse de la lumière dans le vide, ε_0 la constante diélectrique en u. SI.

8° Les oscillations de point zéro du champ électromagnétique provoquent des perturbations du mouvement de l'électron et conduisent à des effets ainsi appelés *corrections radiatives*. On compte au nombre de celles-ci:

a) L'apparition d'un *moment magnétique anomal* de l'électron, supérieur en valeur au moment magnétique obtenu à partir de la théorie de Dirac. En tenant compte des effets du quatrième ordre apparaissant lors de l'interaction de l'électron avec les oscillations de point zéro du champ électromagnétique

$$\mu_e = \mu_B\left(1 + \frac{\alpha}{2\pi} - 2{,}973\frac{\alpha^2}{\pi^2}\right),$$

où α est la constante de structure fine (p. 894), μ_B le magnéton de Bohr (p. 486). La valeur expérimentale de $\mu_e = 1{,}001\,145\,35\,\mu_B$ est confirmée par cette formule.

b) La faible divergence entre les niveaux énergétiques des électrons dans les systèmes hydrogénoïdes (p. 752), calculés suivant la théorie relativiste fondée sur l'équation de Dirac, et les niveaux énergétiques observés expérimentalement *(décalage Lamb des niveaux)*. Les niveaux énergétiques $2\,^2S_{1/2}$ et $2\,^2P_{1/2}$ dans l'atome d'hydrogène ont les mêmes nombres quantiques n et j, donc doivent être dégénérés. En réalité, l'énergie relative au niveau $2\,^2S_{1/2}$ est supérieure à celle du niveau $2\,^2P_{1/2}$. La valeur de ce décalage en fréquences est $(1\,057{,}77 \pm 0{,}1)$ MHz et est déterminée par les méthodes radiospectroscopiques. Dans le deutérium la différence entre les niveaux $2\,^2S_{1/2}$ et $2\,^2P_{1/2}$ constitue 1 058 MHz, dans l'hélium $(14\,020 \pm 60)$ MHz. La correction au niveau énergétique dans les systèmes hydrogénoïdes est donnée par la *formule de Bethe:*

$$\Delta E = \frac{8Z^4}{6\pi^2}\,\alpha^3\,\frac{R\hbar}{n^3}\ln\frac{2n^2}{\alpha^2}\,,$$

où n est le nombre quantique principal (p. 753), R la constante de Rydberg (p. 773), α la constante de structure fine.

Des calculs plus précis du décalage relatif des niveaux $2\,^2S_{1/2}$ et $2\,^2P_{1/2}$ dans l'hydrogène, avec une précision aux termes d'ordre $Z\alpha^3$ près et compte tenu de l'influence de l'interaction de l'électron avec le moment magnétique dipolaire du noyau, de la structure et du caractère fini de la masse du noyau, donnent 1 057,8 MHz.

L'interaction des particules et du vide est la manifestation de l'interaction universelle et de la transformabilité réciproque des particules matérielles et des quanta du champ.

9° La structure des particules élémentaires ne peut être définie au moyen des représentations géométriques. Cette structure est, de toute évidence, non stationnaire. D'une part, elle détermine le type d'interaction d'une particule élémentaire donnée avec d'autres et se manifeste dans cette interaction. D'autre part, elle est la réflexion de toutes les interactions que subit la particule à un instant donné.

10° Des données sur la structure nucléonique ont été obtenues en étudiant la diffusion élastique des mésons π d'énergie de l'ordre de 7 GeV par les protons et de la diffusion élastique des électrons par les protons et neutrons. On suppose que dans le nucléon existe

une partie centrale (le *«cœur» du nucléon)* de rayon $r_c \approx 0{,}2 \cdot 10^{-13}$ cm, à l'intérieur de laquelle est concentrée la charge positive $e_c \approx$ $\approx +0{,}35e$, où e est la valeur de la charge élémentaire. Le «cœur» du nucléon est probablement constitué de plusieurs couches de particules lourdes naissant et s'annihilant virtuellement par paires: particule-antiparticule. Le nuage mésique des mésons virtuels π *(atmosphère pionique du «cœur»)* est réparti dans un domaine de dimension linéaire $r_\pi \approx 0{,}8 \cdot 10^{-13}$ cm dont la densité va décroissant vers les limites du nucléon. La charge $e_\pi = \pm\, 0{,}5e$ correspond à l'atmosphère pionique π. Les signes «+» et «−» se rapportent respectivement au proton et au neutron. La charge positive du nucléon $e_c = +0{,}15e$ est répartie dans un domaine de dimension linéaire $r_c \approx 1{,}45 \cdot 10^{-13}$ cm *(stratosphère pionique)*.

11° La structure nucléonique explique la valeur anomale du moment magnétique du proton égale à 2,9 μ_{noy}, où μ_{noy} est le magnéton nucléaire, et le moment magnétique négatif du neutron égal à 1,9 μ_{noy}. La rotation du nuage mésique π autour de son «axe» doit être liée à l'apparition d'un certain «courant» et au moment magnétique lui correspondant. Dans le cas du proton, le nuage mésique positif π crée un moment magnétique, complémentaire au moment magnétique du «cœur» et de même signe que ce dernier, ce qui conduit à une valeur anomalement importante du moment magnétique du proton. Dans le cas du neutron, le nuage mésique négatif π crée un moment magnétique négatif qui, en combinaison avec le moment magnétique du «cœur», donne un moment magnétique négatif du neutron. L'interaction électromagnétique du «cœur» du nucléon avec les nuages mésiques π est également responsable de la différence entre les masses au repos du neutron et du proton (cf. également p. 908).

4. Rayons cosmiques

1° On appelle *rayons cosmiques* les flux de noyaux atomiques de très haute énergie, principalement de protons, arrivant sur la Terre de l'espace cosmique, ainsi que le rayonnement secondaire créé par ces noyaux dans l'atmosphère terrestre. Les rayons cosmiques se trouvant en dehors de l'atmosphère terrestre sont dits *primaires*. Les rayons cosmiques primaires sont constitués de noyaux atomiques de différents nombres de masse (voir le tableau ci-après),

dont les énergies par nucléon sont comprises dans l'intervalle entre 1 GeV $\leqslant E \leqslant 10^{13}$ eV.

Groupe de noyaux	Charge Z	Densité du flux, $m^{-2} \cdot sr^{-1} \cdot s^{-1}$	% dans le flux
Protons	1	1 300	92,9
Noyaux d'hélium	2	88	6,3
Noyaux légers	3-5	1,9	0,13
Noyaux moyens	6-9	5,6	0,4
Noyaux lourds	$\geqslant 10$	2,5	0,18
Noyaux très lourds	$\geqslant 20$	0,7	0,05

Dans les rayons cosmiques primaires existent des noyaux d'éléments chimiques dont la composition diffère peu de la composition des éléments contenus dans l'écorce terrestre et l'atmosphère solaire. La densité volumique d'énergie des rayons cosmiques constitue en moyenne 1 eV/cm³. Le flux de rayons primaires avec une énergie supérieure à 2,5 GeV/nucléon tient une densité $\approx 0{,}14$ $cm^{-2} \cdot sr^{-1} \cdot s^{-1}$. L'énergie moyenne par nucléon est presque égale pour tous les noyaux, et c'est pourquoi environ 1/3 de l'énergie totale incombe aux noyaux moyens et lourds. Les rayons cosmiques primaires présentent une distribution spatiale isotrope. Aux hauteurs supérieures à 50-60 km, ils ont une intensité constante. A mesure du rapprochement de la Terre l'intensité des rayons cosmiques augmente au compte des rayons cosmiques secondaires.

2° Les rayons cosmiques *secondaires* se produisent au cours des collisions inélastiques des rayons primaires avec les noyaux des atomes d'azote et d'oxygène de l'air dans les couches supérieures de l'atmosphère. Au-dessous de 20 km, le rayonnement cosmique est dans son ensemble secondaire. Le pouvoir de pénétration des rayons cosmiques est mesuré par l'épaisseur d de la couche de plomb que peuvent traverser les rayons cosmiques. Une diminution rapide de l'intensité a lieu dans les couches de 0 à 10-13 cm; avec l'augmentation ultérieure de l'épaisseur, l'intensité ne varie pratiquement pas. Aussi distingue-t-on dans la composition des rayons secondaires des composantes molle et dure. On appelle *composante molle* ceux des rayons qui sont fortement absorbés dans le plomb, *composante dure* ceux des rayons qui possèdent un pouvoir de pénétration important dans le plomb. La composante molle est formée d'électrons, de positons et de photons. La composante dure est constituée de muons produits par désintégration des mésons π et interagissant faiblement avec les noyaux atomiques de l'atmosphère. Le rapport des intensités des composantes molle et dure varie fortement avec l'altitude,

ce qui est dû à l'absorption inégale des différentes particules dans l'atmosphère, ainsi qu'à la désintégration des particules instables.

3° Les rencontres des particules primaires de haute énergie ($> 5 \cdot 10^9$ eV) avec les atomes de l'air conduisent, en général, à la formation de *gerbes électrono-nucléaires*. L'interaction de la particule primaire avec les noyaux atomiques de l'air provoque la désintégration de ces derniers en nucléons isolés et en plus grosses particules, ainsi que la création de particules instables (mésons $\pi^\pm$ et π^0). Les désintégrations ultérieures: $\pi^\pm \to \mu^\pm \to e^\pm$ et $\pi^0 \to 2\gamma \to e^+ + e^-$ conduisent à la formation de la composante molle électrono-photonique (4°) de la gerbe. Cette composante se multiplie ensuite intensivement par création en cascade de nouvelles paires e^+-e^- (p. 910) et par rayonnement de freinage de nouveaux quanta gamma par les particules *(processus électronique en cascade)*. Les nucléons de haute énergie produits par désintégration des noyaux provoquent à leur tour des gerbes électrono-nucléaires *(processus nucléaire en cascade)*. L'ensemble des interactions nucléaires successives de haute énergie conduit à la formation de *gerbes atmosphériques* très intenses (dites également *gerbes d'Auger*). Celles-ci, pour des énergies des particules primaires supérieures à 10^{13} eV, peuvent comprendre plusieurs millions de particules ($e^\pm$ principalement) aux dimensions transversales de la gerbe supérieures à 1 km².

4° Les rayons cosmiques provenant des espaces interstellaires et peut-être intergalactiques tombent sur la Terre de façon isotrope et sont déviés par le champ magnétique terrestre. Ceci étant, l'intensité des rayons cosmiques dépend de la latitude géographique. Dans la zone équatoriale l'action infléchissante du champ magnétique terrestre se manifeste de façon plus intense, et la plupart des particules subissant une forte inflexion ne pénètrent pas dans l'atmosphère terrestre *(effet de latitude)*. Les particules chargées positivement qui constituent les rayons cosmiques sont déviées par le champ magnétique terrestre vers l'est et celles chargées négativement, vers l'ouest *(effet est-ouest)*. Les effets de latitude et est-ouest augmentent avec l'altitude. L'intensité des rayons cosmiques dépend de la longitude géographique du lieu d'observation *(effet de longitude)*.

5° On observe en dehors de l'atmosphère terrestre des *ceintures de radiations* entourant la Terre, qui sont deux régions délimitées dans lesquelles l'intensité du rayonnement cosmique ionisant est très élevée (en comparaison de l'intensité du rayonnement observé à des altitudes relativement faibles). Ces zones sont dues à la capture de particules chargées par le champ magnétique terrestre. La *ceinture de radiations intérieure (ceinture de Van Allen)* est éloignée de 600 ÷ 6 000 km de la Terre, mais en certains endroits

descend jusqu'à 300 km (dans le domaine des anomalies magnétiques dans le sud de l'Atlantique, par exemple). Cette ceinture de radiations est constituée de protons de haute énergie (jusqu'à 100 MeV) dont le flux présente une densité de $\approx 10^2$ cm$^{-2}\cdot$sr$^{-1}\cdot$s^{-1}. La *ceinture de radiations extérieure* est située à des distances $2\cdot10^4 \div 6\cdot10^4$ km de la Terre, mais en certains endroits (à des latitudes de 55°-70°) s'approche de la Terre jusqu'à 300-1 500 km. La ceinture de radiations extérieure est formée d'électrons provenant du Soleil qui atteignent l'espace entourant la Terre. L'énergie de ces électrons est supérieure à 100 keV, et leur flux présente une densité de 10^9 cm$^{-2}\cdot$sr$^{-1}\cdot$s^{-1}. Les ceintures de radiations sont caractéristiques de tous les corps célestes qui possèdent un champ magnétique. La Lune par exemple n'a pas de champ magnétique propre et, donc, de ceintures de radiations.

6° Les fluctuations d'intensité des rayons cosmiques secondaires avec le temps sont dites *variations des rayons cosmiques*. Les *variations atmosphériques* sont liées aux changements non réguliers de la pression atmosphérique, à l'activité solaire variable influant sur les processus qui ont lieu dans l'atmosphère, etc. Les *variations sidérales diurnes* sont liées à la rotation de la Terre, au mouvement des sources hypothétiques des rayons primaires autres que le système solaire. On connaît, de plus, les variations des rayons cosmiques avec une périodicité de 27 jours, saisonnière, annuelle, de 11 ans, etc.

7° Les hypothèses faites sur la provenance des rayons cosmiques primaires sont fondées sur les données qu'on a des énergies des particules primaires et sur les données radioastronomiques. On admet que dans les rayons primaires les particules chargées acquièrent de très grandes énergies grâce à l'accélération qu'elles obtiennent dans les champs électromagnétiques des étoiles et du Soleil. L'accélération des particules chargées doit s'effectuer graduellement. Dans le cas contraire, si les noyaux lourds et très lourds qui peuvent posséder des énergies de l'ordre 10^{13} eV les gagnaient d'un coup, ils se désintégreraient immédiatement en leurs nucléons, car l'énergie de liaison ne suffirait pas à retenir ces derniers dans le noyau. L'accélération graduelle des rayons cosmiques primaires peut être réalisée de façon analogue à l'accélération des particules dans le bêtatron (p. 464). La rotation des étoiles possédant un champ magnétique s'accompagne de la création de champs électriques tourbillonnaires. Les champs magnétiques des étoiles agissant sur les protons et les noyaux retiennent ceux-ci sur des trajectoires fermées. Circulant sur celles-ci, les noyaux acquièrent dans les champs électriques des accélérations colossales. Les effets liés à l'incidence des particules dans les nuages de matière interstellaire possédant des champs ma-

gnétiques non uniformes représentent également un mécanisme d'accélération des particules dans les rayons cosmiques primaires. Il surgit dans les nuages de matière interstellaire des mouvements de masses chargées créant des champs électromagnétiques variables. Dans ces champs les particules chargées du rayonnement cosmique primaire peuvent s'accélérer jusqu'aux énergies les plus importantes qu'on observe dans celui-ci. On suppose que l'énergie initiale des particules primaires *(seuil d'injection)* provienne des ondes de choc produites par collisions des masses gazeuses lors de l'explosion de *supernovae*. L'énergie libérée dans ces explosions est de nature intranucléaire, aussi la cause première de l'énergie des rayons cosmiques est-elle également l'énergie nucléaire.

La matière stellaire au cours des explosions s'éjecte à de grandes distances et tombe dans les champs magnétiques variables interstellaires où elle acquiert une accélération nouvelle. La densité de la matière interstellaire étant faible, le libre parcours moyen des particules accélérées est très grand, de sorte que pour une durée immense ($10^8 \div 10^9$ a) des processus d'accélération les particules des rayons cosmiques acquièrent de très hautes énergies. Au cours de leur accélération et de leur freinage dans les champs magnétiques interstellaires ces particules émettent un rayonnement de freinage et un rayonnement synchrotron (p. 605), situés dans le domaine du visible et des ondes radioélectriques courtes *(ondes radioélectriques cosmiques)*.

Les flux de rayons cosmiques sont émis par le Soleil. L'intensité de ces flux augmente brusquement lors des éruptions solaires.

Appendices

APPENDICE I

Unités de mesure et dimension des grandeurs physiques dans différents systèmes d'unités[1]

1. Unités de mesure des grandeurs mécaniques

1° Jusqu'en 1963, en U.R.S.S., trois systèmes métriques d'unités étaient admis:

a) le *système physique absolu* CGS dont les principales unités sont le centimètre (longueur), le gramme (masse) et la seconde (temps);

b) le *système pratique absolu* MKSA dont les principales unités sont le mètre, le kilogramme, la seconde et l'ampère;

c) le *système technique* MKpS dont les principales unités sont le mètre, le kilogramme-poids et la seconde.

A partir de 1963, on utilise le *Système international* (SI).

Comme unité d'angle plan dans tous les systèmes d'unités est adopté le radian et comme unité d'angle solide, le stéradian.

2° Définitions des principales unités.

Le *mètre* (m), unité de longueur, est la longueur égale à 1 650 763,73 longueurs d'onde dans le vide de la radiation correspondant à la transition entre les niveaux $2p_{10}$ et $5d_5$ de l'atome de krypton 86. Le passage à la nouvelle définition du mètre, par comparaison avec l'ancienne (distance entre deux traits gravés sur la longueur étalon en platine iridié), n'implique aucune variation de la valeur acceptée du mètre, mais élève seulement l'exactitude de son reproduction.

[1] Pour les principales définitions et informations sur la théorie des dimensions, cf. pp. 342 et 343.

Le *centimètre* (cm) est le centième du mètre.

Le *kilogramme* (kg), l'unité de masse, est la masse du prototype international en platine iridié.

Le *gramme* (g) est le millième du kilogramme.

La *seconde* (s) est la fraction 1/31 556 925,974 7 de l'année tropique pour 1900 janvier zéro à 12 heures de temps des éphémérides. On appelle *année tropique* l'intervalle de temps qui s'écoule entre deux passages successifs du Soleil par le point de l'équinoxe de printemps. On appelle *temps des éphémérides* le temps uniforme qui est utilisé en astronomie depuis qu'il a été établi que la rotation de la Terre et la marche du temps universel sur celle-ci sont non uniformes. La nouvelle définition de la seconde n'est pas liée à une variation de sa valeur en comparaison de l'ancienne.

Le *kilogramme-poids* (kgp) ou *kilogramme-force* (kgf) est la force communiquée à la masse égale à la masse du prototype international de 1 kg soumise à une accélération de 9,806 65 m/s².

Le *radian* (rd) est l'angle ayant son sommet au centre d'un cercle et interceptant sur la circonférence de ce cercle un arc d'une longueur égale au rayon du cercle.

Le *stéradian* (sr) est l'angle solide ayant le sommet au centre d'une sphère et qui découpe sur la surface de la sphère une aire égale à celle d'un carré ayant pour côté le rayon de la sphère.

3° Préfixes utilisés pour désigner les unités dérivées, multiples et sous-multiples, des systèmes métriques:

Noms	Rapport à l'unité principale	Symbole
Pico	10^{-12}	p
Nano	10^{-9}	n
Micro	10^{-6}	µ
Milli	10^{-3}	m
Centi	10^{-2}	c
Déci	10^{-1}	d
Déca	10	da
Hecto	10^{2}	h
Kilo	10^{3}	k
Méga	10^{6}	M
Giga	10^{9}	G
Téra..................	10^{12}	T

4° Dimension et unités de mesure de quelques grandeurs géométriques et mécaniques dans différents systèmes d'unités

Grandeur	Formule de dimension dans le système[1]		Unités de mesure dans le système					
			CGS		MKSA et SI		MKpS	
	CGS, MKSA et SI	MKpS	Nom	Symbole	Nom	Symbole	Nom	Symbole
Longueur	L	L	centimètre	cm	mètre	m	mètre	m
Masse	M	$L^{-1}FT^2$	gramme	g	kilogramme	kg		kgp · s²/m
Temps	T	T	seconde	s	seconde	s	seconde	s
Aire	L^2	L^2	centimètre carré	cm^2	mètre carré	m^2	mètre carré	m^2
Volume	L^3	L^3	centimètre cube	cm^3	mètre cube	m^3	mètre cube	m^3
Fréquence	T^{-1}	T^{-1}	hertz	Hz	hertz	Hz	hertz	Hz
Vitesse angulaire	T^{-1}	T^{-1}	—	rd/s	—	rd/s	—	rd/s
Accélération angulaire	T^{-2}	T^{-2}	—	rd/s^2	—	rd/s^2	—	rd/s^2
Vitesse	LT^{-1}	LT^{-1}	—	cm/s	—	m/s	—	m/s
Accélération	LT^{-2}	LT^{-2}	—	cm/s^2	—	m/s^2	—	m/s^2
Force	LMT^{-2}	F	dyne	dyn	newton	N	kilogramme-poids	kgp
Quantité de mouvement	LMT^{-1}	FT	—	g · cm/s	—	kg · m/s	—	kgp · s
Impulsion de force	LMT^{-1}	FT	—	dyn · s	—	N · s	—	kgp · s

[1]) Les symboles L et T représentent les unités de longueur et de temps, M la masse (en systèmes CGS, MKSA et SI) et F la force (en système MKpS).

(suite)

Grandeur	Formule de dimension dans le système		Unités de mesure dans le système					
			CGS		MKSA et SI		MKpS	
	CGS, MKSA et SI	MKps	Nom	Symbole	Nom	Symbole	Nom	Symbole
Densité	$L^{-3}M$	$L^{-4}FT^2$	—	g/cm^3	—	kg/m^3	—	$kgp \cdot s^2/m^4$
Poids spécifique	$L^{-2}MT^{-2}$	$L^{-3}F$	—	dyn/cm^3	—	N/m^3	—	kgp/m^3
Travail et énergie	L^2MT^{-2}	LF	erg	erg	joule	J	—	$kgp \cdot m$
Puissance	L^2MT^{-3}	LFT^{-1}	—	erg/s	watt	W	—	$kgp \cdot m/s$
Moment de force	L^2MT^{-2}	LF	—	$dyn \cdot cm$	—	$N \cdot m$	—	$kgp \cdot m$
Moment d'inertie	L^2M	LFT^2	—	$g \cdot cm^2$	—	$kg \cdot m^2$	—	$kgp \cdot m \cdot s^2$
Moment cinétique	L^2MT^{-1}	LFT	—	$g \cdot cm^2/s$	—	$kg \cdot m^2/s$	—	$kgp \cdot m \cdot s$
Impulsion du moment de force	L^2MT^{-1}	LFT	—	$dyn \cdot cm \cdot s$	—	$N \cdot m \cdot s$	—	$kgp \cdot m \cdot s$
Pression (tension)	$L^{-1}MT^{-2}$	$L^{-2}F$	barye	dyn/cm^2	—	N/m^2	—	kgp/m^2
Viscosité dynamique (coefficient de frottement interne)	$L^{-1}MT^{-1}$	$L^{-2}FT$	poise	Po	—	$N \cdot s/m^2$	—	$kgp \cdot s/m^2$
Viscosité cinématique	L^2T^{-1}	L^2T^{-1}	stokes	St	—	m^2/s	—	m^2/s
Modules de Young, de cisaillement et de compression volumique	$L^{-1}MT^{-2}$	$L^{-2}F$	—	dyn/cm^2	—	N/m^2	—	kgp/m^2

5° Relations entre les unités de mesure de quelques grandeurs (l'accélération normalisée 9,806 65 m/s^2 est remplacée par sa valeur approchée 9,81 m/s^2).

Grandeur	Relations entre les unités de mesure dans les systèmes CGS, MKSA, SI et MKpS	
Longueur	1 cm	$= 10^{-2}$ m
Masse	1 g	$= 10^{-3}$ kg; 1 kgp · s^2/m = 9,81 kg
Aire	1 cm^2	$= 10^{-4}$ m^2
Volume	1 cm^3	$= 10^{-6}$ m^3
Force	1 dyn	$= 10^{-5}$ N; 1 kgp = 9,81 N
Densité	1 g/cm^3	$= 10^3$ kg/m^3; 1 kgp · s^2/m^4 = 9,81 kg/m^3
Poids spécifique	1 dyn/cm^3	= 10 N/m^3; 1 kgp/m^3 = 9,81 N/m^3
Travail et énergie	1 erg	$= 10^{-7}$ J; 1 kgp · m = 9,81 J
Puissance	1 erg/s	$= 10^{-7}$ W; 1 kgp · m/s = 9,81 W
Pression, modules de dilatation linéaire, de cisaillement et de compression volumique	1 dyn/cm^2	$= 10^{-1}$ N/m^2; 1 kgp/m^2 = 9,81 N/m^2
Viscosité dynamique	1 Po	$= 10^{-1}$ N · s/m^2; 1 kgp · s/m^2 = 9,81 N · s/m^2

6° Les unités hors système et leurs relations avec les unités SI.

Grandeur	Unité de mesure		
	Nom	Symbole	Valeur en u. SI
Longueur	micron angström	µ ou µm Å	1 µm $= 10^{-6}$ m 1 Å $= 10^{-10}$ m
Masse	tonne quintal métrique carat métrique	t q —	1 t $= 10^3$ kg 1 q $= 10^2$ kg 1 carat $= 2 \cdot 10^{-4}$ kg
Temps	heure minute	h mn	1 h = 3 600 s 1 mn = 60 s
Angle plan	degré minute seconde	° ' "	$1° = \frac{\pi}{180}$ rd $1' = \frac{\pi}{108} \cdot 10^{-2}$ rd $1'' = \frac{\pi}{648} \cdot 10^{-3}$ rd
Aire	are hectare	a ha	1 a $= 10^2$ m^2 1 ha $= 10^4$ m^2

(suite)

Grandeur	Unité de mesure		
	Nom	Symbole	Valeur en u. SI
Volume	litre	l	1 l = 1,000 028 · 10^{-3} m^3
Angle de rotation	tour	t	1 t = 2π rd
Vitesse angulaire	—	t/mn t/s	1 t/mn = π/30 rd/s 1 t/s = 2π rd/s
Force	tonne-force	tf	1 tf = 9,806 65 · 10^3 N
Travail	watt-heure	Wh	1 Wh = 3,6 · 10^3 J
Puissance	cheval-vapeur	CV	1 CV = 735,499 W (75 kgp·m/s)
Pression	bar millimètre d'une colonne de mercure millimètre d'une colonne d'eau atmosphère technique atmosphère physique	bar mm Hg mm H_2O at ou kgp/cm^2 atm	1 bar = 10^5 N/m^2 1 mm Hg = 133,322 N/m^2 1 mm H_2O = 9,806 65 N/m^2 1 at = 9,806 65 · 10^4 N/m^2 1 atm = 1,013 25 · 10^5 N/m^2 (760 mm Hg)

2. Unités de mesure des grandeurs calorifiques

1° Pour la mesure des grandeurs calorifiques on utilise les unités SI dont les principales sont le mètre, le kilogramme, la seconde et le degré Kelvin.

On admet également l'application d'unités hors système, ayant à leur base la *calorie*.

2° En tant que fondamentales sont admises l'échelle thermodynamique absolue des températures (T °K) et l'échelle centigrade internationale des températures (t °C).

Le *point repère* principal de la première échelle, utilisée en SI, est la température du point triple (p. 292) de l'eau égale à 273,16 °K.

Les points repères principaux de la seconde échelle sont les températures de fusion de la glace (0 °C) et d'ébullition de l'eau (100 °C) à pression normale (101 325 N/m^2).

3° La définition de la *calorie* (la *calorie internationale*) est fondée sur la relation suivante:

$$1 \text{ cal} = 4{,}186\,8 \text{ J}.$$

Calorie thermochimique

$$1 \text{ cal}_{tch} = 4{,}184\,0 \text{ J}.$$

(Cf. au tableau pp. 926-927 les dimensions et les unités de quelques grandeurs moléculaires et calorifiques).

3. Unités de mesure des grandeurs électriques et magnétiques

1° Les unités SI pour les grandeurs électriques et magnétiques coïncident avec les unités correspondantes du système MKSA. En utilisant ce système d'unités, on doit écrire toutes les équations du champ électromagnétique sous une forme rationalisée.

2° Définition de l'unité d'intensité de courant électrique: l'*ampère* (A) est l'intensité d'un courant constant qui, parcourant deux conducteurs rectilignes parallèles de longueur infinie et de section circulaire infiniment petite et situés à 1 m l'un de l'autre dans le vide, produit une force de $2 \cdot 10^{-7}$ N/m.

En unités SI la *constante diélectrique* est:

$$\varepsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2} \text{ F/m},$$

où c est la vitesse de la lumière dans le vide (en m/s).

La *perméabilité magnétique* est:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}.$$

3° En physique, on utilise de plus les trois systèmes d'unités, qui ont à leur base le système CGS des grandeurs mécaniques:

a) le *système absolu d'unités électrostatiques* CGS (u.é.s. CGS) dans lequel figurent comme principales unités le centimètre, le gramme, la seconde et dans lequel la constante diélectrique est admise sans dimension et égale à l'unité dans le vide:

$$\varepsilon_0 = 1;$$

b) le *système absolu d'unités électromagnétiques* CGS (u.é.m. CGS) dans lequel les principales unités sont le centimètre, le gramme, la seconde et dans lequel la perméabilité magnétique est admise sans dimension et égale à l'unité dans le vide:

$$\mu_0 = 1;$$

Grandeur	Dimension dans les systèmes SI et CGS[1]	Unité de mesure dans le système		Unités hors systèmes	Relations entre les unités des différents systèmes
		SI	CGS		
Coefficient de diffusion	L^2T^{-1}	m^2/s	cm^2/s	—	$1\ cm^2/s = 10^{-4}\ m^2/s$
Coefficient de frottement interne	$L^{-1}MT^{-1}$	kg/m·s	g/cm·s (poise)	—	$1\ Po = 10^{-1}\ kg/m \cdot s$
Coefficient de tension superficielle	MT^{-2}	kg/s^2 (N/m, J/m^2)	g/s^2 (dyn/cm, erg/cm^2)	—	$1\ g/s^2 = 10^{-3}\ kg/s^2$
Volume spécifique	L^3M^{-1}	m^3/kg	cm^3/g	—	$1\ cm^3/g = 10^{-3}\ m^3/kg$
Poids moléculaire	$M \cdot mol^{-1}$ (CGS) $M \cdot kmol^{-1}$ (SI)	kg/kmol	g/mol	—	1 g/mol = 1 kg/kmol
Quantité de chaleur, énergie interne, enthalpie, potentiels isochore-isotherme, isobare-isotherme et chimique	L^2MT^{-2}	J	erg	calorie internationale (cal) calorie thermochimique (cal_{tch})	$1\ erg = 10^{-7}\ J$ $1\ cal = 4{,}186\ 8\ J$ $1\ kcal = 10^3\ cal$ $1\ cal_{tch} = 4{,}184\ 0\ J$

[1]) Les symboles L, M et T représentent les unités de longueur, de masse et de temps dans les systèmes d'unités correspondants.

(suite)

Capacité calorifique, entropie	$L^2MT^{-2} \cdot$ degré$^{-1}$	J/degré	erg/degré	cal/degré	
Chaleur spécifique, entropie spécifique	$L^2T^{-2} \cdot$ degré$^{-1}$	J/kg · degré	erg/g · degré	cal/g · degré kcal/kg · degré	1 erg/g · degré = 10^{-4} J/kg · degré 1 cal/g · degré = = 4,186 8 · 10^3 J/kg · degré
Chaleur spécifique de transition de phase	L^2T^{-2}	J/kg	erg/g	cal/g kcal/kg	1 erg/g = 10^{-4} J/kg 1 cal/g = 1 kcal/kg = = 4,186 8 · 10^3 J/kg
Coefficient de conductibilité thermique	$LMT^{-3} \cdot$ degré$^{-1}$	W/m · degré	erg/cm · s · degré	cal/cm · s · degré kcal/m · h × × degré	1 erg/cm · s · degré = = 10^5 W/m · degré 1 cal/cm · s · degré = = 4,186 8 · 10^2 W/m × × degré 1 kcal/m · h · degré = = 1,163 0 W/m · degré
Coefficients d'échange de chaleur et de transmission de chaleur	$MT^{-3} \cdot$ degré$^{-1}$	W/m² · degré	erg/cm² · s × × degré	cal/cm² · s × × degré kcal/m² × × h · degré	1 erg/cm² · s · degré = = 10^{-3} W/m² · degré 1 cal/cm² · s · degré = = 4,186 8 · 10^4 W/m² × × degré 1 kcal/m² · h · degré = = 1,163 0 · W/m² · degré
Coefficient de diffusivité thermique	L^2T^{-1}	m²/s	cm²/s		

c) le *système absolu d'unités de Gauss* dans lequel les principales unités sont le centimètre, le gramme, la seconde et dans lequel la constante diélectrique et la perméabilité magnétique sont admises sans dimension et égales simultanément à l'unité dans le vide:

$$\varepsilon_0 = \mu_0 = 1.$$

En utilisant les systèmes d'unités, on doit écrire les équations du champ électromagnétique sous une forme non rationalisée.

4° Dimensions et unités de mesure des principales grandeurs électriques et magnétiques en SI (MKSA):

Grandeur	Dimension	Unité de mesure	
		Nom	Symbole
Travail et énergie	$m^2 \cdot kg/s^2$	joule	J
Puissance	$m^2 \cdot kg/s^3$	watt	W
Quantité d'électricité	$A \cdot s$	coulomb ou ampère par seconde	C
Flux de déplacement électrique	$A \cdot s$	coulomb	C
Déplacement électrique	$A \cdot s/m^2$	coulomb par mètre carré	C/m^2
Différence de potentiel, tension, force électromotrice	$m^2 \cdot kg/A \cdot s^3$	volt	V
Capacité électrique	$A^2 \cdot s^4/m^2 \cdot kg$	farad	F
Moment électrique	$A \cdot s \cdot m$	—	$C \cdot m$
Vecteur polarisation	$A \cdot s/m^2$	—	C/m^2
Constante diélectrique	$A^2 \cdot s^4/m^3 \cdot kg$	farad par mètre	F/m
Intensité du champ électrique	$m \cdot kg/A \cdot s^3$	volt par mètre	V/m
Résistance électrique	$m^2 \cdot kg/A^2 \cdot s^3$	ohm	Ω
Résistivité électrique	$m^3 \cdot kg/A^2 \cdot s^3$	—	$\Omega \cdot m$
Conductivité électrique	$A^2 \cdot s^3/m^3 \cdot kg$	—	$1/\Omega \cdot m$
Mobilité des ions	$A \cdot s^2/kg$	—	$m^2/V \cdot s$
Flux magnétique	$m^2 \cdot kg/A \cdot s^2$	weber	Wb
Induction magnétique	$kg/A \cdot s^2$	tesla	T
Moment magnétique	$A \cdot m^2$	—	$A \cdot m^2$
Vecteur intensité d'aimantation	A/m	—	A/m
Inductance et self-inductance	$m^2 \cdot kg/A^2 \cdot s^2$	henry	H
Perméabilité magnétique	$m \cdot kg/A^2 \cdot s^2$	henry par mètre	H/m
Intensité du champ magnétique	A/m	ampère par mètre	A/m
Force magnétomotrice	A	ampère ou ampère-tour	A ou At
Résistance magnétique	$A^2 \cdot s^2/m^2 \cdot kg$	—	A/Wb ou At/Wb

5° Dimension des grandeurs électriques et relations entre leurs unités de mesure dans les systèmes électrostatique et électromagnétique CGS et dans le système de Gauss (c est la constante électrodynamique, égale à la vitesse de la lumière dans le vide: $c \approx 3 \cdot 10^{10}$ cm/s).

Grandeur	Dimension dans les systèmes		Relations entre les unités		
	u. é. s. CGS et de Gauss	u. é.m. CGS	u.é.s. [1]) / u. SI	u.é.m. / u. SI	u.é.s. [2]) / u.é.m.
Quantité d'électricité	$cm^{3/2} \cdot g^{1/2} \cdot s^{-1}$	$cm^{1/2} \cdot g^{1/2}$	$10\, c^{-1}$	10	c^{-1}
Flux de déplacement électrique	$cm^{3/2} \cdot g^{1/2} \cdot s^{-1}$	$cm^{1/2} \cdot g^{1/2}$	$10 \cdot (4\pi c)^{-1}$	$10/4\pi$	c^{-1}
Déplacement électrique	$cm^{-1/2} \cdot g^{1/2} \cdot s^{-1}$	$cm^{-3/2} \cdot g^{1/2}$	$10^{5} \cdot (4\pi c)^{-1}$	$10^{5}/4\pi$	c^{-1}
Différence de potentiel, tension, force électromotrice	$cm^{1/2} \cdot g^{1/2} \cdot s^{-1}$	$cm^{3/2} \cdot g^{1/2} \cdot s^{-2}$	$10^{-8}\, c$	10^{-8}	c
Capacité électrique	cm	$cm^{-1} \cdot s^{2}$	$10^{9}\, c^{-2}$	10^{9}	c^{-2}
Moment électrique	$cm^{5/2} \cdot g^{1/2} \cdot s^{-1}$	$cm^{3/2} \cdot g^{1/2}$	$(10c)^{-1}$	10^{-1}	c^{-1}
Vecteur polarisation	$cm^{-1/2} \cdot g^{1/2} \cdot s^{-1}$	$cm^{-3/2} \cdot g^{1/2}$	$10^{3}\, c^{-1}$	10^{5}	c^{-1}
Constante électrique	—	$cm^{-2} \cdot s^{2}$	$10^{11}/4\pi c^{2}$	$10^{11}/4\pi$	c^{-2}
Intensité du champ électrique	$cm^{-1/2} \cdot g^{1/2} \cdot s^{-1}$	$cm^{1/2} \cdot g^{1/2} \cdot s^{-2}$	$10^{-6}\, c$	10^{-6}	c
Intensité de courant	$cm^{3/2} \cdot g^{1/2} \cdot s^{-2}$	$cm^{1/2} \cdot g^{1/2} \cdot s^{-1}$	$10\, c^{-1}$	10	c^{-1}
Résistance électrique	$cm^{-1} \cdot s$	$cm \cdot s^{-1}$	$10^{-9}\, c^{2}$	10^{-9}	c^{2}
Résistivité électrique	s	$cm^{2} \cdot s^{-1}$	$10^{-11}\, c^{2}$	10^{-11}	c^{2}
Conductivité électrique	s^{-1}	$cm^{-2} \cdot s$	$10^{11}\, c^{-2}$	10^{11}	c^{-2}
Mobilité des ions	$cm^{3/2} \cdot s^{-1/2}$	$cm^{1/2} \cdot g^{-1/2} \cdot s$	$10^{4}\, c^{-1}$	10^{4}	c^{-1}

[1]) Les relations entre les unités du système de Gauss et du système SI (MKSA) tiennent les mêmes valeurs.

[2]) Les relations entre les unités du système de Gauss et du système électromagnétique CGS tiennent les mêmes valeurs.

6° Dimension des grandeurs magnétiques et relations entre leurs unités de mesure dans les systèmes électrostatique et électromagnétique CGS et dans le système de Gauss (c est la constante électrodynamique, égale à la vitesse de la lumière dans le vide: $c \approx 3 \cdot 10^{10}$ cm/s).

Grandeur	Dimension dans les systèmes		Unité de mesure dans les systèmes d'u.é.m. et de Gauss		Relations entre les unités		
	u.é.s. CGS	u.é.m. CGS et de Gauss	Nom	Symbole	$\frac{\text{u.é.s.}}{\text{u. SI}}$	$\frac{\text{u.é.m.}}{\text{u. SI}}$ [1]	$\frac{\text{u.é.s.}}{\text{u.é.m.}}$ [2]
Flux magnétique	$cm^{1/2} \cdot g^{1/2}$	$cm^{3/2} \cdot g^{1/2} \cdot s^{-1}$	maxwell	Mx	$10^{-8}c$	10^{-8}	c
Induction magnétique	$cm^{-3/2} \cdot g^{1/2}$	$cm^{-1/2} \cdot g^{1/2} \cdot s^{-1}$	gauss	Gs	$10^{-4}c$	10^{-4}	c
Moment magnétique	$cm^{3/2} \cdot g^{1/2}$	$cm^{5/2} \cdot g^{1/2} \cdot s^{-1}$	—	—	$10^{-3}c^{-1}$	10^{-3}	c^{-1}
Vecteur intensité d'aimantation	$cm^{-3/2} \cdot g^{1/2}$	$cm^{-1/2} \cdot g^{1/2} \cdot s^{-1}$	—	—	$10^{3}c^{-1}$	10^{3}	c^{-1}
Inductance et self-inductance	$cm^{-1} \cdot s^{2}$	cm	centimètre[3])	cm	$10^{-9}c^{2}$	10^{-9}	c^{2}
Perméabilité magnétique	$cm^{-2} \cdot s^{2}$	—	—	—	$10^{-7} \cdot 4\pi c^{2}$	$10^{-7} \cdot 4\pi$	c^{2}
Intensité du champ magnétique	$cm^{1/2} \cdot g^{1/2} \cdot s^{-2}$	$cm^{-1/2} \cdot g^{1/2} \cdot s^{-1}$	œrsted k 26	Œ	$10^{3}/4\pi c$	$10^{3}/4\pi$	c^{-1}
Force magnétomotrice	$cm^{3/2} \cdot g^{1/2} \cdot s^{-2}$	$cm^{1/2} \cdot g^{1/2} \cdot s^{-1}$	gilbert	Gb	$10/4\pi c$	$10/4\pi$	c^{-1}
Réluctance	$cm \cdot s^{-2}$	cm^{-1}	—	—	$10^{9}/4\pi c^{2}$	$10^{9}/4\pi$	c^{-2}

[1]) Les relations entre les unités du système de Gauss et du système SI (MKSA) tiennent les mêmes valeurs.

[2]) Les relations entre les unités du système de Gauss et du système électrostatique CGS tiennent les mêmes valeurs.

[3]) *Les normes d'état soviétiques ont supprimé cette dénomination.*

7° Les unités d'énergie hors systèmes:
a) électron-volt (eV), 1 eV = (1,602 10 ± 0,000 07) 10^{-19} J;
b) kiloélectron-volt (keV), 1 keV = 10^3 eV;
c) mégaélectron-volt (MeV), 1 MeV = 10^6 eV;
d) gigaélectron-volt (GeV), 1 GeV = 10^9 eV.

4. Unités de mesure du niveau de pression sonore

Le niveau de pression sonore $L = 2k \log \frac{p_{eff}}{p_0}$ (p. 569) est mesuré en *bels* (bl) et *décibels* (dbl). Dans le premier cas $k = 1$, dans le second $k = 10$.

5. Unités de mesure des grandeurs optiques

1° En SI la principale unité est l'unité d'intensité lumineuse: la *candela* (cd), définie comme 1/60 de l'intensité lumineuse par centimètre carré du corps noir émetteur à la température de solidification du platine.

2° Unités photométriques dérivées.

Grandeur	Unités de mesure		Unités hors système	
	Nom	Symbole	Nom	Symbole
Flux lumineux	lumen [1])	lm	—	—
Energie lumineuse	lumen par seconde	lm·s	—	—
Luminosité	lumen par mètre carré (lux)	lm/m^2 (lx)	phot	lm/cm^2 ou ph
Eclairement	lux [2])	lx	phot [4])	ph
Quantité d'éclairement	lux par seconde	lx·s	—	—
Luminance	nit [3])	nt	stilb[5])	sb
	candela par mètre carré	cd/m^2	—	—

[1]) Le flux lumineux émis dans un angle solide de 1 stéradian par une source lumineuse ponctuelle d'une intensité de 1 candela.
[2]) L'éclairement d'une surface de 1 m^2 qui reçoit normalement d'une manière uniformément répartie un flux de 1 lumen.
[3]) La luminance d'une surface plane éclairée uniformément dans la direction perpendiculaire à celle-ci si dans cette direction l'intensité lumineuse est 1 candela par mètre carré.
[4]) 1 ph = 1 lm/cm^2 = 10^4 lx.
[5]) 1 sb = 10^4 nt.

6. Quelques unités de mesure de la physique atomique et nucléaire

1° L'*unité atomique de masse* (u.a.m.) représente 1/16 de la masse de l'atome d'isotope de l'oxygène ^{16}O:

$$1 \text{ u.a.m.} = 1{,}659\,7\cdot10^{-27}\text{ kg.}$$

2° L'*unité atomique de masse unifiée* (u.a.m.u.) représente 1/12 de la masse de l'atome d'isotope du carbone $^{12}_{6}C$:

$$1 \text{ u.a.m.u.} = 1{,}660\,4\cdot10^{-27}\text{ kg.}$$

3° Le *barn* est l'unité de mesure de la section efficace transversale des réactions nucléaires:

$$1 \text{ barn} = 10^{-24}\text{ cm}^2.$$

Constantes physiques universelles

On y donne les nouvelles valeurs des constantes physiques recommandées par l'Assemblée générale de l'Association internationale de physique pure et appliquée (Varsovie, septembre 1963).

Accélération de la chute libre (valeur normale)

$$g = 9{,}806\ 65\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

Charge élémentaire

$$e = (1{,}602\ 10 \pm 0{,}000\ 07) \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C} =$$

$$= (4{,}802\ 98 \pm 0{,}000\ 20) \cdot 10^{-10}\ \text{u.é.s. } \mathrm{CGS}_q$$

Charge spécifique de l'électron

$$\frac{e}{m_e} = (1{,}758\ 796 \pm 0{,}000\ 019) \cdot 10^{11}\ \mathrm{C \cdot kg^{-1}} =$$

$$= (5{,}272\ 74 \pm 0{,}000\ 06) \cdot 10^{17}\ \text{u.é.s. } \mathrm{CGS}_q \cdot \mathrm{g^{-1}}$$

Constante de Boltzmann

$$k = (1{,}380\ 54 \pm 0{,}000\ 18) \cdot 10^{-23}\ \mathrm{J \cdot (^\circ K)^{-1}}$$

$$\frac{1}{k} = (1{,}160\ 49 \pm 0{,}000\ 16) \cdot 10^{4}\ \mathrm{^\circ K \cdot eV^{-1}}$$

Constante de dédoublement Zeeman

$$\frac{\mu_B}{hc} = (46{,}685\ 8 \pm 0{,}000\ 4)\ \mathrm{m^{-1} \cdot T^{-1}}$$

Constante des gaz

$$R = (8{,}314\,3 \pm 0{,}001\,2)\cdot 10^{3}\ \ \mathrm{J\cdot(^{\circ}K)^{-1}\cdot kmol^{-1}}$$

Constante de la gravitation universelle

$$\gamma = (6{,}670 \pm 0{,}015)\cdot 10^{-11}\ \ \mathrm{m^{3}\cdot kg^{-1}\cdot s^{-2}}$$

Constante de Planck

$$h = (6{,}625\,6 \pm 0{,}000\,5)\cdot 10^{-34}\ \ \mathrm{J\cdot s}$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = (1{,}054\,50 \pm 0{,}000\,07)\cdot 10^{-34}\ \ \mathrm{J\cdot s}$$

$$\frac{h}{e} = (4{,}135\,56 \pm 0{,}000\,12)\cdot 10^{-15}\ \ \mathrm{J\cdot s\cdot C^{-1}} =$$

$$= (1{,}379\,47 \pm 0{,}000\,04)\cdot 10^{-17}\ \ \mathrm{erg\cdot s\cdot (u.é.s.\ \ CGS_q)^{-1}}$$

$$\frac{1}{h} = (2{,}418\,04 \pm 0{,}000\,07)\cdot 10^{14}\ \ \mathrm{Hz\cdot eV^{-1}}$$

$$ch = (1{,}239\,81 \pm 0{,}000\,04)\cdot 10^{-6}\ \ \mathrm{m\cdot eV}$$

$$\frac{1}{ch} = (8{,}065\,73 \pm 0{,}000\,23)\cdot 10^{5}\ \ \mathrm{m^{-1}\cdot eV^{-1}}$$

Constante de radiation, primaire

$$c_1 = 2\pi hc^2 = (3{,}740\,5 \pm 0{,}000\,3)\cdot 10^{-16}\ \ \mathrm{W\cdot m^2}$$

Constante de radiation, secondaire

$$c_2 = \frac{hc}{k} = (1{,}438\,79 \pm 0{,}000\,19)\cdot 10^{-2}\ \mathrm{m\cdot{}^{\circ}K}$$

Constante de Rydberg

$$R'_{\infty} = (1{,}097\,373\,1 \pm 0{,}000\,000\,3)\cdot 10^{7}\ \ \mathrm{m^{-1}}$$

Constante de Stefan-Boltzmann

$$\sigma = (5{,}669\,7 \pm 0{,}002\,9)\cdot 10^{-8}\ \ \mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot(^{\circ}K)^{-4}}$$

Constante de structure fine

$$\alpha = (7{,}297\,20 \pm 0{,}000\,10)\cdot 10^{-3}$$

$$\frac{1}{\alpha} = 137{,}038\,8 \pm 0{,}001\,9$$

$$\frac{\alpha}{2\pi} = (1{,}161\,385 \pm 0{,}000\,016)\cdot 10^{-3}$$

$$\alpha^2 = (5{,}324\,92 \pm 0{,}000\,14)\cdot 10^{-5}$$

Constante de Wien

$$b = (2{,}897\,8 \pm 0{,}000\,4)\cdot 10^{-3}\ \mathrm{m\cdot {}^\circ K}$$

Energie liée à l'unité atomique de masse

$$(931{,}478 \pm 0{,}015)\ \mathrm{MeV/u.a.m.}$$

Energie au repos de l'électron

$$m_e c^2 = (0{,}511\,006 \pm 0{,}000\,005)\ \mathrm{MeV}$$

Energie au repos du neutron

$$m_n c^2 = (939{,}550 + 0{,}015)\ \mathrm{MeV}$$

Energie au repos du proton

$$m_p c^2 = (938{,}256 \pm 0{,}015)\ \mathrm{MeV}$$

Longueur d'onde comptonienne de l'électron

$$\lambda_e = (2{,}426\,21 \pm 0{,}000\,06)\cdot 10^{-12}\ \mathrm{m}$$

$$\frac{\lambda_e}{2\pi} = (3{,}861\,44 \pm 0{,}000\,09)\cdot 10^{-13}\ \mathrm{m}$$

Longueur d'onde comptonienne du proton

$$\lambda_p = (1{,}321\,40 \pm 0{,}000\,04)\cdot 10^{-15}\ \mathrm{m}$$

$$\frac{\lambda_p}{2\pi} = (2{,}103\,07 \pm 0{,}000\,06)\cdot 10^{-16}\ \mathrm{m}$$

Magnéton de Bohr

$$\mu_B = (9{,}273\,2 \pm 0{,}000\,6)\cdot 10^{-24}\ \mathrm{J\cdot T^{-1}}$$

Magnéton nucléaire

$$\mu_{nuc} = (5{,}050\,5 \pm 0{,}000\,4)\cdot 10^{-27}\ \mathrm{J\cdot T^{-1}}$$

Masse au repos de l'électron

$$m_e = (9{,}109\,1 \pm 0{,}000\,4)\cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg} =$$

$$= (5{,}485\,97 \pm 0{,}000\,09)\cdot 10^{-4}\ \mathrm{u.a.m.u.}$$

Masse au repos du neutron

$$m_n = (1{,}674\,82 \pm 0{,}000\,08)\cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg} =$$

$$= (1{,}008\,665\,4 \pm 0{,}000\,001\,3)\ \mathrm{u.a.m.u.}$$

Masse au repos du proton

$$m_{\mathrm{p}} = (1{,}672\ 52 \pm 0{,}000\ 08)\cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg} =$$
$$= (1{,}007\ 276\ 63 \pm 0{,}000\ 000\ 24)\ \mathrm{u.a.m.u.}$$

Moment magnétique anomal de l'électron

$$\frac{\mu_e}{\mu_{\mathrm{B}}} - 1 = (1{,}159\ 615 \pm 0{,}000\ 015)\cdot 10^{-3}$$

Moment magnétique du proton

$$\mu_{\mathrm{p}} = (1{,}410\ 49 \pm 0{,}000\ 13)\cdot 10^{-26}\ \ \mathrm{J\cdot T^{-1}}$$

$$\frac{\mu_{\mathrm{p}}}{\mu_{\mathrm{nuc}}} = 2{,}792\ 76 \pm 0{,}000\ 07$$

Nombre d'Avogadro

$$N_{\mathrm{A}} = (6{,}022\ 52 \pm 0{,}000\ 28)\cdot 10^{26}\ \mathrm{kmol^{-1}}$$

Nombre de Faraday

$$F = (9{,}648\ 70 \pm 0{,}000\ 16)\cdot 10^{7}\ \mathrm{C\cdot(Eq\text{-}kg)^{-1}} =$$
$$= (2{,}892\ 61 \pm 0{,}000\ 05)\cdot 10^{14}\ \ \mathrm{CGS}_q\cdot\mathrm{(Eq\text{-}g)^{-1}}$$

Pression atmosphérique normale

$$p_0 = 1\ \ \mathrm{atm} = 1{,}013\ 25\cdot 10^{5}\ \ \mathrm{N\cdot m^{-2}}$$

Rayon classique de l'électron

$$r_e^2 = (2{,}817\ 77 \pm 0{,}000\ 11)\cdot 10^{-15}\ \ \mathrm{m}$$

$$r_e^2 = (7{,}939\ 8 \pm 0{,}000\ 6)\cdot 10^{-30}\ \ \mathrm{m^2}$$

Rayon de la première orbite de Bohr

$$a_0 = (5{,}291\ 67 \pm 0{,}000\ 07)\cdot 10^{-11}\ \mathrm{m}$$

Section de Thompson

$$\frac{8}{3}\pi r_e^2 = (6{,}651\ 6 \pm 0{,}000\ 5)\cdot 10^{-29}\ \ \mathrm{m^2}$$

Vitesse de la lumière dans le vide

$$c = (2{,}997\ 925 \pm 0{,}000\ 003)\cdot 10^{8}\ \ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

Volume d'une kilomole de gaz parfait aux conditions normales

$$V_0 = (22{,}413\,6 \pm 0{,}003\,0)\ \text{m}^3$$

En 1967, ont été effectuées des mesures précises de la constante $2e/h$ (e est la charge élémentaire et h la constante de Planck), ayant à leur base l'*effet non stationnaire de Josephson*. Cet effet consiste en ce qu'une différence de potentiel V constante entre deux supraconducteurs, séparés par une mince (de l'ordre de 10^{-7} cm) couche d'isolateur, produit un courant supraconducteur de fréquence

$$\nu = \frac{2e}{h} V.$$

Ces expériences ont montré que

$$\frac{2e}{h} = (483{,}591\,2 \pm 0{,}003\,0)\ \text{MHz}/\mu\text{V},$$

$$\frac{h}{e} = (4{,}135\,725 \pm 0{,}000\,026)\cdot 10^{-15}\ \ \text{J}\cdot\text{s}\cdot\text{C}^{-1} =$$

$$= (1{,}379\,526 \pm 0{,}000\,008)\cdot 10^{-17}\ \text{erg}\cdot\text{s}\cdot\text{u.é.s. CGS}_q^{-1}\cdot$$

On a alors obtenu des valeurs plus précises:
de la grandeur inverse de la constante de structure fine α:

$$\frac{1}{\alpha} = \left(\frac{c}{4R'_\infty g_p} \cdot \frac{\mu_p}{\mu_B} \cdot \frac{2e}{h}\right)^{1/2} = 137{,}035\,9 \pm 0{,}000\,4,$$

de la vitesse de la lumière dans le vide c:

$$c = 2{,}997\,925\cdot(1 \pm 0{,}3\cdot 10^{-6})\cdot 10^8\ \text{m/s},$$

de la constante de Rydberg pour une masse infinie R'_∞:

$$R'_\infty = 1{,}097\,373\,1\cdot(1 \pm 0{,}1\cdot 10^{-6})\cdot 10^7\ \text{m}^{-1},$$

du rapport gyromagnétique du proton g_p :

$$g_p = 2{,}675\,192\cdot(1 \pm 3\cdot 10^{-6})\cdot 10^8\ \ \text{C/kg},$$

du rapport du moment magnétique du proton au magnéton de Bohr μ_p/μ_B:

$$\frac{\mu_p}{\mu_B} = 1{,}521\,032\,5\cdot(1 \pm 0{,}5\cdot 10^{-6})\cdot 10^{-3}.$$

Conformément à ceci, sont obtenues les valeurs précisées de quelques constantes physiques fondamentales (les nombres entre parenthèses multipliés par 10^{-6} indiquent l'erreur standard coïncidant avec l'erreur standard des valeurs adoptées en 1963):

Charge élémentaire $e = 1{,}602\,20\,(13)\cdot 10^{-19}$ C = $= 4{,}803\,28\,(13)\cdot 10^{-10}$ u.é.s. CGS_q

Constante de Planck $h = 6{,}626\,28\,(24)\cdot 10^{-34}$ J·s

Nombre d'Avogadro $N_A = 6{,}022\,14\,(15)\cdot 10^{26}$ $kmol^{-1}$

Masse au repos de l'électron $m_e = 9{,}109\,65\,(14)\cdot 10^{-31}$ kg.

Index



